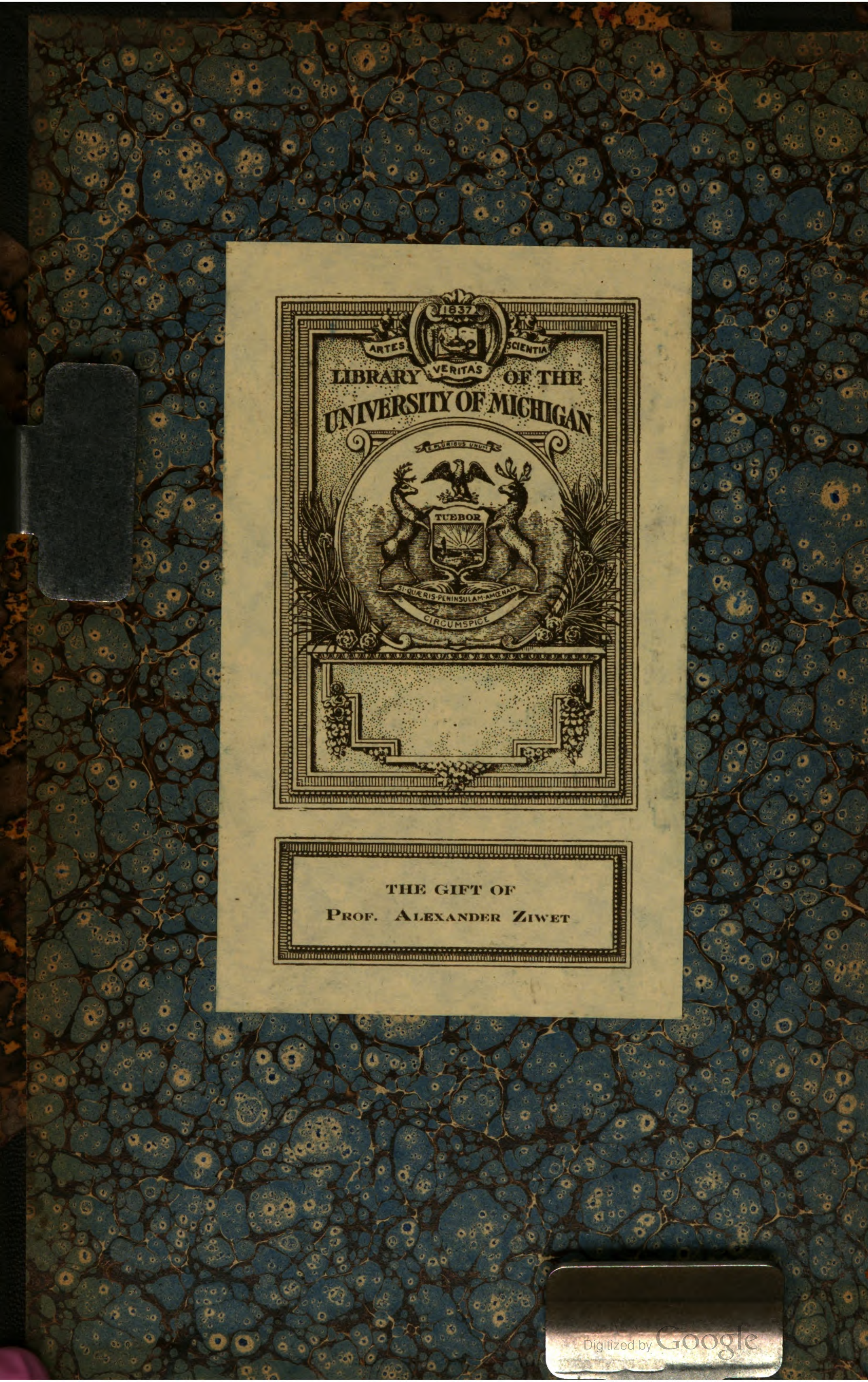
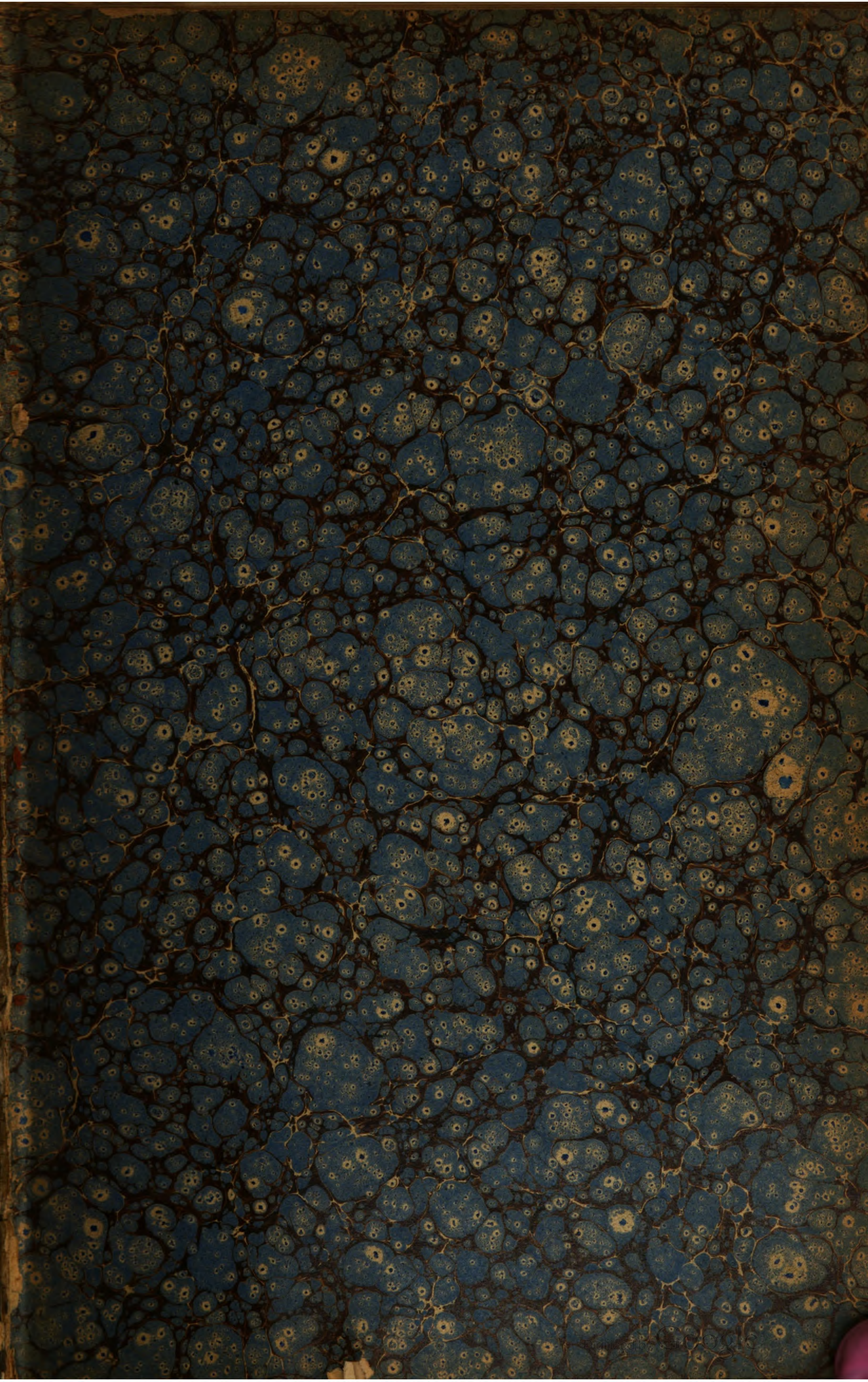

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE
THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET
Digitized by Google





LEHRBUCH DER THEORIE

DER

PERIODISCHEN FUNCTIONEN

EINER VARIABELN

MIT EINER

ENDLICHEN ANZAHL WESENTLICHER DISCONTINUITÄTSPUNKTE

NEBST EINER EINLEITUNG

IN DIE

ALLGEMEINE FUNCTIONENTHEORIE

VON

DR. OTTO RAUSENBERGER.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1884.

Prof. Alex. Ziwet
gt.
1-25-1923

Vorwort.

Das vorliegende Lehrbuch stellt sich die Aufgabe, die Theorie der periodischen Functionen in systematischem Zusammenhange auf wesentlich algebraischer Grundlage aufzubauen. Als Vorbereitung hierzu musste ein mit den elementarsten Dingen beginnender Abriss der allgemeinen Functionentheorie vorausgeschickt werden, theils um die leitenden Gedanken klarer hervorzuheben, theils um nicht fortwährend auf anderweitige, von ganz andern Gesichtspunkten ausgehende Darstellungen verweisen zu müssen. Die drei ersten Abschnitte des Buches erheben keinen Anspruch darauf, ihren Gegenstand vollständig zu erschöpfen; vielmehr wurde nur gerade dasjenige aufgenommen, was sich in der Folge als unentbehrlich erweist. Vollständig ausgeschlossen bleiben alle Untersuchungen über Functionen im Allgemeinen; der Functionsbegriff wird vielmehr sofort auf Gebilde von ganz specieller Erzeugungsweise angewandt. Da die vorkommenden Functionen nicht nur für reelle, sondern sofort auch für complexe Variable gelten, so fallen alle Specialuntersuchungen über Functionen mit reellem Argumente weg; hiermit hängt auch die von der gewöhnlichen abweichende Definition der Stetigkeit zusammen (Monogeneität im Sinne von Cauchy).

Die Theorie der analytischen Functionen wurde nach dem Vorgange von Herrn Weierstrass auf die Theorie der Potenzreihen basirt. In Anbetracht der wenigen und unvollständigen Publicationen, die bis vor Kurzem über diesen Gegenstand existirten, musste das gehaltreiche Werk von Herrn Thomae: „Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen" für meine Arbeit besondere Wichtigkeit gewinnen. Von verschiedenem Anderen

abgesehen, bin ich namentlich in den §§ 22, 26, 27, 28 der Darstellung von Herrn Thomae gefolgt; beiläufig möge erwähnt werden, dass der in § 45 gegebene Beweis des binomischen Satzes für complexe Exponenten schon vor längerer Zeit von mir bemerkt und als der einfachste erkannt wurde.

Ueber die Hauptsache der ganzen Arbeit, die specielle Theorie der eindeutigen periodischen Functionen einer Variabeln mit einer endlichen Anzahl wesentlicher Discontinuitätspunkte brauche ich wohl nur Weniges zuzufügen; überall wird die Tendenz bemerkbar sein, die Entwicklungen, soweit thunlich, elementar durchzuführen. In manchen Fällen ist dies allerdings noch nicht gelungen; die Ueberwindung der Schwierigkeiten, die hier vorhanden sind, dürfte sich erst durch eine vollständigere Erforschung der Modulfunctionen ergeben, deren Theorie mit derjenigen der elliptischen Transcendenten durch so viele Fäden zusammenhängt.

Was nun die Modulfunctionen selbst anlangt, so musste bei der gegenwärtig noch sehr unvollständigen Kenntniss derselben ihre eingehende und selbständige Behandlung auf eine spätere Darstellung der höheren periodischen Transcendenten verschoben werden; hier musste es genügen, ihren Charakter als solche nachzuweisen. Strenge genommen wären hiermit auch die Modular- und Multiplicatorgleichungen auszuschliessen gewesen; nur die Erwägung, dass eine einfache und leicht verständliche Einleitung in dieses noch schwer zugängliche Gebiet Manchem willkommen sein möchte, bewog mich, die ersten Elemente ihrer Theorie aufzunehmen, wobei ich unter Beschränkung auf das Nothwendigste wesentlich der Darstellung in dem Koenigsberger'schen Werke: „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen u. s. w.“ gefolgt bin; bei den Modulargleichungen wird die historisch hergebrachte Function $u = \varphi(\tau)$ beibehalten, während über die Gleichungen für $J(\tau)$ nur Andeutungen gemacht werden.

Bei einer eingehenden Functionentheorie kann selbstverständlich die Differential- und Integralrechnung nicht umgangen werden; vielmehr sind beide als integrirender Bestandtheil, doch nicht etwa als Grundlage derselben anzusehen. Für die bereits definirten Functionen werden die

Differentialquotienten unter Umgehung aller allgemeinen Betrachtungen entwickelt, wobei sich die Darstellung auf das Allernothwendigste einschränken kann. Die Theorie der bestimmten, complexen Integrale, die allein einen umfangreichen Abschnitt gefüllt haben würde, blieb ausgeschlossen, weil in dieser Hinsicht auf ausgezeichnete, in sich abgeschlossene Werke verwiesen werden kann. Die zum Schlusse gegebene skizzenhafte Entwicklung der wichtigsten algebraischen, logarithmisch-cyklometrischen und elliptischen (unbestimmten) Integrale soll die Anknüpfung an diese Werke erleichtern.

Frankfurt a. M., im Januar 1884.

Dr. **Otto Rausenberger.**

Inhaltsverzeichniss.

Seite

Vierter Abschnitt.

Theorie der einfachen, linearen Periodicität.

Fünfter Abschnitt.

Die additiv periodischen Functionen.

Sechster Abschnitt.

Die Functionen mit multiplicatorischer Periode.

Seite

Siebenter Abschnitt.

Die mehrfach periodischen Functionen.

Achter Abschnitt.

Die periodischen Functionen zweiter Gattung.

Neunter Abschnitt.

Die periodischen Functionen dritter Gattung.

Zehnter Abschnitt.

Zur Theorie der Integrale algebraischer Functionen.

Einleitung.

Die menschliche Geistesthätigkeit setzt sich aus zwei Elementen zusammen, die wohl mannichfach ineinander greifen, aber doch unterschieden werden können: der Anschauung und dem Denken. Die Anschauung, sowohl die unmittelbare, durch die Sinnesempfindungen gegebene, als auch die mittelbare, durch Phantasie und Gedächtniss hervorgerufene, zeigt uns alle Dinge der Erscheinungswelt in den Formen des Raums und der Zeit. Diese Formen der Anschauung, losgelöst von dem speciellen Inhalt derselben, sind Gegenstand wissenschaftlicher Betrachtung geworden. Die Lehre vom Raum ist die Geometrie; die Zeit giebt in Folge ihrer einfachen Ausdehnung, die keine complicirten Gebilde zulässt, zu keiner besonderen Wissenschaft Veranlassung; dagegen findet die Combination von Raum und Zeit in der Mechanik ihre Behandlung. Auch die Denkthätigkeit, soweit sie sich auf Grössen irgend welcher Art erstreckt, führt zu einer abstracten Wissenschaft: der Arithmetik. Da sich das rechnende Denken auf das gesammte durch die Anschauung gegebene Material bezieht, so werden auch auf die Formen der Anschauung, Raum und Zeit, die Gesetze der Arithmetik angewandt werden können. Hier tritt aber eine fundamentale Schwierigkeit ein, die nicht völlig beseitigt werden kann, da sie in der Natur unseres Geistes begründet ist. Die Anschauung zeigt uns alle Dinge, in räumlicher wie zeitlicher Beziehung, als *continuirlich* ausgedehnt; die Vorstellung der *Stetigkeit* ist uns in Folge dessen unmittelbar klar und erscheint uns selbstverständlich. Bewegt sich z. B. ein Punkt auf irgend einer Linie von einem Endpunkt derselben zum andern, so zweifelt niemand daran, dass er hierbei sämmtliche Punkte der Linie passirt, und dass diese Bewegung ohne irgend einen Sprung

stattfinden kann. Ganz anders wird aber die Sache, sowie wir das Gebiet der reinen Anschauung verlassen und das rechnende Denken in Thätigkeit tritt; dasselbe ist nämlich nur im Stande, mit *discreten* Grössen zu operiren. So führt uns schon das eben angeführte einfache Beispiel auf unlösbare Schwierigkeiten, sobald wir dazu übergehen, den Vorgang der stetigen Bewegung verstandesmässig zu zergliedern. Wir können uns die ganze Strecke in beliebig viele beliebig kleine Theile zerlegt denken und uns die Zeit vorstellen, in der ein solcher Theil durchlaufen wird; allein wir kommen bei der Fortsetzung dieser Theilung niemals zu Ende und können uns daher den Verlauf der ganzen Bewegung nicht aus einer Reihe nicht weiter zerlegbarer Theile zusammengesetzt denken. Bereits der Eleat Zeno erkannte die Schwierigkeiten, auf welche die verstandesmässige Zergliederung einer continuirlichen Bewegung führt, und basirte hierauf mehrere seiner bekannten Parodoxen. Aber auch in einer anderen Hinsicht zeigt sich unser Verstand dem zu bewältigenden Material nicht vollkommen gewachsen. Die Anschauung giebt uns Raum und Zeit als unbegrenzte, unendliche Grössen; der Verstand dagegen ist nicht befähigt, das Unendliche vollständig zu verarbeiten und als Grösse zu behandeln, mit der sich rechnen lässt. Das menschliche *Denkvermögen* ist entschieden unvollkommener organisirt als die menschliche *Anschauung*; allein trotz dieser Unvollkommenheit stellte sich die Mathematik die Aufgabe, die Formen der Anschauung, also continuirliche Grössen, arithmetischer Behandlung zu unterwerfen, und es muss als eine der bedeutendsten wissenschaftlichen Leistungen bezeichnet werden, dass es wirklich gelungen ist, die Aufgabe — freilich nicht ganz ohne alle Gedankensprünge — in befriedigender Weise zu lösen. Das Product der Bestrebungen, den Begriff der Continuität in die Arithmetik einzuführen, ist die *Functionentheorie*.

Erster Abschnitt.

Zahlen und Rechnungsoperationen.

§ 1.

Einführung der Zahlen und Rechnungsoperationen.

1. Das Grundelement der Arithmetik ist die *ganze Zahl*; dieselbe ergiebt sich durch Abstraction aus der Beobachtung, dass häufig Dinge von wesentlich gleichen Eigenschaften mehrfach vorhanden sind. Die Grundoperation der Arithmetik ist die *Addition*, das Zusammenfügen mehrerer Zahlen zu einem Ganzen. Als einfachsten Grundsatz erkennen wir, dass es für das Resultat gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge mehrere Zahlen zusammengefügt werden; ebenso ist es evident, dass eine Addition mehrerer ganzer Zahlen *immer* ausführbar ist und immer ein und nur *ein* ganzzahliges Resultat liefert.

Aus den beiden einfachen Grundbegriffen der ganzen Zahl und der Addition muss sich das ganze complicirte Gebäude der Arithmetik und Analysis aufbauen lassen, soweit bei demselben nicht Vorstellungen verwandt werden, die nur der Anschauung, nicht dem Denken zu entlehnen sind.

2. Durch wiederholte Addition der nämlichen Grösse gelangen wir zur *Multiplication*; die elementarsten Betrachtungen zeigen, dass das Product von der Reihenfolge der Factoren unabhängig ist. Die wiederholte Multiplication desselben Factors führt zum Begriffe der *Potenz*. Als wesentlich muss hervorgehoben werden, dass Multiplication und Potenzirung bei ganzen Zahlen immer zu einem und nur einem ganzzahligen Resultat führen. Eine Vermehrung der drei *directen* Operationen wäre wohl möglich, doch ohne Werth.

3. Aus dem Begriff einer Operation leitet man den ihrer *Umkehrung* her. Ist $a + b = c$, so kann man verlangen, b zu finden, wenn a und c gegeben sind. Die *Subtraction*, zu der wir auf diese Weise geführt werden, ist nicht wie die directen Operationen in allen Fällen ausführbar; wenn sie indessen ausgeführt werden kann, so liefert auch sie nur ein einziges Resultat, sie ist eine *eindeutige* Operation; denn andernfalls müssten mehrere verschiedene Grössen zu derselben hinzugefügt die gleiche Summe liefern, was der unmittelbarsten Anschauung widerspricht. Unmöglich wird die Subtraction, wenn der Subtrahend den Minuenden an Grösse übertrifft, so lange wir keine Grössen wie die bis jetzt eingeführten zur Verfügung haben. *Die Subtraction postulirt die Einführung neuer Zahlen.* Zunächst kommen wir durch Subtraction einer Zahl von einer gleichen zu der *Null*, die vorher nicht als Zahl auftrat. Die vorläufig noch ganz imaginären Grössen, welche wir als Resultat der Subtraction der uns bis jetzt bekannten Zahlen, die wir nunmehr als *positive* bezeichnen wollen, von der Null ansehen, nennen wir *negative* Zahlen. Viele einfache Beispiele, deren Anführung überflüssig ist, zeigen, dass sich solchen negativen Zahlen sehr wohl ein vernünftiger Sinn unterlegen lässt, sodass dieselben bereits seit langer Zeit den Charakter rein fictiver Grössen verloren haben. Die wichtigste Versinnbildlichung der positiven und negativen Grössen ist für uns die *geometrische.* Denken wir uns auf einer geraden Linie einen beliebigen Punkt als Nullpunkt festgesetzt, so können wir auf derselben vom Nullpunkt ausgehend nach beiden Seiten hin in immer gleichen Abständen beliebig viele Punkte fixiren, von denen die eine Reihe die positiven, die andere die negativen Zahlen repräsentirt. Der Werth einer Zahl hängt dann nicht allein von der *Länge* des Weges ab, den man durchlaufen muss, um vom Nullpunkt bis zu dem die Zahl repräsentirenden Punkt zu gelangen, sondern auch von der *Richtung* dieses Weges. Die Addition mehrerer Zahlen wird dann in der Weise versinnbildlicht, dass man nacheinander die diesen Zahlen entsprechenden Strecken, zuerst vom Nullpunkte ausgehend, zu durchlaufen hat, und zwar jedesmal in demjenigen Sinne, der

der betreffenden Zahl als positiver oder negativer Grösse zukommt. Um z. B. $+3$ und -5 zusammenzufügen, würden wir zuerst vom Nullpunkte um drei Längeneinheiten (d. h. drei Strecken von der Grösse des Abstandes der Punkte 0 und 1) im positiven Sinne, also bis zum Punkte $+3$ gehen, uns dann aber um fünf Längeneinheiten im negativen Sinne, also bis -2 bewegen. Soll dagegen $a - b$ geometrisch dargestellt werden, so legen wir zuerst vom Nullpunkt aus die Strecke a in dem ihr zukommenden Sinne, dann aber die Strecke b in dem Sinne zurück, der dem ihrem Vorzeichen entsprechenden entgegengesetzt ist. Durch diese geometrische Betrachtung ist zugleich die arithmetische Bedeutung, die wir der Addition und Subtraction entgegengesetzter Grössen beilegen wollen, so deutlich erklärt, dass wir auf dieselbe nicht weiter einzugehen brauchen. Offenbar haben wir diese Operationen derart festgesetzt, dass nirgends eine Ungleichartigkeit eintritt, und dass sie im speciellen Falle mit den früheren Definitionen zusammenfallen. Ins Besondere ist ersichtlich, dass auch hier noch die Subtraction als Umkehrung der Addition erscheint und auch in diesem allgemeineren Sinne eine eindeutige Operation ist. Bemerkenswerth ist ferner, dass bis jetzt die positiven und negativen Grössen einen durchaus *symmetrischen* Charakter tragen, so dass es nichts ausmacht, welche von zwei entgegengesetzten Grössen man als die positive, welche als die negative betrachten will. Ganz anders gestaltet sich jedoch die Sache, wenn wir zur Einführung der Multiplication positiver und negativer Grössen übergehen. Wir definiren dieselbe in der Weise, dass die für sie geltenden Regeln sich ohne Widerspruch in die für positive (d. h. für die ursprünglich eingeführten) Grössen geltenden überführen lassen. Wenn nun aber nicht allein a, b, c und d, sondern auch $a \pm b$ und $c \pm d$ positiv sind, so sind leicht die Formeln

$$(a + b)(c \pm d) = ac + bc \pm ad \pm bd,$$
$$(a - b)(c \pm d) = ac - bc \pm ad \mp bd$$

zu erweisen. Setzen wir jetzt fest, dass diese Formeln auch noch gelten sollen, wenn die vorhergenannten Zahlen theil-

weise Null oder negativ werden, so finden wir, indem wir $a = c = 0$ setzen, sofort die bekannten Regeln für die Multiplication positiver und negativer Grössen. Ist ein Factor Null, so wird auch das Product Null. Die geometrische Repräsentation dieser Regeln ist einfach. Ist a mit b zu multipliciren, so legt man in der a entsprechenden Richtung vom Nullpunkte aus eine Strecke zurück, die dem ohne Rücksicht auf die Vorzeichen genommenen Product von a und b entspricht. Ist nun b positiv, so haben wir hiermit ab gefunden; ist dagegen b negativ, so müssen wir die ganze Strecke eine Drehung von 180^0 um den Nullpunkt ausführen lassen. Dass auch hier noch die Reihenfolge der Factoren ohne Einfluss ist, ergiebt sich ohne Weiteres. Die Symmetrie der positiven und negativen Zahlen hört jetzt vollständig auf; mit Rücksicht hierauf haben wir gleich von Anfang an bei der Definition der entgegengesetzten Grössen diese Symmetrie nicht gewahrt, sondern als positiv die ursprünglich gegebenen Zahlen, als negativ die entgegengesetzten bezeichnet.

4. Die Umkehrung der Multiplication ist die *Division*; wegen der Vertauschbarkeit der Factoren ist nämlich nur *eine* solche Umkehrung denkbar. Die Division ganzer Zahlen führt nur ausnahmsweise zu einem ganzzahligen Quotienten und postulirt daher ebenfalls die Einführung neuer Grössen: der gebrochnen Zahlen, denen sich noch leichter als den negativen eine allgemein verständliche Bedeutung unterlegen lässt; man braucht sich eben nur die bisher als individuell gedachten Einheiten als theilbar vorzustellen. Auch die geometrische Darstellung der gebrochnen Zahlen liegt nahe; man theilt die Zwischenräume zwischen den die ganzen Zahlen markirenden Punkten in die nöthige Anzahl von Theilen und weist diese Theilpunkte den gebrochenen Zahlen in einer Art zu, die keiner weiteren Erörterung bedarf. Die Rechnungsoperationen für die neuen Grössen müssen wieder dergestalt definirt werden, dass die entsprechenden für ganze Zahlen als Specialfälle derselben erscheinen; genauer darauf einzugehen dürfte überflüssig sein, da keine Schwierigkeiten bei der Einführung auftreten und die Resultate aus der Elementararithmetik bekannt sind. Die Vertauschbarkeit der Factoren bleibt

auch jetzt noch gewahrt; die geometrische Repräsentation macht keine neuen Principien nöthig.

Es soll hier nur nachgewiesen werden, dass die Division ebenfalls eine *eindeutige* Operation ist. Würde nämlich die die Division definirende Gleichung $ax = b$ mehrere Werthe für x zulassen, von denen wir einen mit x_1 bezeichnen wollen, während dem anderen die Form $x_1 + x_2$ gegeben werden kann, so hätten wir

$$ax_1 = b \quad \text{und} \quad a(x_1 + x_2) = b \quad \text{oder} \quad ax_1 + ax_2 = b,$$

woraus durch Subtraction $ax_2 = 0$, also falls nicht $a = 0$ ist — in diesem Falle hat die Division vorläufig gar keinen Sinn —, $x_2 = 0$ folgt; denn das Product zweier von Null verschiedenen Grössen ist niemals Null.

Schliesslich bemerken wir noch, dass wir auch jetzt, nachdem wir zwischen die (bei der geometrischen Darstellung) getrennt liegenden ganzen Zahlen in beliebig kleinen Zwischenräumen beliebig viele weitere Punkte eingeschoben haben, durch *arithmetische* Gründe nicht genöthigt werden, uns die Zahlenreihe als eine *continuirliche* zu denken; die *geometrische* Darstellung weist freilich bereits jetzt darauf hin.

Addition, Subtraction, Multiplication und Division bilden im Verein mit den positiven und negativen ganzen und gebrochenen Zahlen eine in sich abgeschlossene Gruppe, da unter Zugrundelegung dieser Zahlen keine der angeführten Operationen unmöglich wird und hierdurch zur Einführung neuer Grössen Veranlassung giebt.

5. Bezeichnet x eine veränderliche Grösse, so nennt man

$$y = f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,$$

worin die a vorläufig Grössen der bekannten Gattungen, späterhin aber auch Grössen noch weiter einzuführender Gattungen bezeichnen mögen, eine *ganze Function.* Unter Function verstehen wir nämlich eine Grösse, welche von einer andern veränderlichen Grösse derart abhängt, dass zu jedem (eventuell mit Ausnahmen) Werth der letzteren ein oder mehrere bestimmt festgesetzte Werthe der ersteren gehören. $F(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, in dem $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ganze Functionen von

x bezeichnen, heisst eine *rationale Function* von x; die ganzen Functionen sind nur ein specieller Fall der rationalen. Offenbar ist die rationale Function die allgemeinste Function einer Variabeln, die man durch eine endliche Anzahl von Additionen, Subtractionen, Multiplicationen und Divisionen sowie Potenzirungen herstellen kann. Es tritt nun die Untersuchung derjenigen Rechnungsoperationen an uns heran, die dadurch definirt sind, dass man die Bestimmung von x verlangt, falls $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = a$ gesetzt wird. Schafft man den Nenner weg und ordnet nach Potenzen von x, so sieht man, dass es genügt, die Lösungen der Gleichung

$$y = f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

zu untersuchen. — Ein specieller Fall dieser offenbar sehr allgemeinen Umkehrungsoperation ist die durch $x^n = a$, oder wie man zu schreiben pflegt, $x = \sqrt[n]{a}$ definirte Operation, d. h. die Wurzelausziehung. Auch von dieser wollen wir zunächst nur den einfachsten Fall, $x^2 = a$ oder $x = \sqrt{a}$ ins Auge fassen. Hierbei stossen wir, abgesehen von der Doppeldeutigkeit der Quadratwurzel, die erst weiter unten in vollständigerer Weise behandelt werden soll, auf zwei Vorkommnisse von der grössten Bedeutung. Ist a eine ganze, positive Zahl, so ist $\sqrt{a}$ nur in vereinzelten Fällen wieder eine solche; ist $\sqrt{a}$ keine ganze Zahl, so kann es auch kein Bruch sein; denn ein Bruch, der auf die einfachste Benennung gebracht ist, giebt ins Quadrat erhoben einen Bruch, der ebenfalls im Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Factor hat, der sich also nicht durch Wegheben des Nenners als ganze Zahl darstellen lässt. Somit ist $\sqrt{a}$, falls es nicht wieder eine ganze Zahl ist, in der Reihe der bis jetzt bekannten Zahlen überhaupt nicht enthalten. Wir gelangen also zur Einführung einer neuen Klasse von Zahlen, die wir als *irrationale* bezeichnen wollen, im Gegensatz zu den bisher betrachteten, sog. *rationalen* Zahlen. Es fragt sich nun, in welcher Weise die irrationalen Grössen geometrisch zu versinnbildlichen sind; ob sie mit den rationalen in derselben Reihe unterzubringen oder irgendwo sonst zu placiren sind; oder, was auf dasselbe

hinausläuft, ob dieselben zu den rationalen Zahlen gewisse Grössenbeziehungen haben, so dass wir beispielsweise sagen können, $\sqrt{2}$ sei grösser als 1, kleiner als 2, oder ob die irrationalen Zahlen als gänzlich verschiedenartige Grössen zu den rationalen in gar keiner Grössenbeziehung stehen. Hier lässt uns die arithmetische Betrachtungsweise vollständig im Stich. Allerdings sehen wir, dass z. B. 1,414 ins Quadrat erhoben etwas weniger wie 2, 1,415 ins Quadrat erhoben schon etwas mehr wie 2 giebt; allein dies berechtigt uns durchaus nicht zu schliessen, $\sqrt{2}$ liege zwischen 1,414 und 1,415; denn $\sqrt{2}$ ist ja, so lange wir nur rein *arithmetische* Operationen benutzen, eine ganz ausserhalb des Bereichs der rationalen Zahlen stehende Grösse. Dass wir nun in Wirklichkeit $\sqrt{2}$ doch einen Werth beimessen, der zwischen den angegebenen Grenzen liegt, ist nur durch Herbeiziehen der Anschauung, und zwar am besten durch geometrische Versinnbildlichung zu erklären. Wir wollen uns jetzt die Zahlenreihe nicht mehr aus discreten Punkten zusammengesetzt, sondern wie die geometrische Linie als ein fortlaufendes Continuum vorstellen; wir wollen also annehmen, dass die Grösse x in continuirlicher Folge sämmtliche positiven und negativen Zahlen durchlaufen kann, ohne dabei jemals einen Sprung zu machen. Und jetzt gelangt die irrationale Grösse zu voller Existenz!

6. Bevor wir indessen auf Grund der Erweiterung des Zahlensystems zum Existenzbeweis der Quadratwurzeln übergehen, müssen wir untersuchen, in welcher Weise ein Rechnen mit Zahlen möglich ist, die wohl dem eben definirten Zahlencontinuum, nicht aber dem Bereiche der rationalen Zahlen angehören. Dass sich hierbei wesentliche Schwierigkeiten darbieten, versteht sich nach dem in der Einleitung Gesagten wohl von selbst; der menschliche Geist ist eben nur im Stande, mit discreten, nicht mit continuirlichen Grössen zu operiren. Indessen giebt es doch ein Verfahren, welches hier wie in allen ähnlichen Fällen die Schwierigkeit soweit überwindet, als dies nach der Natur der Sache überhaupt möglich ist. Statt nämlich eine Rechnung mit *absoluter* Genauigkeit

auszuführen, zeigen wir nur, dass wir sie mit *beliebig weit gehender* Genauigkeit ausführen können; statt zu zeigen, dass zwei Grössen gleich sind, zeigen wir nur, dass ihr Unterschied kleiner ist, als jede angebbare noch so kleine endliche Grösse. Wir können geradezu als Axiom aussprechen: *„Zwei Grössen, von denen sich nachweisen lässt, dass sie um weniger als eine noch so kleine endliche Grösse verschieden sind, sind gleich.“*

Mit Hilfe des eben ausgesprochenen Princips können wir das Rechnen mit irrationalen Zahlen definiren; doch wollen wir uns hierbei auf positive Zahlen beschränken, da die hierfür anzustellenden Betrachtungen sich ohne Weiteres auch auf negative übertragen lassen. — Unmittelbar ersichtlich ist es, dass wir die Linie, welche die Zahlenreihe repräsentirt, in unendlich viele, beliebig kleine gleiche Theile eintheilen können, derart dass jeder Theilpunkt eine rationale Zahl repräsentirt. Halten wir uns beispielsweise an das Decimalsystem, so können wir jeden Theil gleich $\frac{1}{10^n}$ machen, worin n eine positive, ganze Zahl von beliebiger Grösse bezeichnet. Sind daher a und b positive irrationale (oder auch rationale) Zahlen, so kann man immer $\alpha \leqq a < \alpha + \delta$, $\beta \leqq b < \beta + \varepsilon$ setzen, worin α, β, δ, ε rationale Zahlen bedeuten, von denen wir die beiden letzten so klein annehmen können, wie wir wollen. Was nun die Addition und Subtraction zweier irrationalen Grössen anlangt, so hat sie, in geometrischem Sinn aufgefasst, bei irrationalen Grössen dieselbe Bedeutung wie bei rationalen; dagegen ist die Multiplication und Division nicht in einfacher Weise geometrisch definirbar. Um die Addition irrationaler Grössen (und in gleicher Weise ist dies für die Subtraction möglich) auch in arithmetischem Sinne festzusetzen, bestimmen wir, dass $a + b$ den Ungleichungen

$$\alpha + \beta \leqq a + b < \alpha + \beta + \delta + \varepsilon$$

genügen soll; wegen der beliebigen Kleinheit von δ und ε ist hiermit die Summe von $a + b$ mit beliebiger Genauigkeit festgesetzt. Das Product ab definiren wir durch die Ungleichung

$$\alpha\beta \leqq ab \leqq (\alpha+\delta)(\beta+\varepsilon);$$

auch hier kann

$$(\alpha+\delta)(\beta+\varepsilon) = \alpha\beta + \beta\delta + \alpha\varepsilon + \delta\varepsilon$$

durch Annahme hinlänglicher Kleinheit von δ und ε von $\alpha\beta$ beliebig wenig verschieden gemacht, der Werth von ab also mit jeder beliebigen Genauigkeit festgesetzt werden. Und in ähnlicher Weise lässt sich auch $\frac{a}{b}$ mit beliebiger Annäherung durch $\frac{\alpha}{\beta}$ oder $\frac{\alpha+\delta}{\beta+\varepsilon}$ ersetzen, da $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha+\delta}{\beta+\varepsilon} = \frac{\alpha\varepsilon - \beta\delta}{\beta(\beta+\varepsilon)}$ beliebig klein gedacht werden kann.

7. Wir sind jetzt in den Stand gesetzt, den Existenzbeweis der irrationalen Quadratwurzeln zu führen. Halten wir uns etwa an das Beispiel $\sqrt{2}$! Lassen wir in x^2 die Grösse x in *continuirlicher* Folge alle positiven Werthe von 0 anfangend bis über eine beliebige Grenze annehmen, und zwar so, dass x beständig zunimmt, so wird auch x^2 beständig von 0 bis über irgend eine beliebig weit fortzurückende Grenze wachsen. Es ist nämlich $(x+\delta)^2 = x^2 + 2x\delta + \delta^2 > x^2$, und es ist andrerseits auch $(x+\delta)^2 - x^2 = (2x+\delta)\delta$ für hinlänglich kleine δ kleiner wie jede noch so kleine endliche Grösse zu machen, woraus ersichtlich ist, dass x^2 bei continuirlich wachsendem x nicht sprungweise, sondern continuirlich wächst. x^2 wird daher bei der angegebnen Aenderung *alle* Punkte passiren, die zwischen 0 und einer beliebigen Grösse liegen; es wird also auch einmal genau gleich 2 werden, und in diesem Momente ist $x = \sqrt{2}$. — Dass sich die Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen *geometrisch* durch elementare Constructionen darstellen lassen, ist bekannt. Allgemeinere Untersuchungen folgen weiter unten. Über das arithmetische Rechnen mit irrationalen Wurzelgrössen braucht nach dem Obigen nichts beigefügt zu werden.

8. Ist in $x^2 = a$ die Grösse a negativ, so giebt es weder eine negative oder positive, rationale oder irrationale Zahl, welche der Gleichung genügt; wir werden also darauf hingewiesen, noch eine weitere Gattung von Zahlen, die sog. *imaginären* einzuführen. Da der allgemeinere Fall leicht auf

die Betrachtung der Gleichung $x^2 = -1$ zurückführbar ist, so genügt es, für die beiden fictiven Lösungen der letzeren, $\pm\sqrt{-1}$ die allgemein gebräuchliche Bezeichnung $\pm i$ einzuführen. Die früher bekannten Grössen nennen wir jetzt *reelle*, solche von der Form bi *imaginäre*, und endlich solche von der Form $a + bi$ (hierbei sind natürlich a und b reell) *complexe* Grössen. Wir setzen fest, dass mit den complexen Grössen genau nach denselben Regeln gerechnet werden soll, wie mit den reellen, nur dass immer $i^2 = -1$ zu setzen ist; die Vertauschbarkeit der Faktoren eines Products und andere Sätze bestätigen sich dann leicht auch für die complexen Grössen in Folge der Definition. — Den complexen Grössen lassen sich keine so elementaren Deutungen geben wie etwa den negativen; doch ist für sie eine geometrische Darstellung möglich, durch die auch sie den Charakter rein fictiver Grössen verlieren und durch die sie in der Mathematik erst recht heimisch gemacht wurden.

§ 2.

Geometrische Darstellung der complexen Zahlen.

1. Bei der geometrischen Interpretation der Multiplication mit negativen Grössen sahen wir uns genöthigt, eine *Drehung* zu benutzen, und diese Bemerkung zeigt uns den Weg an, auf dem wir zu einer naturgemässen geometrischen Darstellung der complexen Zahlen gelangen. Wir wollen nämlich annehmen, dass bei einer Multiplication mit einer Zahl nicht nur eine Grössenänderung, sondern auch eine bestimmte Drehung der fraglichen Strecke um den Nullpunkt stattfinde. Nun ist durch $x^2 = -1$ eine Zahl $x = \pm i$ definirt, die mit sich selbst multiplicirt -1 giebt. Dieser Bedingung entsprechen diejenigen Punkte der Ebene, welche auf einer durch den Nullpunkt gehenden, zur Geraden der reellen Zahlen senkrechten Geraden liegen, und zwar in derselben Entfernung vom Nullpunkt, wie die positive und negative Einheit; man gelangt nämlich zu diesen Punkten durch eine Drehung der Einheitsstrecke um 90° und von denselben aus durch die nämliche Drehung zur negativen Einheit. Welchen der beiden Punkte man als $+i$, welchen

als $-i$ bezeichnen will, ist ganz gleichgültig, da keine dieser beiden Grössen vor der andern irgendwie ausgezeichnet ist. Man pflegt gewöhnlich die Gerade der reellen Zahlen horizontal zu legen und die positiven Zahlen rechts, die negativen links vom Nullpunkt aufzutragen; die Grösse $+i$ verlegt man dann auf den oberen, $-i$ dagegen auf den unteren Theil der verticalen Axe.

2. Nach dieser Festsetzung ist es sofort evident, in welcher Weise jeder complexen Grösse ein Punkt in der Ebene der beiden festgelegten Geraden zuzuweisen ist. Zunächst theilt man die verticale Axe in derselben Weise wie die

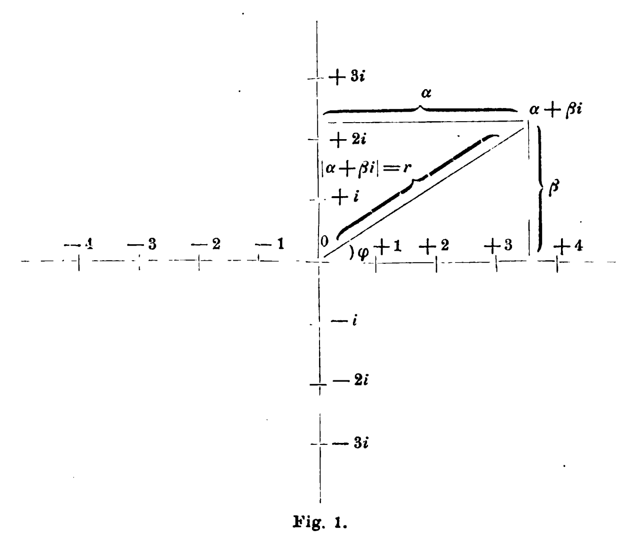


Fig. 1.

horizontale ein (vgl. Fig. 1); in den Entfernungen 1, 2, 3 u. s. w. vom Nullpunkt haben wir dann nach oben auf derselben die Zahlen i, $2i$, $3i$ u. s. w., nach unten $-i$, $-2i$, $-3i$ u. s. w. und dazwischen die gebrochenen und irrationalen rein imaginären Zahlen. Um $\alpha+\beta i$ einen Punkt anzuweisen, gehen wir zuerst auf der horizontalen Axe bis zum Punkte α und von hier aus senkrecht nach oben oder unten (je nachdem β positiv oder negativ ist) um die β entsprechende Strecke; der Endpunkt dieses Weges ist dann $\alpha+\beta i$. Hiernach ist jeder complexen Zahl ein Punkt der Ebene zugeordnet, und jedem Punkt der Ebene entspricht eine complexe Zahl.

3. Den directen Abstand eines Punktes $a = \alpha + \beta i$ der Ebene vom Nullpunkt bezeichnen wir als *den absoluten Werth, den absoluten Betrag oder den Modul* von a und schreiben für denselben

$$\text{mod. } a \text{ oder } |a|;$$

die letztere Bezeichnungsweise hat den Vorzug, dass sie nicht in der Mathematik in noch anderem Sinne gebraucht wird. Nach dem Pythagoreischen Lehrsatz haben wir

$$(1.) \qquad |a| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

wo für die Wurzelgrösse der positive Werth zu wählen ist, da wir uns den absoluten Betrag als eine durchaus positive Grösse denken wollen. Setzen wir $|a| = r$ und bezeichnen den Winkel, den die Verbindungslinie zwischen dem Punkte a und dem Nullpunkt mit der positiv gerichteten Axe der reellen Geraden (der sog. Abscissenaxe) bildet, wobei wir die Drehung von der letzteren nach der positiven Seite der Axe der rein imaginären Grössen (der sog. Ordinatenaxe) als positiv ansehen, mit φ, so haben wir $\beta = r \sin \varphi$, $\alpha = r \cos \varphi$, $a = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$; der absolute Betrag von $\cos \varphi + i \sin \varphi$ ist 1*). Man kann sich die Erzeugung des Punktes $a = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ auch so denken, dass man vom Nullpunkt aus die Strecke r in der durch φ bestimmen Richtung zurücklegt.

4. Es ist, wenn $a = \alpha + \beta i$, $b = \gamma + \delta i$ gesetzt wird,

---

*) Man wolle es nicht als eine Inconsequenz ansehen, wenn bereits hier die trigonometrischen Functionen verwandt werden, während deren Einführung als analytische Functionen erst später stattfindet. Die trigonometrischen Functionen haben vorläufig für uns nur die Bedeutung rein *geometrischer* Bezeichnungen, durch deren Verwendung wir in den Stand gesetzt werden, viele geometrische Beziehungen weit einfacher darzustellen, als dies sonst der Fall wäre. Alle folgenden Betrachtungen, bei denen trigonometrische Functionen auftreten, liessen sich auch elementargeometrisch behandeln, nur würden sie hierdurch unerträglich schwerfällig werden.

Wenn übrigens späterhin das *Argument* der trigonometrischen Functionen als Grösse in Betracht kommt, so wollen wir uns darunter nicht den betreffenden *Winkel,* sondern *die Länge des zugehörigen Kreisbogens mit dem Radius* 1 denken; an Stelle von 360^0 werden wir 2π sagen u. s. w.

$a + b = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta) i$; geometrisch kann man sich die Addition derart ausgeführt denken, dass man vom Nullpunkt ausgehend die Strecken $|a|$ und $|b|$ in den ihnen zukommenden Richtungen nach einander zurücklegt; ähnlich

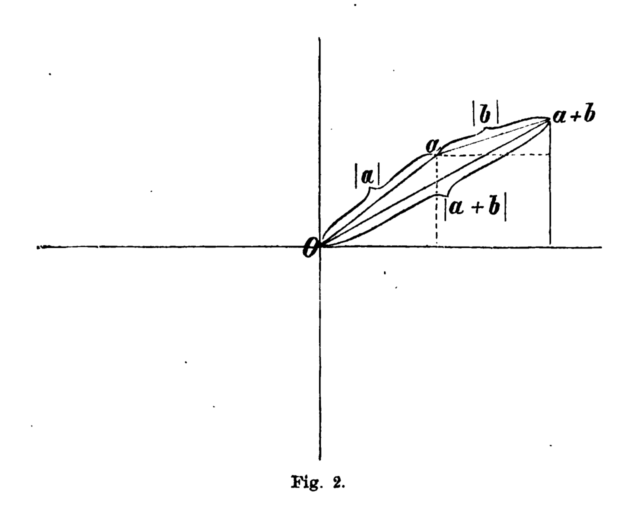


Fig. 2.

stellt sich die Subtraction dar. Aus dem Anblick von Fig. 2 ergiebt sich die Relation

$$(2.) \qquad |a| - |b| \leqq |a \pm b| \leqq |a| + |b|,$$

deren arithmetische Herleitung wir dem Leser überlassen. In Worten ausgesprochen lautet diese Ungleichung: *Der absolute Betrag der Summe oder Differenz zweier Grössen ist nicht kleiner als die Differenz der absoluten Beträge der einzelnen Grössen und nicht grösser als die Summe derselben.*

5. Die geometrischen Regeln für die Multiplication (und hiermit auch für die Division) complexer Grössen folgen aus dem sog. *Moivre'schen Satz.* Nach bekannten trigonometrischen Formeln ist

$$(3.) \quad (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi$$
$$+ i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi) = \cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi);$$

durch wiederholte Anwendung dieser Formel folgt

$$(4.) \qquad (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Ferner ist

(5.) $$\frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,(\cos\varphi - i\sin\varphi)}$$

$$= \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)$$

und somit

(6.) $$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n} = \cos n\varphi - i\sin n\varphi$$
$$= \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi).$$

6. Ist nun $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $b = \varrho(\cos\psi + i\sin\psi)$, so folgt

(7.) $$ab = r\varrho\,[\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)].$$

Dies giebt die Regel:

Man multiplicirt zwei complexe Grössen geometrisch mit einander, indem man ihre Moduln mit einander multiplicirt und ihre Richtungswinkel addirt. Der absolute Betrag des Productes ist dem Product der absoluten Beträge der einzelnen Factoren gleich.

Mit Leichtigkeit lassen sich weiter die Formeln herleiten:

(8.) $$\frac{a}{b} = \frac{r}{\varrho}\,[\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi)],$$

(9.) $$a^n = r^n\,[\cos n\varphi + i\sin n\varphi],$$

deren Einkleidung in Worte wir dem Leser anheimgeben.

7. Wir sind somit zu einer geometrischen Repräsentation der complexen Zahlen gelangt, die eine einfache Deutung der elementaren Rechnungsoperationen zulässt; nirgends ergab sich ein Widerspruch oder eine Ungleichmässigkeit, welche diese Darstellung unmöglich oder unzweckmässig machten; doch können wir deshalb nicht behaupten, dass letztere die einzig mögliche sei. Ein Punkt ist indessen trotzdem vorhanden, in dem sich die geometrische Darstellung mit den arithmetischen Beziehungen nicht völlig deckt. Lassen wir in dem Ausdruck $\frac{1}{x}$ die Variable x dem absoluten Werth nach immer abnehmen, so wird $\left|\frac{1}{x}\right|$ immer grösser, um schliesslich über alle Grenzen zu wachsen, wenn x sich der Null nähert. Diese Betrachtung veranlasst uns, dem an sich sinnlosen Ausdruck $\frac{1}{0}$ den Werth *unendlich* beizulegen, eine Festsetzung, die freilich nur einen symbolischen Cha-

rakter trägt, da wir den Begriff „*unendlich*" nicht arithmetisch verarbeiten können; in Wirklichkeit können wir immer nur über Grössen etwas nachweisen, deren absoluter Betrag über jede Grenze wächst. Lassen wir $|x|$ über alle Grenzen wachsen, so nähert sich $\frac{1}{x}$ der Null; da nun für alle endlichen, von Null verschiedenen x der Ausdruck $y = \frac{1}{x}$ durchaus *eindeutig* ist, so wollen wir der Gleichmässigkeit wegen annehmen, dass auch für $x = 0$ diese Eindeutigkeit gewahrt wird, dass somit nur *ein* Unendlichkeitspunkt existirt, bei dem eine Unterscheidung von reell und complex, positiv und negativ nicht möglich ist, gerade so wie im Nullpunkt Reelles und Complexes, Positives und Negatives zusammenfällt. Diese Anschauungsweise, zu der uns die arithmetische Untersuchung führt, stimmt aber keineswegs mit der aus geometrischen Betrachtungen sich ergebenden zusammen; denn es ist bekannt, dass die letzteren zu der Anschauung drängen, dass auf einer Ebene unendlich viele im Unendlichen gelegene Punkte vorhanden sind, die alle auf einer Geraden liegen. Wir haben hier einen entschiedenen Widerspruch, für den auch die gern angewandte Vorstellung, die an Stelle der *Ebene* der complexen Zahlen *die Oberfläche einer unendlich grossen Kugel* setzt, auf der sich Nullpunkt und Unendlichkeitspunkt diametral gegenüberliegen, keine eigentliche Lösung bietet. Indessen hält uns dieser einzige Widerspruch nicht ab, die sonst als durchaus zutreffend erkannte Repräsentationsweise unsern spätern Betrachtungen zu Grunde zu legen und auch unsere Ausdrucksweise oft derselben entsprechend zu wählen.

§ 3.

Die algebraischen Operationen.

1. Wir wurden zu der Einführung der complexen Grössen durch eine ganz specielle algebraische Operation, das Quadratwurzelausziehen, veranlasst. Es tritt nun an uns die entscheidende Frage heran: Ist es im Interesse der allgemeinen und gleichmässigen Durchführbarkeit der allgemeinsten alge-

braischen Operation, als die wir die Berechnung von x aus einer Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdot\cdot + a_{n-1} x + a_n = 0$$

betrachten, in welcher jetzt die a beliebige complexe Grössen bedeuten mögen, geboten, noch weitere Zahlengattungen in die Arithmetik einzuführen, oder reicht das bis jetzt aufgestellte Zahlensystem aus? Dass das Letztere der Fall ist, ergiebt sich aus den folgenden Untersuchungen, die gewöhnlich der Algebra zugewiesen werden, die jedoch auch in mehr als einer Hinsicht die Grundlagen der gesammten Functionentheorie bilden.

2. Lehrsatz: *Jede algebraische Gleichung*

$$(1.)\qquad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdot\cdot + a_{n-1} x + a_n = 0$$

hat mindestens eine reelle oder complexe Wurzel, d. h. es existirt immer im Bereiche der bis jetzt eingeführten Zahlen ein Werth für x, durch den die Gleichung befriedigt wird.

Beweis: Wir denken uns in dem Ausdrucke $y = f(x)$ zunächst x variabel; ändert sich dann x im Bereiche der endlichen complexen Zahlen continuirlich, d. h. ohne einen Sprung zu machen, so ist das Gleiche mit $f(x)$ der Fall; denn ändert sich x um eine hinreichend kleine (d. h. in Bezug auf den absoluten Betrag) Grösse δ, so wird auch $f(x + \delta)$ von $f(x)$ nur um eine Grösse verschieden sein, die durch hinlängliche Verminderung von δ unter jede noch so kleine Grenze gebracht werden kann. Es ergiebt sich dies unmittelbar durch Entwicklung von $f(x + \delta) - f(x)$ und wird auch an späterer Stelle ausführlicher dargethan werden. Denken wir uns die Werthe von x in bekannter Weise in einer Ebene dargestellt, die zugehörigen Werthe von y aber in einer andern, so entspricht jedem Punkte in der x-Ebene ein einziger Punkt in der y-Ebene; beschreibt der Punkt x in der x-Ebene irgend eine zusammenhängende Linie, so beschreibt auch Punkt y in seiner Ebene eine zusammenhängende Linie. — Untersuchen wir nun zuerst das höchste Glied der Gleichung, $z = a_0 x^n$. Setzen wir $z = \varrho\,(\cos\psi + i \sin\psi)$, $a_0 = A_0\,(\cos\alpha_0 + i \sin\alpha_0)$, $x = r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)$,

worin ϱ, A_0, r die absoluten Beträge von z, a_0, x bedeuten, so haben wir nach dem Moivre'schen Satz:

$$(2.)\quad \begin{aligned} z &= \varrho\,(\cos\psi + i\sin\psi) \\ &= A_0 r^n\,[\cos(\alpha_0 + n\varphi) + i\sin(\alpha_0 + n\varphi)], \end{aligned}$$

also $\varrho = A_0 r^n$, $\psi = \alpha_0 + n\varphi$, wenn wir von Vielfachen von 2π absehen, die ohne Einfluss sind. Halten wir nun den absoluten Betrag von x, also r fest, lassen dagegen φ alle Werthe von 0 bis 2π durchlaufen, oder, was dasselbe ist, Punkt x sich auf einem Kreise mit dem Radius r um den Nullpunkt bewegen, so durchläuft z gleichzeitig einen Kreis mit dem Radius $\varrho = A_0 r^n$ (s. Fig. 3). Während indessen

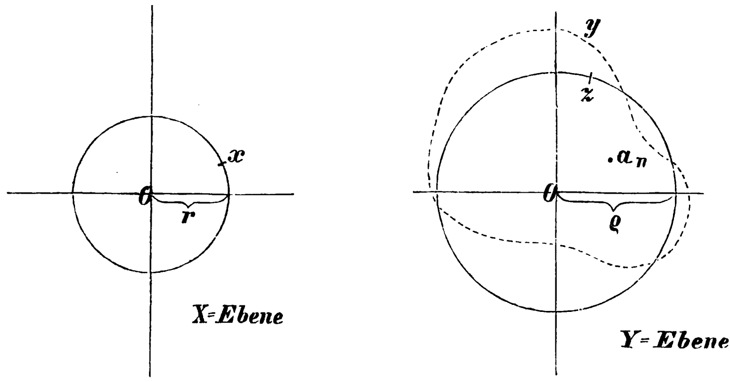


Fig. 3.

x *einen* Umlauf vollendet, führt z n Umläufe aus (weil $\psi = \alpha_0 + n\varphi$ ist). Ferner ist ersichtlich, dass auch $y = f(x)$ einen *geschlossenen* Umlauf, der freilich eine sehr complicirte Gestalt haben kann, ausführt, falls x den Nullpunkt auf einem Kreise umläuft; denn $f(x)$ nimmt seinen Ausgangswerth wieder an, wenn x zu dem seinigen zurückkehrt. Schreiben wir weiter

$$\begin{aligned} y = f(x) = A_0 r^n\,&[\cos(\alpha_0 + n\varphi) + i\sin(\alpha_0 + n\varphi)] \\ &+ A(\cos\alpha + i\sin\alpha), \end{aligned}$$

indem wir

$$a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = A(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

setzen, so kann durch Annahme eines hinlänglich grossen r bewirkt werden, dass $A_0 r^n - A$ beliebig gross wird; denn A enthält r nur im $(n-1)$ten Grad. Dieser Umstand ermöglicht es uns, über

die geschlossene Curve, die y beschreibt, wenn x den mit r als Radius um den Nullpunkt geschlagenen Kreis durchläuft, eine wichtige Bestimmung zu treffen. Die Grösse z beschreibt nämlich alsdann einen Kreis, der den Radius $A_0 r^n$ und den Nullpunkt zum Mittelpunkt hat, während y jeweilig von dem entsprechenden z um die Strecke A, also vom Nullpunkte mindestens um $A_0 r^n - A$ entfernt ist. Bei Annahme eines hinlänglich grossen r wird es daher möglich sein zu bewirken, dass die von y beschriebene Curve (in der Figur punktirt) nicht allein den Nullpunkt, sondern auch jeden andern im Endlichen gegebenen Punkt, also etwa a_n, in sich einschliesst. Nun lassen wir r continuirlich abnehmen, während φ für jedes r wieder dieselben Werthe durchläuft; wir erhalten dann ein System von geschlossenen Curven, die sich unmittelbar aneinander anschliessen, da wegen der im Eingang erörterten Eigenschaft von $f(x)$ ein plötzlicher Sprung nicht stattfinden kann. Diese Curven werden daher einen zusammenhängenden Raum (vielleicht mehrfach) überdecken. Lassen wir nun r bis zur Null abnehmen, so geht y in $f(0) = a_n$ über, so dass sich jene Curve auf den einzigen Punkt a_n zusammenzieht. Da derselbe aber innerhalb der Ausgangscurve lag, so erhellt hieraus, dass das Curvensystem den Raum innerhalb der Ausgangscurve in der y-Ebene vollständig überdeckt (ausserdem vielleicht auch noch andere Gebiete); oder mit andern Worten: Wenn x alle Werthe annimmt, welche in einem um den Nullpunkt mit dem Radius r beschriebenen Kreis liegen, nimmt $y = f(x)$ alle Werthe an, welche innerhalb der Ausgangscurve liegen. Zu den letzteren Werthen gehört aber auch die Null; $f(x)$ nimmt daher für eines jener x den Werth 0 an, d. h. es existirt mindestens *ein* x, für welches die Gleichung $f(x) = 0$ befriedigt ist.

3. Diesem Lehrsatz, der zuerst von *Gauss* bewiesen wurde, fügen wir einen zweiten bei, der ihn wesentlich vervollständigt.

Lehrsatz: *Jede Gleichung n ten Grades*

(3.) $f_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$

hat n Lösungen (Wurzeln), von denen nur ausnahmsweise einzelne zusammenfallen können.

Beweis: Wie eben bewiesen, hat die Gleichung (3.) jedenfalls *eine* Lösung α_1; dann denken wir uns mit $x - \alpha_1$ in die Function $f_n(x)$ nach den gewöhnlichen Regeln der Partialdivision dividirt. Diese Division lässt sich so lange fortsetzen, bis wir auf einen constanten Rest R stossen, und der erhaltene Quotient $f_{n-1}(x)$ ist alsdann vom $(n-1)$ten Grad. Wir haben also

(4.) $$f_n(x) = f_{n-1}(x)(x - \alpha_1) + R.$$

Setzen wir hierin $x = \alpha_1$, so wird voraussetzungsmässig $f_n(\alpha_1) = 0$, so dass wir

$$0 = R$$

finden; hiernach ist

(5.) $$f_n(x) = f_{n-1}(x)(x - \alpha_1),$$

d. h. $f_n(x)$ ist durch $x - \alpha_1$ ohne Rest theilbar, wenn α_1 eine Wurzel von $f_n(x) = 0$ ist. Nun hat aber auch $f_{n-1}(x) = 0$ mindestens eine Wurzel α_2, und wir können $f_{n-1}(x) = f_{n-2}(x)(x - \alpha_2)$ setzen, wo $f_{n-2}(x)$ nur noch vom $(n-2)$ten Grade ist. Setzen wir diese Schlüsse fort, so gelangen wir zu dem Resultat, dass

(6.) $$f_n(x) = C(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)$$

ist; durch Ausmultipliciren finden wir $C = a_0$. Aus (6.) ist nun ersichtlich, dass $f(x)$ für $x = \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ und nur für diese Grössen verschwindet, also n Wurzeln besitzt, von denen freilich auch mehrere gleich sein können. Zugleich haben wir das wichtige Resultat, *dass sich jede ganze Function nten Grades in n lineare Factoren zerlegen lässt.*

Aus dieser Zerlegung ist auch ersichtlich, wann wir eine Wurzel der Gleichung als eine *mehrfache* zu betrachten haben.

4. Die soeben abgeschlossenen Betrachtungen zeigen, dass die allgemeinsten algebraischen Operationen keine Veranlassung geben, neue Zahlengrössen einzuführen; denn die Lösung einer algebraischen Gleichung $n$ten Grades ist immer durch complexe Grössen und zwar auf n Arten (Grenzfälle abgerechnet) möglich. Da wir im weiteren Verlauf der Functionentheorie keine Operationen mehr einführen werden, die von den algebraischen wesentlich verschieden sind, so

werden wir uns nicht genöthigt sehen, noch andere Zahlengattungen aufzustellen. Damit ist indessen nicht ausgeschlossen, dass man durch Verwendung von Operationen ganz anderer Art, z. B. zahlentheoretischer Algorithmen, auch auf ganz andere Systeme von fictiven Zahlen hingewiesen werden könnte. Nur für eine Functionentheorie, die sich auf wesentlich *algebraischer* Grundlage aufbaut, ist das zweidimensionale System der complexen Zahlen ein in sich abgeschlossenes. Wir können sagen:

Das zweidimensionale System der complexen Zahlen bildet im Verein mit den algebraischen Operationen ein abgeschlossenes Ganzes.

5. Da für die Einführung weiterer Zahlengattungen keine Veranlassung durch die Algebra gegeben wird, so gehen wir auf solche nicht ein; allerdings sind derartige Erweiterungen vorgenommen worden, allein für unsere *algebraische* Functionentheorie sind sie ohne Belang.

§ 4.

Unendlich oft angewandte Operationen.

1. In allen bisherigen Untersuchungen wurden die elementaren Operationen nur in *endlicher* Anzahl angewandt; sehr häufig kommt aber auch der Fall vor, dass *unendlich viele* Operationen zu einer Rechnung nöthig sind. Eine wirkliche Ausführung unendlich vieler Operationen ist der Natur unseres Geistes zufolge unmöglich; soll daher eine Rechnung dieser Art einen Sinn haben, so müssen entweder solche Transformationen möglich sein, dass die fragliche Rechnung in eine andere umgesetzt wird, die nur eine endliche Zahl von Operationen verlangt, oder es muss möglich sein, durch Ausführung einer vielleicht grossen, doch endlichen Anzahl der Operationen dem Resultat beliebig nahe zu kommen. Ausdrücke der ersten Art, zu denen z. B. die bestimmten Integrale gehören, schliessen wir von der folgenden Untersuchung aus, da sie sich direct nicht zur Berechnung eignen, also nicht als fertig angesehen werden können. Von desto grösserer Wichtigkeit sind für uns Ausdrücke der zweiten

Gattung, und zwar kommen von ihnen hauptsächlich zwei Arten in Betracht:

a. *Die unendliche Reihe,* die durch unendlich viele Additionen,

b. *das unendliche Product,* das durch unendlich viele Multiplicationen erzeugt wird.

Ausserdem sind noch unzählige andere Gebilde dieses Charakters denkbar, wie z. B. die unendlichen Kettenbrüche; doch wollen wir dieselben hier nicht in Betracht ziehen, um unsere Untersuchungen nicht zu sehr zu zersplittern.

2. Eine unendliche Reihe, welche einen bestimmten, endlichen Werth repräsentirt, heisst *convergent,* jede andere *divergent*; nur convergente Reihen haben natürlich für die Analysis eine Bedeutung.

Soll

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

eine convergente Reihe sein, so muss sich der endliche Ausdruck

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

für wachsende n einem bestimmten, endlichen Grenzwerth nähern, oder der Rest $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$ muss für wachsende n unter jede noch so kleine endliche Grösse sinken. Man sieht leicht ein, dass dies nur möglich ist, wenn die Glieder bei geeigneter Anordnung (resp. deren absolute Werthe) von einer gewissen, im Endlichen gelegenen Stelle ab gegen die Null hin abnehmen. Dass diese Bedingung jedoch allein nicht genügt, zeigt das folgende bekannte Beispiel der sog. *harmonischen* Reihe. Sei

$$S = \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots = \sum_{1}^{\infty} {}_n \frac{1}{n},$$

wo das Symbol rechts bedeutet, dass in dem Ausdrucke $\frac{1}{n}$ der Reihe 1, 2, 3, ... u. s. w. für n gesetzt werden und dass dann alle diese Glieder summirt werden sollen, so haben wir

$$\begin{aligned} S = \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} &+ (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}) \\ &+ (\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{16}) + \cdots \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + 2 \cdot \tfrac{1}{4} + 4 \cdot \tfrac{1}{8} + 8 \cdot \tfrac{1}{16} + \cdots \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \cdots, \end{aligned}$$

also $S = \infty$; S ist somit divergent, obwohl sich seine Glieder der Null nähern.

3. Ein unendliches Product nennen wir nicht allein divergent, wenn es sich gar keinem bestimmten oder einem unendlich grossen Werthe nähert, sondern auch wenn es die Null als Grenzwerth besitzt; convergent nennen wir es nur, wenn es einen von Null verschiedenen, bestimmten endlichen Werth repräsentirt. Offenbar müssen sich dann die Factoren desselben von einer gewissen endlichen Stelle ab bei geeigneter Anordnung der 1 nähern, oder es müssen sich, wenn wir das Product in der Form

$$(1 + a_0)(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots = \prod_{0}^{\infty}{}^{n}(1 + a_n)$$

schreiben, die a_k der Null nähern. Doch ist dies wieder keine hinreichende Bedingung der Convergenz.

Wann unendliche Reihen oder Producte convergiren, lässt sich wegen der unendlichen Mannichfaltigkeit dieser Gebilde nicht im Allgemeinen entscheiden; doch werden wir in den folgenden Paragraphen eine Anzahl von Convergenzkriterien herleiten, die für die wichtigeren Fälle ausreichen; eine erschöpfende Behandlung des über diesen Gegenstand vorhandenen Materials liegt indessen nicht in der Absicht dieses Buches.

§ 5.

Unendliche Reihen mit positiven Gliedern.

1. Um bei einer unendlichen Reihe, welche nur reelle, positive Glieder enthält, über die Convergenz oder Divergenz zu entscheiden, ist es am zweckmässigsten, sie mit einer andern Reihe zu vergleichen, über die man in dieser Hinsicht bereits im Klaren ist. Als eine solche bietet sich zunächst die geometrische Progression dar. Bekanntlich ist

$$(1.)\quad 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} - \frac{a^{n+1}}{1 - a};$$

lassen wir n ins Unendliche wachsen, so wird der Ausdruck unendlich, wenn $a \geqq 1$ ist; ist dagegen $a < 1$, so sinkt $\frac{a^{n+1}}{1 - a}$ für unendlich wachsende n unter jede noch so kleine end-

liche Grösse, oder nähert sich, um es kurz auszudrücken, der Null*). Wir dürfen daher setzen

$$(2.)\qquad 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots = \sum_0^{\infty} {}^n a^n = \frac{1}{1-a}.$$

Die Reihe

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots$$

convergirt somit für $a < 1$, sie divergirt für $a \geqq 1$.

2. Hierdurch sind wir nun in den Stand gesetzt, das bekannte *Cauchy'sche Kriterium* zu beweisen:

*Eine Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ mit nur positiven Gliedern, die von einer bestimmten, im Endlichen gelegenen Stelle an immer abnehmen oder zunehmen, convergirt oder divergirt, je nachdem $\frac{u_{\omega+1}}{u_\omega} < 1$ oder $\frac{u_{\omega+1}}{u_\omega}$ ist***). Wir bezeichnen hier wie im Folgenden mit ω eine Zahl, welche ins Unendliche wächst, sodass also $\frac{u_{\omega+1}}{u_\omega}$ eine abgekürzte Bezeichnung für die gewöhnliche Ausdrucksweise $\lim \left(\frac{u_{\omega+1}}{u_\omega}\right)_{\omega=\infty}$, d. h. für den Grenzwerth (limes) ist, dem sich $\frac{u_{\omega+1}}{u_\omega}$ für ins Unendliche wachsende ω nähert. (Ist ein solcher Grenzwerth nicht vorhanden, so ist natürlich das Kriterium hinfällig.)

---

*) Ist nämlich $a < 1$, so können wir $\frac{1}{a} = 1 + \varepsilon$ setzen; wir finden

$$\frac{1}{a^2} = 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 > 1 + 2\varepsilon,$$

$$\frac{1}{a^3} > (1 + 2\varepsilon)(1 + \varepsilon) > 1 + 3\varepsilon \text{ u. s. w.},$$

$$\frac{1}{a^n} > 1 + n\varepsilon,$$

so dass für wachsende n die Grösse $\frac{1}{a^n}$ über jede endliche Grenze wächst, a^n also unter jede endliche Grenze abnimmt.

**) Es möge hierbei ausdrücklich hervorgehoben werden, dass in $\frac{u_{\omega+1}}{u_\omega} < 1$ die linke Seite um eine *endliche* Grösse kleiner als 1 sein muss.

Beweis: Ist $\frac{u_{\omega+1}}{u_\omega} < 1$, so muss schon von irgend einem noch im Endlichen gelegenen n ab der Quotient zweier aufeinander folgenden Glieder kleiner als eine unter 1 liegende Grösse α sein. Wir haben also

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \alpha, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < \alpha, \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < \alpha \text{ u. s. w.},$$

also

$$u_{n+1} < \alpha u_n, \quad u_{n+2} < \alpha u_{n+1} < \alpha^2 u_n, \quad u_{n+3} < \alpha^3 u_n$$

u. s. w.

Da nun die Summe der n ersten Glieder, deren Zahl endlich ist, nur eine endliche Grösse sein kann, so kommt für uns nur der Rest $u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ in Betracht. Es ist aber

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots < u_n(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots) < u_n \cdot \frac{1}{1-\alpha},$$

d. h. eine endliche Grösse. Hiermit ist der erste Theil der Behauptung bewiesen, während der zweite selbstverständlich ist. Ist $\frac{u_{\omega+1}}{u_\omega} = 1$, so wird das Kriterium, das keineswegs besonders scharf ist, unbrauchbar.

3. Um auch in Fällen, in denen uns das Cauchy'sche Kriterium im Stich lässt, über die Convergenz oder Divergenz zu entscheiden, benutzen wir den folgenden ebenfalls von Cauchy herrührenden

Lehrsatz: *Die beiden Reihen mit abnehmenden Gliedern*

$$S_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots = \sum_0^\infty {}^n u_n \quad \text{und}$$

$$S_2 = u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + \cdots = \sum_0^\infty {}^n 2^n u_{2^n-1}$$

convergiren und divergiren gleichzeitig.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} u_0 &< 2u_0, \\ 2u_1 &= 2u_1, \\ 4u_3 &< 2u_2 + 2u_3, \\ 8u_7 &< 2u_4 + 2u_5 + 2u_6 + 2u_7 \end{aligned}$$

u. s. w.;

durch Addition folgt

$$u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + \cdots < 2(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots),$$

d. h. S_2 convergirt, wenn S_1 convergirt, und S_1 divergirt, wenn S_2 divergirt. — Ferner ist

$$u_0 = u_0,$$
$$2u_1 > u_1 + u_2,$$
$$4u_3 > u_3 + u_4 + u_5 + u_6$$

u. s. w.

Die Addition giebt

$$u_0 + 2u_1 + 4u_3 + \cdots > u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots,$$

d. h. S_1 convergirt, wenn S_2 convergirt, und S_2 divergirt, wenn S_1 divergirt.

4. Nehmen wir

$$S_1 = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots = \sum_0^\infty {}_n \frac{1}{n^k},$$

worin k auch gebrochene Werthe annehmen kann, wenn nur festgesetzt wird, dass alsdann für n^k der zugehörige positive Werth gewählt wird, so ist

$$S_2 = 1 + 2^{1-k} + 4^{1-k} + 8^{1-k} + \cdots$$
$$= 1 + (2^{1-k})^1 + (2^{1-k})^2 + (2^{1-k})^3 + \cdots;$$

da diese Reihe convergirt oder divergirt, je nachdem $k > 1$ oder $k \leqq 1$ ist, so ist hiermit auch die Convergenzbedingung für S_1 gegeben.

5. Bei der letzten Reihe S_1 ist $\frac{u_{\omega+1}}{u_\omega} = \left(\frac{\omega}{\omega+1}\right)^k$; haben wir irgend eine Reihe $\Sigma = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$, bei der $\frac{a_{\omega+1}}{a_\omega} < \left(\frac{\omega}{\omega+1}\right)^k$, $k > 1$ ist, so zeigen ähnliche Schlüsse wie die zur Herleitung des Cauchy'schen Kriteriums benutzten, dass Σ besser convergirt wie S_1, also jedenfalls eine convergente Reihe ist. Um dem so erhaltenen Kriterium eine übersichtlichere Form zu geben, nehmen wir $k = 1 + \frac{1}{r}$, worin r eine ganze Zahl sein möge; das Kriterium lautet dann zunächst

$$\frac{a_{\omega+1}}{a_\omega} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{1+\frac{1}{r}}} \quad \text{oder} \quad \frac{a_{\omega+1}}{a_\omega} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\omega}\right)\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\frac{1}{r}}}.$$

Nun ist aber

$$\left(1+\frac{1}{r\omega}\right)^2 = 1+\frac{2}{r\omega}+\frac{1}{r^2\omega^2} > 1+\frac{2}{r\omega},$$

$$\left(1+\frac{1}{r\omega}\right)^3 > \left(1+\frac{2}{r\omega}\right)\left(1+\frac{1}{r\omega}\right) > 1+\frac{3}{r\omega}+\frac{2}{r^2\omega^2} > 1+\frac{3}{r\omega},$$

$$\vdots$$

$$\left(1+\frac{1}{r\omega}\right)^r > 1+\frac{r}{r\omega} > 1+\frac{1}{\omega},$$

also nach Ausziehung der r^{ten} Wurzel (alle Wurzelgrössen werden natürlich positiv genommen):

$$\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\frac{1}{r}} < 1+\frac{1}{r\omega},$$

und somit

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{1+\frac{1}{r}}} > \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\omega}\right)\left(1+\frac{1}{r\omega}\right)} > \left(1-\frac{1}{\omega}\right)\left(1-\frac{1}{r\omega}\right)$$

$$> 1-\frac{1}{\omega}-\frac{1}{r\omega} > 1-\frac{1+\frac{1}{r}}{\omega};$$

denn es ist für $\alpha < 1$: $\frac{1}{1-\alpha} = 1+\alpha+\alpha^2+\cdots > 1+\alpha$, somit $\frac{1}{1+\alpha} > 1-\alpha$. Die Reihe convergirt daher um so sicherer, wenn $\frac{a_{\omega+1}}{a_\omega} < 1 - \frac{1+\frac{1}{r}}{\omega}$ bei *endlichem* r ist, oder wenn $\omega\left(1-\frac{a_{\omega+1}}{a_\omega}\right) > 1+\frac{1}{r}$, d. h. *wenn* $\omega\left(1-\frac{a_{\omega+1}}{a_\omega}\right)$ *um eine endliche Grösse grösser wie* 1 *ist.*

§ 6.

Reihen mit positiven und negativen Gliedern.

1. Enthält eine Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

positive und negative Glieder, *so convergirt sie jedenfalls, wenn die Reihe der absoluten Beträge derselben convergirt;* denn es ist nach § 2, (2.)

$|u_0| + |u_1| + |u_2| + \cdots > |u_0 + u_1 + u_2 + \cdots|$ u. s. w.

2. Es kann jedoch auch eine Reihe mit positiven und negativen Gliedern convergiren, wenn die Reihe der absoluten Beträge divergirt. Leicht zu beweisen ist der folgende Satz, der sich auf den einfachsten Fall bezieht.

Lehrsatz: *Eine Reihe, deren Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, convergirt immer, wenn von einer bestimmten, endlichen Stelle ab die Glieder gegen die Null hin abnehmen.*

Beweis: Es ist, wenn n gross genug angenommen wird,

$$\begin{aligned} S &= u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots \\ &= (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \cdots \\ &< u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + u_{2n} - u_{2n+1} \end{aligned}$$

und andrerseits

$$\begin{aligned} S &= u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - \cdots \\ &> u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots - u_{2n-1} + u_{2n}. \end{aligned}$$

Lassen wir n ins Unendliche wachsen, so differiren die beiden Grenzen, zwischen welche wir S eingeschlossen haben, um die verschwindende Grösse u_{2n+1}; S nähert sich daher einer bestimmten Grenze, die nur eine endliche sein kann, da die Reihe das eine Mal durch Addition positiver Grössen zu Endlichem, das andere Mal durch Subtraction positiver Grössen von Endlichem erzeugt wird.

Beispiel: $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ convergirt, obgleich $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ divergirt.

§ 7.

Reihen mit complexen Gliedern.

1. Eine Reihe, deren Glieder complex sind, kann nur dann als convergent angesehen werden, wenn sowohl die reellen, als auch die rein imaginären Theile ihrer Glieder convergente Reihen bilden.

Lehrsatz: *Eine unendliche Reihe convergirt, wenn die Reihe der absoluten Beträge der einzelnen Glieder convergirt.*

Beweis: Lautet die Reihe

$$(a_0 + b_0 i) + (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + \cdots$$

und convergirt die Reihe der absoluten Beträge der Glieder

$$\sqrt{a_0^2 + b_0^2} + \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \cdots,$$

so brauchen wir nur zu zeigen, dass

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \text{ und } b_0 + b_1 + b_2 + \cdots$$

convergiren. Nun ist aber

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2} \geqq \sqrt{a_k^2} \geqq |a_k|$$

und ebenso

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2} \geqq |b_k|,$$

woraus

$$|a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots < \sqrt{a_0^2 + b_0^2} + \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \cdots$$

und weiter nach § 6, 1 die Convergenz von

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

und in gleicher Weise von

$$b_0 + b_1 + b_2 + \cdots$$

folgt. — Die Umkehrung dieses Satzes ist nicht zulässig.

§ 8.

Einfluss der Reihenfolge der Glieder einer unendlichen Reihe.

1. *Dirichlet* hat zuerst das scheinbare Paradoxon aufgestellt, dass eine convergente unendliche Reihe ihren Werth ändern kann, wenn die *Reihenfolge* der Glieder eine Änderung erleidet, und dies an folgendem Beispiele nachgewiesen. Sei

$$S_1 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots = \sum_{1}^{\infty} {}_n \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \sum_{1}^{\infty} {}_n \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right)$$

und

$$S_2 = 1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6} + \cdots$$

$$= \sum_{1}^{\infty} {}_n \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right),$$

so haben wir (man vergleiche über die Subtraction unendlicher Reihen den folgenden Paragraphen)

$$S_2 - S_1 = \sum_1^\infty {}^n \left(\frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2n} \right)$$

$$= \sum_1^\infty {}^n \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \right) = \frac{1}{2} \sum_1^\infty {}^n \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2} S_1,$$

also $S_2 = \frac{3}{2} S_1$.

Dieses Paradoxon erscheint weniger überraschend, wenn man beachtet, dass der positive und negative Theil von S_1 und S_2, nämlich $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$ und $-(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots)$ einzeln nicht convergiren, so dass sich die gesammten Reihen als Differenz unendlicher Grössen darstellen. Man ersieht hieraus zugleich, dass eine bei bestimmter Anordnung convergente Reihe bei anderer Anordnung divergent sein kann.

Wir fragen nun: Wann convergirt eine Reihe unbedingt, d. h. unabhängig von der Reihenfolge der Glieder?

2. Lehrsatz: *Bei einer convergenten Reihe mit nur positiven Gliedern*

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

ist die Reihenfolge der letzteren gleichgültig (falls nur Glieder von endlichem Werth nicht ins Unendliche geschoben werden).

Beweis: Denken wir uns von der Reihe S die ersten n Glieder, also $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$ weggenommen, so kann der Rest R_n beliebig klein gedacht werden, wenn man nur n hinlänglich gross wählt. Ändern wir nun die Reihenfolge der Glieder, so können wir von der neuen Reihe S' die Summe S'_m der m ersten Glieder absondern, und dabei m so gross nehmen, dass unter denselben die früheren n ersten Glieder enthalten sind. Dann ist $R'_m < R_n$, also beliebig klein; ferner ist S'_m gleich S_n vermehrt um gewisse Glieder, die in R_n enthalten, also zusammen kleiner wie R_n, d. h. beliebig klein sind. Hieraus geht hervor, dass bei hinlänglich grossem n und m sich S_n und S'_m beliebig wenig unterscheiden und dass somit S und S' gleichwerthig sind.

3. Lehrsatz: *Convergiren die absoluten Beträge der Glieder einer Reihe, so ist sie unbedingt convergent.*

Beweis: Wir können genau die Schlüsse des vorigen Beweises wiederholen, wenn wir nur noch beachten, dass wenn eine Summe $|a| + |b| + |c| + \cdots$ unter einer beliebig klein

zu machenden Grösse liegt, dies umsomehr mit $|a+b+c\cdots|$ der Fall sein muss.

4. Ist eine Reihe nicht unbedingt convergent, so ist es nöthig, die Reihenfolge ihrer Glieder genau zu fixiren. Man kann dies in der Weise thun, wie es unter 1. geschehen ist. Sehr zweckmässig ist aber auch eine Angabe darüber, welche Glieder bei der Summirung gleichzeitig in Betracht zu ziehen sind. In diesem Sinne können wir z. B. schreiben

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-3}+\cdots$$

$$=\sum_{\substack{n \\ -r \\ r=\infty}}^{+r}\frac{1}{x+n},$$

wodurch angedeutet ist, dass gleichviele Glieder mit positivem wie mit negativem n in die Summe aufzunehmen sind.

§ 9.

Das Rechnen mit unendlichen Reihen.

1. Schon aus den Ergebnissen des vorigen Paragraphen geht hervor, dass man mit unendlichen Reihen nicht ohne Weiteres rechnen darf wie mit Summen von endlicher Gliederzahl. Wir haben daher zu untersuchen, unter welchen Bedingungen wir unendliche Reihen nach denselben Gesetzen addiren, subtrahiren und multipliciren dürfen, wie gewöhnliche Summen. Die Addition und Subtraction macht keine Schwierigkeit; unbedingt convergente Reihen können addirt oder subtrahirt werden, ohne dass auf die Reihenfolge der Glieder Rücksicht zu nehmen ist, was durch ähnliche Betrachtungen wie die von § 9, 2 und 3 erhellt; bei bedingt convergenten Reihen bietet die Ausführung dieser Operationen auch kein Bedenken dar, wenn man die Reihenfolge in der Summe oder Differenz so festsetzt, dass darin nicht diejenigen Glieder unendlich weit auseinander gerissen werden, welche in den einzelnen Reihen zusammengeordnet sind.

2. Über die Multiplication unendlicher Reihen beweisen wir folgende Sätze.

Lehrsatz: *Sind* $U=u_0+u_1+u_2+\cdots$ *und* $V=v_0$

$+ v_1 + v_2 + \cdots$ *convergente Reihen mit nur positiven Gliedern, so ist*

$$S = u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0)$$
$$+ (u_0 v_3 + u_1 v_2 + u_2 v_1 + u_3 v_0) + \cdots$$

ebenfalls eine convergente Reihe, und es ist

$$S = UV.$$

Beweis: Setzen wir

$$U_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$
$$V_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n,$$
$$S_n = u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \cdots$$
$$+ (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0)$$

und legen S_{2n} die analoge Bedeutung bei, so ist

$$S_n < U_n V_n < S_{2n};$$

denn S_n enthält, wie die Ausrechnung zeigt, weniger, S_{2n} aber mehr Glieder wie $U_n V_n$. Lässt man n ins Unendliche wachsen, so nähern sich S_n und S_{2n} *derselben* Grenze, die endlich sein muss, da S_n kleiner als die endliche Grösse $U_n V_n$ ist; es wird somit $UV = S$.

3. *Derselbe Satz gilt auch, wenn U und V Reihen mit complexen Gliedern sind, deren absolute Beträge convergente Reihen bilden.*

Beweis: Es sind nicht nur der Annahme nach

$$U' = |u_0| + |u_1| + |u_2| + \cdots$$

und

$$V' = |v_0| + |v_1| + |v_2| + \cdots,$$

sondern auch nach dem vorigen Satz

$$S' = |u_0||v_0| + (|u_0||v_1| + |u_1||v_0|)$$
$$+ (|u_0||v_2| + |u_1||v_1| + |u_2||v_0| + \cdots$$

convergent. Nun ist bei analoger Bezeichnung wie vorhin

$$|U_n V_n - S_n| = |u_1 v_n + u_2 v_{n+1} + u_2 v_n + \cdots + u_n v_n|$$
$$< |u_1 v_n| + |u_2 v_{n-1}| + |u_2 v_n| + \cdots + |u_n v_n|$$
$$< |u_1||v_1| + |u_2||v_{n-1}| + |u_2||v_n| + \cdots + |u_n||v_n|$$
$$< U_n' V_n' - S_n'.$$

Die rechts stehende Grösse nähert sich mit unendlich wachsendem n der Null; mithin ist

$$|UV - S| = 0, \quad \text{also} \quad S = UV.$$

Bei andern als den betrachteten Reihen ist eine derartige Multiplication nicht statthaft.

In welcher Weise die Multiplication einer unendlichen Reihe mit einer Constanten oder einer endlichen Summe ausgeführt wird, braucht wohl nicht auseinandergesetzt zu werden.

§ 10.

Unendliche Doppelreihen.

Eine $k$fach unendliche Reihe stellt sich in der Form

$$\sum_0^\infty{}_{n_1} \sum_0^\infty{}_{n_2} \cdots \sum_0^\infty{}_{n_k} U_{n_1, n_2, \ldots n_k}$$

dar; es soll hierbei zuerst nach n_k, dann nach n_{k-1} u. s. w., zuletzt nach n_1 summirt werden. Die Gesammtreihe ist natürlich dann convergent, wenn sich jede dieser nach einander auszuführenden Summen als convergent erweist; die Aufstellung specieller Kriterien erscheint für den Zweck dieses Buches überflüssig. Die Reihenfolge der Summation ist im Allgemeinen ebensowenig gleichgültig, wie die Anordnung der Summanden in den einzelnen Partialreihen. Indessen gilt der

Lehrsatz: *Wenn die $k$fach unendliche Reihe*

$$\sum_0^\infty{}_{n_1} \sum_0^\infty{}_{n_2} \cdots \sum_0^\infty{}_{n_k} U_{n_1, n_2, \ldots n_k}$$

so beschaffen ist, dass

$$\sum_0^\infty{}_{n_1} \sum_0^\infty{}_{n_2} \cdots \sum_0^\infty{}_{n_k} |U_{n_1, n_2, \ldots n_k}|$$

convergirt, so convergirt die erstgenannte Reihe und ist von der Reihenfolge der Summation unabhängig.

Beweis: Dass die Vertauschung der Summationsfolge bei einer Reihe mit nur *positiven* Gliedern ohne Einfluss ist, geht aus den Betrachtungen von § 8, 2 hervor; dieselben sind für mehrfach unendliche Reihen ebensowohl gültig, wie für ein-

fach unendliche. Durch Anwendung der Schlüsse von § 7 und § 8, 3 folgt hieraus sofort der ausgesprochene Satz.

Wir dürfen also in diesem Falle nicht allein in jeder Partialreihe die Glieder beliebig umstellen, sondern es ist uns auch freigestellt, nach welcher der Grössen $n_1, n_2, \ldots n_k$ wir zuerst summiren wollen u. s. w.

§ 11.

Unendliche Producte.

1. Die Untersuchung der Convergenz unendlicher Producte lässt sich mit Leichtigkeit auf die Untersuchung unendlicher Reihen zurückführen, wie sich aus den folgenden Lehrsätzen ergiebt, die wir Herrn Weierstrass verdanken*).

Lehrsatz: *Die unendlichen Producte*

$$P = (1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3) \cdots$$

und

$$Q = (1 - u_1)(1 - u_2)(1 - u_2) \cdots,$$

in denen die u reelle, positive Zahlen sind (die wir ohne die Allgemeinheit zu beschränken alle kleiner als 1 annehmen dürfen, da wir sonst, ausser in Fällen evidenter Divergenz, nur einen Theil der Factoren abzusondern brauchten), convergiren oder divergiren, je nachdem die Reihe

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

convergirt oder divergirt.

Beweis: Es ist

$$(1 + u_1)(1 + u_2) = 1 + u_1 + u_2 + u_1 u_2 > 1 + u_1 + u_2,$$

$$(1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3) > (1 + u_1 + u_2)(1 + u_3)$$
$$> 1 + u_1 + u_2 + u_3$$

u. s. w.,

und schliesslich

$$P = (1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3) \cdots$$
$$> 1 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots > 1 + S.$$

P divergirt daher, wenn S divergirt. — Ebenso ist

*) Weierstrass, „Über die analytischen Facultäten"; Crelle's Journal, Bd. 51.

$$(1 - u_1)(1 - u_2) = 1 - u_1 - u_2 + u_1 u_2 > 1 - u_1 - u_2,$$
$$(1 - u_1)(1 - u_2)(1 - u_3) > 1 - u_1 - u_2 - u_3$$
u. s. w.;

schliesslich
$$Q = (1 - u_1)(1 - u_2)(1 - u_3) \cdots$$
$$> 1 - u_1 - u_2 - u_3 - \cdots > 1 - S.$$
Da wir uns, falls S convergirt, so viele Factoren, resp. Summanden bereits ausgeschieden denken können, dass $S < 1$ ist, und da Q nicht unendlich sein kann, so schliessen wir, dass Q convergirt, wenn dies mit S der Fall ist; weil nämlich bei einem derartigen Product ein Oscilliren nicht denkbar ist, so muss es sich einer endlichen Grenze unendlich nähern, wenn dargethan ist, dass es zwischen endlichen Grenzen liegt.

Weiter ist, da wir $u_k < 1$ voraussetzen dürfen,
$$\frac{1}{1 - u_k} = 1 + u_k + u_k^2 + u_k^3 + \cdots,$$
also
$$\frac{1}{1 - u_k} > 1 + u_k,$$
somit
$$\frac{1}{(1 - u_1)(1 - u_2)(1 - u_3)\cdots} > (1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3)\cdots$$
oder
$$P < \frac{1}{Q};$$
da nun ausserdem $P > 1 > 0$ ist, so schliessen wir, dass P ebenfalls convergirt, wenn S convergirt. Aus derselben Ungleichung können wir auch schliessen, dass Q sich der Null nähert, wenn S divergirt, also P ins Unendliche wächst. Die Zusammenstellung dieser Resultate giebt den Lehrsatz.

2. Lehrsatz: *Das unendliche Product*
$$P = (1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3)\cdots,$$
in dem die u_k beliebig complex sind, convergirt, wenn die Reihe $|u_1| + |u_2| + |u_3| \cdots$ convergirt.

Beweis: Es ist, wenn wir ausmultipliciren,
$$(1 + u_\omega)(1 + u_{\omega+1})(1 + u_{\omega+2})\cdots$$
$$= 1 + u_\omega + u_{\omega+1} + u_{\omega+2} + \cdots$$
$$+ u_\omega u_{\omega+1} + \cdots + u_\omega u_{\omega+1} u_{\omega+2} + \cdots$$

und weiter

$$|u_\omega + u_{\omega+1} + u_{\omega+2} + \cdots + u_\omega u_{\omega+1} + \cdots + u_\omega u_{\omega+1} u_{\omega+2} + \cdots|$$
$$\leqq |u_\omega| + |u_{\omega+1}| + |u_{\omega+2}| + \cdots + |u_\omega|\,|u_{\omega+1}| + \cdots$$
$$+ |u_\omega|\,|u_{\omega+1}|\,|u_{\omega+2}| + \cdots$$
$$\leqq (1 + |u_\omega|)(1 + |u_{\omega+1}|)(1 + |u_{\omega+2}|)\cdots - 1.$$

Bedenken wir, dass sich nach dem Vorhergehenden die Grösse

$$(1 + |u_\omega|)(1 + |u_{\omega+1}|)(1 + |u_{\omega+2}|)\cdots$$

der Einheit nähert, da das Product

$$(1 + |u_1|)(1 + |u_2|)(1 + |u_3|)\cdots$$

convergirt, so folgt hieraus, dass

$$(1 + u_\omega)(1 + u_{\omega+1})(1 + u_{\omega+2})\cdots$$

den gleichen Grenzwerth besitzt, dass also auch

$$(1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3)\cdots$$

convergirt.

3. Aus dem letzten Beweis geht zugleich hervor, dass unendliche Producte der betrachteten Art *unbedingt* convergiren; andere Producte hängen von der Reihenfolge der Factoren ab. Über mehrfach unendliche Producte gelten ähnliche Bemerkungen, wie über mehrfach unendliche Reihen.

Zweiter Abschnitt.

Die algebraischen Functionen.

§ 12.

Die ganze Function.

1. Bereits früher sahen wir uns veranlasst, den Begriff der Function kurz zu erwähnen. Wir definiren jetzt etwas ausführlicher: *Eine Function einer Variabeln $y = f(x)$ ist eine Grösse, welche von einer andern x, dem sog. Argument, derart abhängt, dass jedem Werthe von x ein oder mehrere Werthe von y entsprechen. Damit soll nicht ausgeschlossen sein, dass y für manche x völlig unbestimmt werden kann.* Ebenso wird eine Function $y = f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ mehrerer Variabeln eine Grösse sein, die von den Werthen von $x_1, x_2, \cdots x_n$ irgendwie abhängt. Diese Definition ist eine noch sehr vage und lässt der Phantasie den grössten Spielraum. Für unseren Verstand ist die Functionalbeziehung zwischen y und x nur dann fasslich, wenn sich y durch gewisse Rechnungsoperationen aus dem jeweiligen x berechnen lässt; doch ist es sehr wohl denkbar, dass diese Operationen bei verschiedenen Werthen von x als verschieden festgesetzt werden. Diese Operationen brauchen sich nicht gerade auf die bis jetzt eingeführten algebraischen zu beschränken, sondern können auch ganz anderer, z. B. zahlentheoretischer Natur sein. Man kann z. B. festsetzen, dass y für alle reellen, rationalen Werthe von x gleich 1, für alle übrigen gleich 0 sein soll. In der Folge werden wir Untersuchungen über allgemeine Functionen vermeiden, uns vielmehr an solche von ganz specieller Entstehungsweise halten. Zunächst sollen uns diejenigen Functionen einer Variabeln beschäftigen, bei denen

y durch eine *endliche Anzahl algebraischer Operationen* aus x hergeleitet wird.

2. Die erste Function, die wir betrachten, ist die schon definirte *ganze:*

$$(1.)\quad y = f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,$$

der wir nach dem höchsten Exponenten den $n$ten Grad zuschreiben. Folgende Eigenschaften der ganzen Function sind unmittelbar evident:

a. Jede ganze Function ist überall *eindeutig*, d. h. zu jedem x gehört nur ein einziges, fest bestimmtes y.

b. Eine ganze Function $n$ten Grades wird für n im Allgemeinen verschiedene, in speciellen Fällen auch theilweise oder ganz zusammenfallende Werthe von x gleich Null (§ 3).

c. Dieselbe nimmt überhaupt jeden beliebigen Werth c $n$mal (mit derselben Einschränkung) an; denn die Gleichung

$$c = f(x) \text{ oder } c = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

hat n Lösungen.

d. Die ganze Function wird für kein endliches x unendlich, da alsdann alle Glieder endlich sind. Für $x = \infty$ wird sie unendlich von der $n$ten Ordnung. Man sagt nämlich von einer Function $\varphi(x)$, sie werde in einem Punkte $x = \alpha$ von der $n$ten Ordnung unendlich, wenn $(x - \alpha)^n \varphi(x)$ für $x = \alpha$ einen endlichen, von Null verschiedenen Werth annimmt; ist $\alpha = \infty$, so muss diese Definition dahin abgeändert werden, dass wir verlangen, dass $\frac{\varphi(x)}{x^n}$ für $x = \infty$ einen endlichen, von Null verschiedenen Werth erhält*). Dass das letztere bei $f(x)$ zutrifft, ist klar, da $\frac{f(x)}{x^n} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}$ für $x = \infty$ den Werth a_0 annimmt. Wenn man nun einen Unendlichkeitspunkt $n$ter Ordnung als mit n Unendlichkeitspunkten erster Ordnung äquivalent ansieht, so bleibt der Satz c. auch für $x = \infty$ richtig.

e. Jede ganze Function $n$ten Grades lässt sich in n lineare Factoren zerlegen (§ 3):

---

*) Genau analog können wir auch *Nullwerthe* $n$ten Grades definiren.

(2.) $$f(x) = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n).$$

Wir erhalten hiermit die zweite Grundform der ganzen Function. — Die Grössen α_k heissen die *Wurzeln* von $f(x)$.

3. Von besonderer Wichtigkeit ist es zu untersuchen, wie sich eine Function unendlich kleinen Veränderungen des Arguments gegenüber verhält. Lassen wir zunächst in $y = x^n$ das Argument x sich um eine beliebige Grösse Δx ändern und bezeichnen die hierdurch hervorgerufene gleichzeitige Änderung von y mit Δy, so erhalten wir nach dem binomischen Lehrsatz, den wir für ganze Exponenten wohl als bekannt voraussetzen dürfen, übrigens weiter unten noch beweisen,

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \Delta x^2 + \cdots + \Delta x^n$$

oder

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = n x^{n-1} + \Delta x \left(\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} \Delta x + \cdots + \Delta x^{n-2} \right).$$

Lassen wir nun den absoluten Betrag von Δx bis zu beliebiger Kleinheit abnehmen, so wird auch rechts das zweite Glied unter jede beliebige noch so kleine Grösse sinken, und wenn wir ein unendlich kleines Δx mit dx, das entsprechende Δy mit dy bezeichnen, so gilt die Gleichung

(3.) $$\frac{dy}{dx} = n x^{n-1}.$$

Der Quotient $\frac{dy}{dx}$, für den man auch, wenn $y = \varphi(x)$ gesetzt wird, $\varphi'(x)$ schreibt, heisst der *Differentialquotient* oder die *Derivirte (Abgeleitete)* von $\varphi(x)$ für den Punkt x. Für die ganze Function $y = f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ finden wir, indem wir jedes Glied in obiger Weise behandeln*):

(4.) $$\frac{dy}{dx} = f'(x) = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots + 2 a_{n-2} x + a_{n-1}.$$

*) Unmittelbar ist ersichtlich, dass der Differentialquotient der Summe mehrerer Functionen gleich der Summe der Differentialquotienten der einzelnen Functionen ist. Ferner: der Differentialquotient einer Constanten ist Null; es ist $\frac{d(af(x))}{dx} = a \frac{df(x)}{dx}$.

Dieser Differentialquotient stellt sich somit als eine ganze Function $(n-1)$ten Grades von x dar, ist also für jedes endliche x endlich. Eine unendlich kleine Änderung von x führt daher, wenn x endlich ist, auch nur eine unendlich kleine Änderung von y mit sich. Denken wir uns die Variable x in einer Ebene, y in einer andern dargestellt, und lassen wir x eine zusammenhängende Linie beschreiben, so beschreibt y eine ebensolche; nirgends macht $f(x)$ bei continuirlicher Änderung von x einen endlichen Sprung (vgl. § 3). Besonders ist noch hervorzuheben, dass $\frac{dy}{dx}$ ganz unabhängig von den speciellen Werthen von dx ist, mag dx reell oder complex sein. Wir nennen nun eine Function innerhalb eines gewissen Bereiches der Grösse x eine *stetige* Function, wenn sie in diesem Bereiche nirgends unendlich oder unbestimmt wird und zugleich der letzten Bedingung, dass $\frac{dy}{dx}$ von dx unabhängig ist, genügt. Die ganze Function ist also überall stetig, den Punkt $x=\infty$ ausgenommen.

4. Bilden wir von $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ wieder den Differentialquotienten, der mit $\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)$ bezeichnet wird, und fahren in dieser Weise fort, so finden wir, dass diese sog. *höheren Differentialquotienten* von $f(x)$ ganze Functionen (der $k$te vom $(n-k)$ten Grad) von x sind; der $n$te ist eine Constante, alle höheren sind gleich Null.

§ 13.

Die symmetrischen Functionen der Wurzeln einer ganzen Function.

1. Die doppelte Darstellung der ganzen Function als Summe und als Product, bei der einmal die Coefficienten a_k, das andere Mal die Wurzeln α_k als Constanten auftreten, legt die Frage nahe: *Welche Relationen bestehen zwischen diesen beiden Reihen von Grössen?* Mit der umfassenden Beantwortung dieser Frage beschäftigt sich die *Algebra*, deren Ausdehnung eine zu grosse ist, als dass wir sie vollständig in den Bereich unserer Betrachtungen ziehen könnten; doch

scheint es uns unerlässlich, einige der einfachsten algebraischen Sätze, die wir in der Folge öfters benutzen werden, hier zusammenzustellen.

Setzen wir $a_0 = 1$, so folgt aus der Identität

$$(1.)\quad f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)$$

durch Ausmultipliciren und Coefficientenvergleichung*):

$$(2.)\quad \begin{cases} -a_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \Sigma\alpha_1, \\ a_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \Sigma\alpha_1\alpha_2, \\ -a_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \cdots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = \Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \\ \quad\vdots \\ (-1)^n a_n = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n. \end{cases}$$

Die Summationen haben sich hierbei über alle möglichen Combinationen von je einem, je zwei, je drei u. s. w. der α_k zu erstrecken. Nennen wir nun eine Function mehrerer Variabeln *symmetrisch*, wenn sie bei einer beliebigen Vertauschung der Variabeln untereinander ungeändert bleibt; nennen wir ferner eine ganze Function mehrerer Variabeln *homogen*, wenn jedes Glied derselben gleich viele variable Factoren enthält, so können wir sagen, dass *die Coefficienten* a_k *der ganzen Function ganze, homogene, symmetrische Functionen der Wurzeln* α_k *sind.*

2. Wir können weiter den fundamentalen Satz beweisen: *Jede rationale, symmetrische Function der sämmtlichen Wurzeln*

*) Zwei ganze Functionen $n$ten Grades mit $a_0 = 1$ sind nämlich identisch, wenn sie in n Werthen von x übereinstimmen; denn lauten diese Functionen

$$\varphi(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \quad \text{und}$$

$$\psi(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n,$$

so müsste

$$\varphi(x) - \psi(x) = (a_1 - b_1) x^{n-1} + (a_2 - b_2) x^{n-2} + \cdots + a_n - b_n$$

für n verschiedene x verschwinden, was, wenn nicht sämmtliche Coefficienten verschwinden, d. h. $a_k = b_k$ ist, nicht sein kann (§ 12, b). Sollen also zwei solche ganze Functionen in n oder mehr oder gar in allen Punkten übereinstimmen, so müssen ihre Coefficienten einzeln gleich sein.

von $f(x)$ lässt sich rational durch die Coefficienten von $f(x)$ ausdrücken.

Beweis: Ist

$$\frac{\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)}{\psi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)}$$

diese Function, so lässt sich leicht bewirken, dass Zähler und Nenner für sich allein betrachtet symmetrisch werden. Nimmt man nämlich in $\psi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \psi$ sämmtliche Permutationen (Vertauschungen) der α_k vor, und bezeichnet die so entstehenden Functionen mit $\psi_1, \psi_2, \cdots \psi_k$, so ist

$$(3.) \qquad \frac{\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)}{\psi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)} = \frac{\varphi \psi_1 \psi_2 \cdots \psi_k}{\psi \psi_1 \psi_2 \cdots \psi_k}.$$

Der Nenner ist in dem Ausdrucke auf der rechten Seite jetzt symmetrisch, und da der ganze Bruch symmetrisch sein soll, so muss es auch der Zähler sein. Es genügt daher, wenn wir uns in der Folge mit *ganzen*, symmetrischen Functionen beschäftigen. Weiter lässt sich noch die Untersuchung auf *homogene* symmetrische Functionen, deren Glieder alle nach demselben Typus gebildet sind, beschränken, da, wenn der ganze Ausdruck aus mehreren solchen Theilen zusammengesetzt ist, diese einzeln durch die Permutationen der α_k in sich selbst übergehen. So kann man z. B. $\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2$ in die Theile $\alpha_1^2\alpha_2^2$, $\alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2$ zerfällen, die sämmtlich in α_1 und α_2 symmetrisch sind.

Bevor wir auf die allgemeine Darstellung dieser elementarsten symmetrischen Functionen durch die Coefficienten eingehen, wollen wir erst einige der einfachsten Fälle direct erledigen. Es ist

$$(4.) \quad \begin{cases} \Sigma\alpha_1 = -a_1, \\ \Sigma\alpha_1\alpha_2 = a_2, \\ \Sigma\alpha_1^2 = (\Sigma\alpha_1)^2 - 2\Sigma\alpha_1\alpha_2 = a_1^2 - 2a_2, \\ \Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -a_3, \\ \Sigma\alpha_1^2\alpha_2 = \Sigma\alpha_1 \cdot \Sigma\alpha_1\alpha_2 - 3\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -a_1a_2 + 3a_3, \\ \Sigma\alpha_1^3 = (\Sigma\alpha_1)^3 - 3\Sigma\alpha_1^2\alpha_2 - 6\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -a_1^3 - \\ \quad 3(-a_1a_2 + 3a_3) + 6a_3 = -a_1^3 + 3a_1a_2 - 3a_3 \end{cases}$$

u. s. w.

Um nun zu zeigen, dass eine derartige Umrechnung in allen Fällen möglich ist, wählen wir im Wesentlichen die Methode von *Newton*, die allerdings nicht gerade direct, und für die praktische Ausführung oft beschwerlich ist, die aber die grösste Übersichtlichkeit bietet; in der Praxis kann man ähnlich verfahren, wie bei den gegebenen Beispielen, oder auch nach anderen Methoden, die man in Lehrbüchern der Algebra findet. Die Newton'sche Methode läuft darauf hinaus, alle symmetrischen Functionen auf die sog. *Potenzsummen* zurückzuführen, die die Form

$$s_k = \Sigma \alpha_1^k = \alpha_1^k + \alpha_2^k + \cdots + \alpha_n^k$$

haben. Um die Möglichkeit dieser Umformung darzuthun, genügt es die einfachsten Fälle zu behandeln. Es ist $\Sigma \alpha_1^m \alpha_2^r = s_m s_r - s_{m+r}$, wie sich unmittelbar verificiren lässt. Ist $m = r$, so gilt diese Formel nicht mehr, da die Summe sich dann auf die Hälfte der Glieder reducirt, so dass wir finden

$$\Sigma \alpha_1^m \alpha_2^m = \tfrac{1}{2}(s_m^2 - s_{2m}).$$

Um ferner $\Sigma \alpha_1^m \alpha_2^r \alpha_3^u$ herzustellen, multipliciren wir $\Sigma \alpha_1^m \alpha_2^r$ mit s_u und finden

$$\Sigma \alpha_1^m \alpha_2^r \cdot s_u = \Sigma \alpha_1^m \alpha_2^r \alpha_3^u + \Sigma \alpha_1^{m+u} \alpha_2^r + \Sigma \alpha_1^m \alpha_2^{r+u},$$

also

$$\Sigma \alpha_1^m \alpha_2^r \alpha_3^u = \Sigma \alpha_1^m \alpha_2^r \cdot s_u - \Sigma \alpha_1^{m+u} \alpha_2^r - \Sigma \alpha_1^m \alpha_2^{r+u},$$

wodurch dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt wird. Die besonderen Fälle, in denen mehrere der Exponenten gleich sind, machen auch keine besondere Schwierigkeit. Man übersieht leicht, dass man in dieser Weise fortfahrend sämmtliche ganzen symmetrischen Functionen der Wurzeln durch Potenzsummen ausdrücken kann.

Um nun die letzteren durch die Coefficienten der ganzen Function darzustellen, betrachten wir die Identität

$$(5.)\quad (x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n) + (x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n) + \cdots + (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{n-1}) = \frac{f(x)}{x-\alpha_1} + \frac{f(x)}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{f(x)}{x-\alpha_n}.$$

Multipliciren wir den links stehenden Ausdruck aus, so erhalten wir eine ganze Function $(n-1)$ten Grades von x,

deren Coefficienten symmetrisch in den α_k sind. Diese Coefficienten haben aber weiter die Eigenthümlichkeit, dass keines ihrer Glieder ein α_k in einer höheren Potenz als in der ersten erhält, und dass die Dimension des Coefficienten von x^k in α_k die $(n-k-1)$te ist, d. h. dieser Coefficient ist nichts Anderes wie a_{n-k-1}, multiplicirt mit einer ganzen Zahl*); für diese letztere findet man durch einfaches Abzählen der Wiederholungen eines Gliedes $k+1$. — Auf der rechten Seite können wir die angedeutete Division bei jedem Gliede mechanisch ausführen, wodurch wir finden

$$(6.)\quad \frac{f(x)}{x-\alpha_k} = x^{n-1} + (\alpha_k + a_1)x^{n-2} + (\alpha_k^2 + a_1\alpha_k + a_2)x^{n-3} + \cdots$$

Bilden wir die Summe aller dieser Ausdrücke und setzen $\Sigma\alpha_k^r = s_r$, so erhalten wir

$$(7.)\quad n x^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-2} + (n-2)a_2 x^{n-3} + a_{n-1}$$
$$= n x^{n-1} + (s_1 + n a_1)x^{n-2} + (s_2 + a_1 s_1 + n a_2)x^{n-3} + \cdots$$

und durch Coefficientenvergleichung

$$s_1 + a_1 = (n-1)a_1,$$
$$s_2 + a_1 s_1 + a_2 = (n-2)a_2 \quad \text{u. s. w.},$$

woraus wir die Grössen $s_1, s_2, \cdots s_{n-1}$ leicht nach einander (und zwar ganzzahlig) berechnen können. Wir finden

$$(8.)\quad \begin{cases} s_1 = -a_1, \\ s_2 = a_1^2 - 2a_2, \\ s_3 = -a_1^3 + 3a_1 a_2 - 3a_3 \quad \text{u. s. w.}, \end{cases}$$

Um auch die höheren Potenzsummen zu finden, summiren wir die n Gleichungen $(k = 1, 2, \cdots n)$

$$(9.)\quad \alpha_k^n + a_1\alpha_k^{n-1} + a_2\alpha_k^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\alpha_k + a_n = 0$$

und erhalten

$$(10.)\quad s_n + a_1 s_{n-1} + a_2 s_{n-2} + \cdots + n a_n = 0,$$

so dass sich s_n aus den niederen Potenzsummen berechnen

*) Die Betrachtung kann durch die Bemerkung erleichtert werden, dass die fragliche linke Seite von (5.) nach einem später herzuleitenden Gesetze die *Derivirte* von $f(x)$ ist, also den Werth

$f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-2} + (n-2)a_2 x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}$ hat.

lässt. Multiplicirt man ferner die Gleichungen (9.) mit α_k, α_k^2, α_k^3 u. s. w. und addirt jedesmal, so findet man

$$(11.) \quad \begin{aligned} s_{n+1} + a_1 s_n + a_2 s_{n-1} + \cdot\cdot + a_n s_1 &= 0, \\ s_{n+2} + a_1 s_{n+1} + a_2 s_n + \cdot\cdot + a_n s_2 &= 0, \text{ u. s. w.,} \end{aligned}$$

woraus sich s_{n+1}, s_{n+2} u. s. w. der Reihe nach berechnen lassen. — Die ausgesprochne Behauptung ist hiermit bewiesen.

§ 14.

Die binomischen Gleichungen.

1. Von besonderer Wichtigkeit ist die Aufsuchung der Wurzeln der ganzen Function $f(x) = x^n - a$ oder, was dasselbe ist, die Auflösung der Gleichung $x^n = a$; man nennt diese Gleichung eine *binomische.* Zunächst behandeln wir den einfachsten Fall

$$(1.) \qquad x^n = 1$$

oder $x = \sqrt[n]{1}$, also die Aufsuchung der sog. *Einheitswurzeln.* Eine Wurzel von (1.) ist $x = 1$, bei geraden n auch $x = -1$; die übrigen Wurzeln sind immer complexe Zahlen. Ist α eine $n$te Einheitswurzel, so sind auch ihre sämmtlichen Potenzen α^k solche; denn es ist

$$(\alpha^k)^n = \alpha^{kn} = (\alpha^n)^k = 1.$$

Bildet man die Reihe

$$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \cdot\cdot\cdot\cdot \alpha^{n-1}, \alpha^n = 1,$$

(bei weiterer Fortsetzung kommt man wieder auf dieselben Grössen), so kann α^n die erste dieser Potenzen sein, die der Einheit gleich ist; alsdann heisst α eine *primitive* Einheitswurzel. Wenn andrerseits sich bereits vorher ein $\alpha^k = 1$ findet, so ist α auch eine Wurzel der Gleichung $x^k = 1$. Ist α^k die *niedrigste* Potenz von α, die der Einheit gleich wird, so muss k ein Theiler von n sein, wie einfache Betrachtungen zeigen, die wir dem Leser überlassen. Dass primitive Einheitswurzeln für jedes n existiren, wird sich weiter unten zeigen.

2. Um die Einheitswurzeln wirklich zu finden, kann man zunächst algebraische Methoden anwenden, die wir jedoch nur für die einfachsten Fälle durchführen wollen. Ist n

ungerade, so dividiren wir $x^n - 1$ durch $x - 1$, ist n gerade, durch $x^2 - 1$ (abgesehen von weiteren Factorenabsonderungen, die bei zusammengesetzten n möglich sind) und erhalten

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0,$$

resp.

$$x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + x^2 + 1 = 0.$$

Beide Gleichungen sind von paarem Grade und symmetrisch, d. h. sie bleiben ungeändert, wenn man x durch $\frac{1}{x}$ ersetzt und die Nenner beseitigt. Der Grad solcher Gleichungen lässt sich mit Hülfe der Substitution $y = x + \frac{1}{x}$ auf die Hälfte reduciren, wie die Durchrechnung der Beispiele d. und e. zeigen wird.

Wir führen die Rechnung für einige Fälle aus.

a. $x^2 = 1$; Wurzeln: $x = \pm 1$ (dieselben werden im Folgenden nicht mehr angegeben).

b. $x^3 = 1$, woraus $x^2 + x + 1 = 0$; Wurzeln:

$$x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

c. $x^4 = 1$, woraus $x^2 + 1 = 0$; Wurzeln: $x = \pm i$.

d. $x^5 = 1$, woraus $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ oder nach Division durch x^2: $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0$; hierin setzen wir $x + \frac{1}{x} = y$, also $y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ oder $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ und erhalten $y^2 + y - 1 = 0, y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$,

also $$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}}{4},$$

worin nur das erste und dritte Doppelzeichen correspondiren.

e. $x^6 = 1$, also $x^4 + x^2 + 1 = 0$ oder $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 = 0$, oder, wenn $x + \frac{1}{x} = y$ gesetzt wird, $y^2 - 1 = 0$, $y = \pm 1$ und somit $x = \frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, worin die Doppelzeichen nicht correspondiren.

3. Einfacher und übersichtlicher ist die geometrisch-

trigonometrische Bestimmung der $n$ten Einheitswurzeln. Denken wir uns in der Ebene der complexen Zahlen mit dem Radius 1 und dem Nullpunkt als Mittelpunkt einen Kreis beschrieben und denselben vom Punkte $+1$ aus in n gleiche Theile getheilt, so repräsentiren die n Theilpunkte die sämmtlichen n ten Einheitswurzeln (s. Fig. 4). Dies geht ohne Weiteres aus dem geometrischen Multiplicationsgesetz oder aus dem Moivre'schen Lehrsatz hervor. Jene

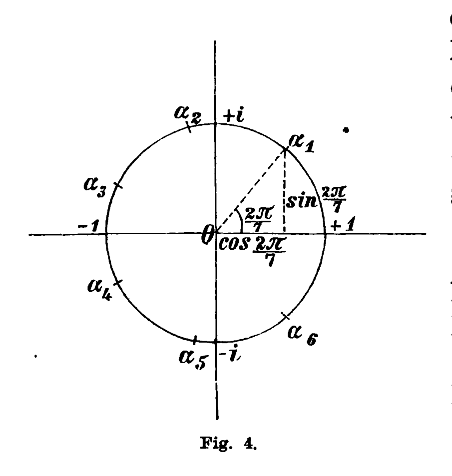


Fig. 4.

Punkte sind nämlich die geometrische Darstellung der Werthe

$$\alpha_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

$k = 0, 1, 2, \cdots n-1$; würde man k noch andere ganzzahlige Werthe beilegen, so würde der Ausdruck wieder die nämlichen Werthe annehmen. Nun ist

$$\alpha_k^n = \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^n = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1.$$

Da die aufgestellten n Punkte alle von einander verschieden sind, so repräsentiren sie *alle* n Lösungen von $x^n = 1$.

Alle Einheitswurzeln haben den absoluten Werth 1.

4. Wenn k zu n relativ prim ist, so ist α_k eine *primitive* $n$te Einheitswurzel; denn wäre für $r < n$ $\alpha_k^r = \cos\frac{2kr\pi}{n} + i\sin\frac{2kr\pi}{n} = 1$, so müsste $\frac{kr}{n}$ eine ganze Zahl, also r durch n theilbar sein, da es mit k keinen gemeinsamen Factor hat; wegen $r < n$ ist dies unmöglich. Ist dagegen k zu n nicht relativ prim, so lässt sich ein solches r bestimmen. Hieraus folgt das Resultat:

Es giebt so viele primitive nte Einheitswurzeln, als es Zahlen unterhalb n giebt, die zu diesem relativ prim sind.

Ist n eine Primzahl, so sind sämmtliche Wurzeln ausser $x = 1$ primitiv.

Sämmtliche $n$ten Einheitswurzeln lassen sich als Potenzen einer beliebigen primitiven darstellen.

5. Da in der Gleichung $x^n - 1 = 0$ sämmtliche Coefficienten ausser dem letzten der Null gleich sind, so folgt, dass

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0,$$
$$\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1} \alpha_n = 0$$
u. s. w.
$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_n = (-1)^{n-1} \text{ ist.}$$

Die $(n-1)$ten Potenzsummen sind ebenfalls gleich Null, wie dies unmittelbar aus den Formeln des vorigen Paragraphen hervorgeht; die $n$te ist gleich n. Die folgenden geben wieder Null, ausser denjenigen, deren Ordnung n als Theiler enthält und die n gleich sind*).

6. Die Lösungen der Gleichung $x^n = a$ haben wir *alle* gefunden, sobald wir *eine* derselben kennen; wir brauchen diese nämlich nur mit den $n$ten Einheitswurzeln zu multipliciren, um alle zu erhalten. Ist a eine reelle, positive Zahl, so lässt sich der reelle Werth von $\sqrt[n]{a}$ mechanisch oder mit Hülfe der Logarithmentafeln ermitteln; ist dies nicht der Fall, so setzen wir $a = m + ni = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, wobei sich r und φ durch die Gleichungen

$$m = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad n = r\sin\varphi$$

oder

$$r = \sqrt{m^2 + n^2} \quad \text{und} \quad \cos\varphi = \frac{m}{r} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

---

*) Man kann dieses Resultat auch direct in folgender Weise herleiten. Denken wir uns alle Wurzeln als Potenzen einer primitiven α dargestellt, so ist

$$s_k = 1 + \alpha^k + \alpha^{2k} + \alpha^{3k} + \cdots + \alpha^{(n-1)k}$$
$$= \frac{1 - \alpha^{nk}}{1 - \alpha^k} = \frac{1 - 1}{1 - \alpha^k} = 0.$$

Nur wenn $k = r^n$ ist, verschwindet auch der Nenner; dann ist $\alpha^{sk} = 1$, somit $s_{rn} = n$.

bestimmen; die n Wurzeln erhalten wir dann in der Form

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$
$$k = 0, 1, 2, \cdots (n-1),$$

worin für $\sqrt[n]{r}$ der reelle, berechenbare Werth gewählt werden kann. Die Richtigkeit des Resultats bewahrheitet sich beim Erheben des Ausdrucks in die $n$te Potenz. Die Verschiedenheit der n Werthe des Ausdrucks lässt sich leicht aus dem Vorhergehenden erkennen.

§ 15.

Die Abel'schen Gleichungen.

1. Als die Hauptaufgabe der Algebra muss bezeichnet werden: Die Wurzeln einer Gleichung

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

durch möglichst einfache Operationen aus den Coefficienten zu berechnen. Als einfach durchführbare Operationen pflegt man ausser den vier Species auch noch das Wurzelausziehen, d. h. die Lösung binomischer Gleichungen anzusehen. Ohne besondere Schwierigkeit gelingt es, mit diesen Hülfsmitteln die Wurzeln der allgemeinen Gleichungen bis zum vierten Grad zu berechnen; dagegen hat Abel dargethan, dass Gleichungen vom fünften oder von höherem Grade im Allgemeinen, d. h. wenn zwischen ihren Coefficienten keine besonderen Beziehungen existiren, durch diese Operationen nicht auflösbar sind. Solche Gleichungen definiren eben höhere algebraische Operationen, die sich nach mancherlei mechanischen Methoden ausführen lassen. Es bietet sich uns nun die wichtige Frage dar: *Bei welchen speciellen Classen höherer Gleichungen ist die Auflösung mit Hülfe von Wurzelausziehungen und den vier Species möglich?* Diese Frage ist noch keineswegs vollständig beantwortet; doch hat bereits Abel eine Classe von Gleichungen charakterisirt, die die verlangte Eigenschaft besitzen; mit Recht hat Herr Kronecker diesen Gleichungen den Namen *„Abel'sche Gleichungen"* bei-

gelegt*). Ohne uns mit den übrigen angedeuteten algebraischen Fragen hier weiter zu befassen, wollen wir doch auf das Wesentlichste der Theorie der Abel'schen Gleichungen eingehen, da gerade sie für unsere Darstellung der Theorie der periodischen Functionen von fundamentaler Bedeutung sind.

2. Wir wollen im Folgenden mit $\vartheta_1(x)$ eine *eindeutige* Function bezeichnen, ferner $\vartheta_2(x) = \vartheta_1(\vartheta_1(x))$, $\vartheta_3(x) = \vartheta_1(\vartheta_1(\vartheta_1(x)))$ u. s. w. setzen und diese Functionen die erste, zweite u. s. w. *Iterirung* von $\vartheta_1(x)$ nennen. Dann gilt der folgende Satz:

Besitzt eine Gleichung

$$f(x) = x^{mn} + a_1 x^{mn-1} + \cdots + a_{mn} = 0 \tag{1.}$$

vom mnten Grad die folgenden Reihen von Lösungen

$$\begin{cases} x_1, \vartheta_1(x_1), \vartheta_2(x_1), \cdots \vartheta_{n-1}(x_1); \\ x_2, \vartheta_1(x_2), \vartheta_2(x_2), \cdots \vartheta_{n-1}(x_2); \\ \vdots \\ x_m, \vartheta_1(x_m), \vartheta_2(x_m), \cdots \vartheta_{n-1}(x_m) \end{cases} \tag{2.}$$

und genügt die eindeutige Function $\vartheta_1(x)$ *den Bedingungen*

$$\vartheta_n(x_k) = x_k, \tag{3.}$$

so lassen sich die Lösungen (2.) *aus den Coefficienten mittelst der vier Species, mittelst n ter Wurzeln und n Gleichungen m ten Grades berechnen***).

---

*) Die Abel'schen algebraischen Untersuchungen sind hauptsächlich in den beiden Abhandlungen: Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième dégré und Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement, Oeuvres complètes, 1881, Vol. I., pag. 66 und pag. 478 enthalten.

**) Wir könnten auch noch mit Abel nachweisen, dass, wenn x_1 und $\vartheta_1(x_1)$ Lösungen einer *irreductibeln* Gleichung sind, d. h. einer Gleichung, die sich nicht in mehrere zerlegen lässt, die in den Coefficienten keine anderen Irrationalitäten wie die von $f(x)$ haben, auch $\vartheta_2(x_1)$, $\vartheta_3(x_1)$, $\cdots \vartheta_{n-1}(x_1)$ Lösungen sein müssen; dass ferner, wenn x_k eine weitere Lösung von $f(x) = 0$ bezeichnet, die $\vartheta_r(x_k)$ Lösungen sind. Doch ist es für unseren Zweck überflüssig, auf diese Untersuchungen einzugehen, die eine weitere Beschäftigung mit dem schwierigen Begriff der Irreductibilität erfordern.

Die im Lehrsatze auftretenden n Gleichungen m ten Grades lassen sich auf eine einzige reduciren.

4

Beweis: Wir bezeichnen mit $1, \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{n-1}$ die $n$ten Einheitswurzeln und bilden die folgenden Ausdrücke:

$$(3.)\begin{cases} x_r + \vartheta_1(x_r) + \vartheta_2(x_r) + \cdots + \vartheta_{n-1}(x_r) = F_0(x_r), \\ x_r + \alpha_1\vartheta_1(x_r) + \alpha_1^2\vartheta_2(x_r) + \cdots + \alpha_1^{n-1}\vartheta_{n-1}(x_r) = F_1(x_r), \\ x_r + \alpha_2\vartheta_1(x_r) + \alpha_2^2\vartheta_2(x_r) + \cdots + \alpha_2^{n-1}\vartheta_{n-1}(x_r) = F_2(x_r), \\ \vdots \\ x_r + \alpha_{n-1}\vartheta_1(x_r) + \alpha_{n-1}^2\vartheta_2(x_r) + \cdots + \alpha_{n-1}^{n-1}\vartheta_{n-1}(x_r) \\ \qquad = F_{n-1}(x_r). \end{cases}$$

Ersetzt man in $F_k(x_r)$ das Argument x_r durch $\vartheta_1(x_r)$, so geht dieser Ausdruck in

$$\vartheta_1(x_r) + \alpha_k\vartheta_2(x_r) + \alpha_k^2\vartheta_3(x_r) + \cdots + \alpha_k^{n-1}x_r,$$

also in

$$\alpha_k^{n-1}F_k(x_r) = \frac{1}{\alpha_k}F_k(x_r)$$

über, da

$$\frac{1}{\alpha_k} = \frac{\alpha_k^n}{\alpha_k\alpha_k^n} = \frac{\alpha_k^{n-1}}{\alpha_k^n} = \alpha_k^{n-1}$$

ist. Die Grösse $F_k^n(x_r)$ bleibt daher ungeändert, wenn man x_r durch $\vartheta_1(x_r), \vartheta_2(x_r), \cdots \vartheta_{n-1}(x_r)$ ersetzt. Da also

$$F_k^n(x_r) = F_k^n(\vartheta_1(x_r)) = F_k^n(\vartheta_2(x_r)) = \cdots = F_k^n(\vartheta_{n-1}(x_r))$$

ist, so können wir

$$(4.)\quad F_k^n(x_r) = \frac{1}{n}[F_k^n(x_r) + F_k^n(\vartheta_1(x_r), + F_k^n(\vartheta_2(x_r)) \\ + \cdots + F_k^n(\vartheta_{n-1}(x_r))]$$

setzen, woraus ersichtlich ist, dass $F_k^n(x_r)$ eine eindeutige symmetrische Function von $x_r, \vartheta_1(x_r), \vartheta_2(x_r) \cdots \vartheta_{n-1}(x_r)$ und somit jede eindeutige symmetrische Function von $F_k^n(x_1)$, $F_k^n(x_2), \cdots F_k^n(x_m)$ auch eine eindeutige symmetrische Function der Grössen (2.) ist. Nach § 13 folgt hieraus sofort weiter, dass sich jede eindeutige symmetrische Function von $F_k^n(x_1)$, $F_k^n(x_2), \cdots F_k^n(x_m)$ rational durch die Coefficienten der Gleichung $f(x) = 0$ darstellen lässt.

Bilden wir nun eine Gleichung

$$(5.)\quad [X - F_k^n(x_1)]\,[X - F_k^n(x_2)] \cdots [X - F_k^n(x_m)] = 0,$$

deren Lösungen die Grössen $F_k^n(x_1), F_k^n(x_2), \cdots F_k^n(x_m)$ sind,

so lassen sich ihre Coefficienten (nach vorhergegangener Ausmultiplicirung) rational durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ ausdrücken, sind also als bekannte Grössen anzusehen. Legen wir nun k seine Werthe 0, 1, 2, ... $n - 1$ bei, so lassen sich sämmtliche Grössen $F_k^n(x_r)$ mit Hülfe von n Gleichungen $m$ten Grades (5.) aus den Coefficienten der vorgelegten Gleichung $f(x) = 0$ berechnen. Durch Ausziehen der $n$ten Wurzeln finden wir dann weiter die Grössen auf der rechten Seite der Gleichungen (3.).

Addiren wir jetzt die Gleichungen (3.), nachdem wir sie vorher successive mit

$$\begin{array}{l} 1,\ 1, \cdots\cdots\cdots\cdots 1, \\ 1,\ \alpha_1^{n-1},\ \alpha_2^{n-1}, \cdots \alpha_{n-1}^{n-1}, \\ 1,\ \alpha_1^{n-2},\ \alpha_2^{n-2}, \cdots \alpha_{n-1}^{n-2}, \\ \quad\vdots \\ 1,\ \alpha_1,\ \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_{n-1} \end{array}$$

multiplicirt haben, so heben sich nach § 14, 5 sämmtliche Verticalreihen bis auf je eine weg, und wir erhalten, wenn wir noch durch n dividiren:

$$(6.)\quad \begin{cases} X_r = \dfrac{\sqrt[n]{F_0^n(x_r)} + \sqrt[n]{F_1^n(x_r)} + \sqrt[n]{F_{n-1}^n(x_r)}}{n}, \\[2ex] \vartheta_k(x_r) = \dfrac{\sqrt[n]{F_0^n(x_r)} + \alpha_1^k \sqrt[n]{F_1^n(x_r)} + \alpha_2^k \sqrt[n]{F_2^n(x_r)} + \cdots}{n} \\[2ex] \qquad\qquad \dfrac{+\, \alpha_{n-1}^k \sqrt[n]{F_{n-1}^n(x_r)}}{n}. \end{cases}$$

Diese Darstellung bedarf insofern noch einer Ergänzung, als die $\sqrt[n]{F_k^n(x_r)}$ sämmtlich n-deutig sind, und die Ausdrücke (6.) in Folge dessen mehr Werthe darstellen, als Lösungen von (1.) vorhanden sind. Es dürfen daher in (6.) diese Wurzeln keineswegs sämmtlich beliebig gewählt werden, sondern immer nur eine, durch die dann die übrigen eindeutig bestimmt sind. Wir führen die nähere Bestimmung dieser Wurzeln indessen nur für den einfachsten und wichtigsten Fall durch, nämlich für $m = 1$. Dann kommt die

Gleichung $m$ten Grades ganz in Wegfall, die $F_k^n(x_1)$ sind symmetrische Functionen der Lösungen x_1, $\vartheta_1(x_1)$, $\vartheta_2(x_1)$, $\cdots \vartheta_{n-1}(x_1)$ von $f(x) = 0$, also durch die Coefficienten dieser Gleichung rational ausdrückbar; $F_0(x_1)$ ist der negative erste Coefficient, $-a_1$. Wir denken uns nun sämmtliche $n$ten Einheitswurzeln α_k als Potenzen *einer* primitiven Wurzel α dargestellt, so dass etwa $\alpha_k = \alpha^k$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned} &F_k(x_1)F_1(x_1)^{n-k} = [x_1 + \alpha^k\vartheta_1(x_1) + \alpha^{2k}\vartheta_2(x_1) + \cdots \\ (7.)\quad &+ \alpha^{(n-1)k}\vartheta_{n-1}(x_1)]\,[x_1 + \alpha\vartheta_1(x_1) + \alpha^2\vartheta_2(x_1) + \cdots \\ &+ \alpha^{n-1}\vartheta_{n-1}(x_1)]^{n-k} = A_k(x_1) \end{aligned}$$

eine Function von x_1, die ungeändert bleibt, wenn man x_1 durch $\vartheta_1(x_1)$, $\vartheta_2(x_1)$ u. s. w. ersetzt; denn in Folge der ersten Substitution sondert $F_k(x_1)$ den Factor $\frac{1}{\alpha^k}$, $F_1(x)^{n-k}$ aber den Factor $\frac{1}{\alpha^{n-k}} = \frac{\alpha^k}{\alpha^n} = \alpha^k$ ab. Ganz wie oben schliessen wir hieraus, dass sich die A_k als eindeutige symmetrische Functionen von x_1, $\vartheta_1(x_1)$, $\vartheta_2(x_1)$, $\cdots \vartheta_{n-1}(x_1)$, mithin auch als rationale Functionen der Coefficienten von $f(x) = 0$ darstellen lassen. Wir haben dann

$$(8.)\qquad F_k(x_1) = \frac{A_k(x_1)}{F_1{}^n(x_1)}\left(\sqrt[n]{F_1{}^n(x_1)}\right)^k,\quad F_0(x_1) = -a_1$$

und daher, wenn wir $x_1 = x_1$, $\vartheta_{k-1}(x_1) = x_k$ setzen:

$$(9.)\qquad x_k = \frac{-a_1 + \sqrt[n]{F_1{}^n(x_1)} + \frac{A_2(x_1)}{F_1{}^n(x_1)}\left(\sqrt[n]{F_1{}^n(x_1)}\right)^2 + \frac{A_3(x_1)}{F_1{}^n(x_1)}\left(\sqrt[n]{F_1{}^n(x_1)}\right)^3 + \cdots}{n};$$

hierin ist für $\sqrt[n]{F_1{}^n(x_1)}$ bei seinem jedesmaligen Vorkommen immer derselbe Werth zu setzen. Der Ausdruck ist n-deutig und liefert, wie der Vergleich mit (6.) zeigt, gerade die n Wurzeln von (1.).

3. Abel hat noch eine weitere Klasse von Gleichungen untersucht, bei denen sich sämmtliche Lösungen durch Iterirung und Combination zweier eindeutigen Functionen $\vartheta_1(x)$

und $\Theta_1(x)$, welche die Bedingungen

(10.) $$\vartheta_n(x_r) = x_r \quad \text{und} \quad \Theta_m(x_r) = x_r,$$

so wie auch die weitere

(11.) $$\vartheta_1\big(\Theta_1(x_r)\big) = \Theta_1\big(\vartheta_1(x_r)\big)$$

befriedigen, aus einer einzigen herleiten lassen. Auch hier ist die Lösung durch Wurzelausziehungen möglich. Wir können indessen diese complicirte Untersuchung übergehen, da wir später eine ganz analoge durchzuführen haben. (Vgl. § 63.) — Nach diesem Excurs über algebraische Gleichungen kehren wir wieder zu rein functionaltheoretischen Untersuchungen zurück.

§ 16.

Die rationalen Functionen.

1. Den Quotienten zweier ganzen Functionen nennt man, wie schon gesagt, eine *rationale* Function:

(1.) $$y = f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n}.$$

Eine zweite Form der rationalen Function erhält man durch Zerlegung des Zählers und Nenners in lineare Factoren. $f(x)$ heisse vom m^{ten} oder n^{ten} Grad, jenachdem m oder n grösser (oder gleich dem andern) ist.



2. Jede rationale Function k^{ten} Grades nimmt jeden endlichen, von Null verschiedenen Werth c $k$mal an (mit derselben Einschränkung wie bei den ganzen Functionen); denn man braucht in $c = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ nur den Nenner wegzumultipliciren, um eine Gleichung k^{ten} Grades zu erhalten.

3. $f(x)$ wird Null für die m Nullwerthe des Zählers (bei gleichen Wurzeln von höherem Grade) und ausserdem $(n - m)$fach für $x = \infty$, falls $n > m$ ist; wir können daher sagen, dass $f(x)$ auch den Werth Null $k$mal annimmt. Unendlich wird $f(x)$ für die n Nullwerthe des Nenners und ausserdem $(m - n)$fach für $x = \infty$, wenn $n < m$ ist, sodass wir auch k Unendlichkeitspunkte haben. Ist $m = n$, so bleibt $f(x)$ für $x = \infty$ endlich.



4. Haben Zähler und Nenner einen gemeinsamen Factor $x - \alpha$, so ist für alle x, $x = \alpha$ ausgenommen, der Werth von $f(x)$ derselbe, wie wenn $x - \alpha$ herausgehoben wäre; dagegen wird $f(\alpha) = \frac{0}{0}$, d. h. unbestimmt, da jede Zahl mit Null multiplicirt Null giebt. Die Unterbrechung der Stetigkeit, welche $f(x)$ im Punkte $x = \alpha$ erleidet, kann als eine *hebbare* bezeichnet werden, da sie weggfällt, wenn man $f(x)$ durch $F(x)$ ersetzt, in dem $x - \alpha$ herausgehoben ist und das sonst für alle x mit $f(x)$ identisch ist. Mit solchen hebbaren Unstetigkeiten brauchen wir uns nicht weiter zu beschäftigen.

5. Um den Differentialquotienten einer rationalen Function bilden zu können, leiten wir vorerst einige allgemeinere Regeln über Differentiation ab, die uns auch sonst von Nutzen sind. Die Grenzübergänge kürzen wir hierbei derart ab, dass wir von vornherein Incremente dy und dx einführen, die wir uns beliebig abnehmend denken, und dass wir alle höheren Potenzen derselben gegen niedere weglassen, da dieselben beim Grenzübergang herausfallen.

a. Ist $\psi(x) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x)$. und sind $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ differentiirbare Functionen, d. h. haben $\varphi_1'(x)$ und $\varphi_2'(x)$ (eventuell nur in einem beschränkten Gebiet) einen bestimmten Werth, so haben wir unter Berücksichtigung, dass

$$\varphi_\alpha'(x) = \frac{\varphi_\alpha(x + dx) - \varphi_\alpha(x)}{dx},$$

also $\varphi_\alpha(x + dx) = \varphi_\alpha(x) + \varphi_\alpha'(x)dx$ ist:

$$\psi'(x) = \frac{\psi(x + dx) - \psi(x)}{dx} = \frac{\varphi_1(x + dx)\varphi_2(x + dx) - \varphi_1(x)\varphi_2(x)}{dx}$$

$$= \frac{[\varphi_1(x) + \varphi_1'(x)dx]\,[\varphi_2(x) + \varphi_2'(x)dx] - \varphi_1(x)\varphi_2(x)}{dx}$$

$$= \frac{\varphi_1(x)\varphi_2'(x)dx + \varphi_2(x)\varphi_1'(x)dx + \varphi_1'(x)\varphi_2'(x)dx^2}{dx},$$

oder

$$(2.) \qquad \psi'(x) = \varphi_1(x)\varphi_2'(x) + \varphi_2(x)\varphi_1'(x).$$

b. Ist unter gleichen Bedingungen

$$\psi(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)},$$

so haben wir

$$\psi'(x) = \frac{\psi(x+dx) - \psi(x)}{dx} = \frac{\frac{\varphi_1(x+dx)}{\varphi_2(x+dx)} - \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}}{dx}$$

$$= \frac{\varphi_1(x+dx)\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\varphi_2(x+dx)}{\varphi_2(x)\varphi_2(x+dx)dx}$$

$$= \frac{[\varphi_1(x) + \varphi_1'(x)dx]\varphi_2(x) - \varphi_1(x)[\varphi_2(x) + \varphi_2'(x)dx]}{\varphi_2(x)[\varphi_2(x) + \varphi_2'(x)dx]dx}$$

$$= \frac{\varphi_2(x)\varphi_1'(x) - \varphi_1(x)\varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)[\varphi_2(x) + \varphi_2'(x)dx]},$$

oder, indem wir im Nenner unendlich Kleines gegen Endliches vernachlässigen:

(3.) $$\psi'(x) = \frac{\varphi_2(x)\varphi_1'(x) - \varphi_1(x)\varphi_2'(x)}{\varphi_2^2(x)}.$$

c. Ist wieder unter analogen Bedingungen

$$\psi(x) = \varphi_1[\varphi_2(x)],$$

so haben wir

$$\psi'(x) = \frac{\varphi_1[\varphi_2(x+dx)] - \varphi_1[\varphi_2(x)]}{dx}$$

$$= \frac{\varphi_1[\varphi_2(x) + \varphi_2'(x)dx] - \varphi_1[\varphi_2(x)]}{dx}$$

$$= \frac{\varphi_1[\varphi_2(x)] + \varphi_1'[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x)dx - \varphi_1[\varphi_2(x)]}{dx},$$

oder

(4.) $$\psi'(x) = \varphi_1'[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x).$$

6. Mit Hülfe von (2.) und der früher durchgeführten Differentiation ganzer Functionen (§ 12, (4.)) sind wir nun im Stande, jede rationale Function zu differentiiren; es ist

(5.) $$f'(x) = \frac{f_2(x)f_1'(x) - f_1(x)f_2'(x)}{f_2^2(x)}.$$

Ist speciell $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$, so haben wir

(6.) $$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}.$$

$f'(x)$ ist also wieder eine rationale Function, die in denselben Punkten unendlich wird wie $f(x)$, eventuell $x = \infty$ ausgenommen.

Die rationalen Functionen sind also auch *stetige* Functionen, die Unendlichkeitspunkte ausgenommen.

7. Die rationalen Functionen können noch in einer weiteren Form dargestellt werden, die für sie geradezu charakteristisch ist, nämlich als Summe sog. *Partialbrüche*, zu denen noch eine ganze Function treten kann. Die letztere lässt sich durch Division mit dem Nenner in den Zähler absondern, wenn letzterer von gleichem oder höherem Grade ist wie der erstere; nach dieser Absonderung können wir annehmen, dass in $f(x)$ der Grad des Zählers mindestens um eine Einheit kleiner ist wie der des Nenners. Den letzteren denken wir uns nun in lineare Factoren zerlegt, sodass wir haben

$$(7.) \qquad f(x) = \frac{a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \cdots + a_{m-1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\cdots\left(x-\alpha_n{}^{r_n}\right)},$$

$r_1 + r_2 + \cdots + r_n = m$; ein Theil der a_k kann auch verschwinden.

Dann lässt sich behaupten, dass man

$$(8.) \qquad \begin{aligned} f(x) = & \frac{A_1}{(x-\alpha_1)^{r_1}} + \frac{B_1}{(x-\alpha_1)^{r_1-1}} + \cdots + \frac{E_1}{x-\alpha_1} \\ & + \frac{A_2}{(x-\alpha_2)^{r_2}} + \frac{B_2}{(x-\alpha_2)^{r_2-1}} + \cdots + \frac{E_2}{x-\alpha_2} \\ & + \cdots \\ & + \frac{A_n}{(x-\alpha_n)^{r_n}} + \frac{B_n}{(x-\alpha_n)^{r_n-1}} + \cdots + \frac{E_n}{x-\alpha_n} \end{aligned}$$

setzen kann, worin die $A, B, \ldots E$ noch zu bestimmende Constanten sind. Um die Bestimmung derselben auszuführen, multipliciren wir die Nenner weg und setzen beiderseits die Coefficienten gleich hoher Potenzen einander gleich. Da beide Seiten alsdann bis zum $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade ansteigen, so erhält man m in den $A, B, \ldots E$ lineare Gleichungen, aus denen sich die letzteren, deren Zahl $r_1 + r_1 + \cdots + r_n = m$ beträgt, berechnen lassen.

Beispiel:

$$\frac{x^2 + x - 4}{(x-2)^2(x-3)} = \frac{A_1}{(x-2)^2} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{A_2}{x-3},$$

woraus durch Wegmultipliciren der Nenner wird:

$$\begin{aligned} x^2 + x - 4 = & A_1(x-3) + B_1(x^2 - 5x + 6) \\ & + A_2(x^2 - 4x + 4), \end{aligned}$$

also

$$1 = B_1 + A_2,$$
$$1 = A_1 - 5B_1 - 4A_2,$$
$$-4 = -3A_1 + 6B_1 + 4A_2;$$

hieraus berechnen wir

$$A_1 = -2, \quad B_1 = -7, \quad A_2 = 8.$$

8. Da man bei diesem Verfahren nicht ohne Weiteres übersieht, ob die Bestimmungsgleichungen für die $A, B, \dots E$ auch alle von einander unabhängig sind und keine Widersprüche enthalten, so ist es wünschenswerth, diese Grössen auf directem Wege herzuleiten; doch beschränken wir uns hierbei auf den einfachsten Fall, in dem $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 1$ ist.

Wir setzen

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)}$$
$$= \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}$$

und erhalten durch Wegmultipliciren der Nenner

$$f_1(x) = A_1(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n)$$
$$+ A_2(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n)$$
$$+ \dots + A_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{n-1}).$$

Nehmen wir $x = \alpha_k$, so wird

$$f_1(\alpha_k) = A_k(\alpha_k-\alpha_1)(\alpha_k-\alpha_2)\cdots(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_k-\alpha_{k+1})\cdots(\alpha_k-\alpha_n),$$

also

$$(9.) \quad A_k = \frac{f_1(\alpha_k)}{(\alpha_k-\alpha_1)(\alpha_k-\alpha_2)\cdots(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_k-\alpha_{k+1})\cdots(\alpha_k-\alpha_n)}.$$

Dem Nenner können wir eine einfachere Gestalt geben, wenn wir bedenken, dass durch wiederholte Anwendung des Differentiationsgesetzes für Producte leicht folgt:

$$(10.) \quad f_2'(x) = (x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n) + (x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n) \cdots (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{n-1}),$$

also

$$(11.) \quad f_2'(\alpha_k) = (\alpha_k-\alpha_1)(\alpha_k-\alpha_2)\cdots(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_k-\alpha_{k+1})\cdots(\alpha_k-\alpha_n);$$

es wird

$$A_k = \frac{f_1(\alpha_k)}{f_2'(\alpha_k)}, \tag{12.}$$

also

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1(\alpha_1)}{f_2'(\alpha_1)} \cdot \frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{f_1(\alpha_2)}{f_2'(\alpha_2)} \cdot \frac{1}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{f_1(\alpha_n)}{f_2'(\alpha_n)} \cdot \frac{1}{x-\alpha_n}. \tag{13.}$$

§ 17.

Die algebraischen Functionen.

1. Ganze und rationale Functionen sind nur Specialfälle der *algebraischen* Functionen. Eine algebraische Function $y = f(x)$ ist durch eine Gleichung (den Factor des ersten Gliedes können wir uns wegdividirt denken)

$$F(y, x) = y^n + \varphi_1(x)y^{n-1} + \varphi_2(x)y^{n-2} + \cdots + \varphi_{n-1}(x)y + \varphi_n(x) = 0 \tag{1.}$$

definirt, in der die $\varphi_k(x)$ rationale Functionen bezeichnen. Diese algebraischen Functionen bilden für sich eine vollständig abgeschlossene Gruppe; denn *man gelangt immer wieder zu algebraischen Functionen, wenn man auch für die* $\varphi_k(x)$ in (1.) *algebraische Functionen zulässt.* Um dies zu begründen, beweisen wir einen Hülfssatz über Elimination.

2. Sollen zwei Gleichungen

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_0 = 0, \tag{2.}$$

$$x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_0 = 0 \tag{3.}$$

gleichzeitig, d. h. für denselben Werth von x bestehen, so muss eine gewisse Relation zwischen den Coefficienten dieser Gleichungen vorhanden sein. Wir verzichten darauf, diese Relation in übersichtlicher Form darzustellen, und geben nur ein praktisches Verfahren zu ihrer Herleitung an, welches stets zum Ziele führt. Ist $n \leq m$, so dividiren wir nach den Regeln der Partialdivision mit (3.) in (2.), so weit dies möglich ist, ohne auf gebrochene Potenzen von x zu kommen, und erhalten einen Rest von höchstens dem $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, der offenbar für das (2.) und (3.) gemeinsame x Null sein muss, da der übrige Theil von (2.) den verschwindenden Factor

(3.) enthält und das Ganze Null sein soll. Mit dem erhaltenen Rest dividiren wir wieder in (3.) und erhalten einen neuen, ebenfalls gleich Null zu setzenden Rest, der den $(n-2)^{\text{ten}}$ Grad in x nicht übersteigt. Mit diesem dividiren wir in den ersten Rest u. s. w.; kurz, wir verfahren ganz nach der Methode zur Auffindung eines gemeinsamen Factors. Schliesslich muss entweder die Division aufgehen — dann haben beide Gleichungen einen gemeinsamen, x enthaltenden Factor, und (2.) und (3.) werden durch eine Wurzel dieses Factors gleichzeitig befriedigt, ohne dass eine weitere Bedingung zu erfüllen ist —, oder es bleibt ein Rest, der kein x mehr enthält und der gleich Null gesetzt die gesuchte Bedingungsgleichung liefert. Denken wir uns nun, dass die Coefficienten von (2.) und (3.) weitere Variable $y, z, u, \ldots$ enthalten, so giebt uns jener gleich Null gesetzte Rest das Resultat der Elimination von x aus beiden Gleichungen. Man sieht, dass man durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens aus n höheren Gleichungen mit n Unbekannten nach und nach $(n-1)$ Unbekannte eliminiren kann, ohne eine Gleichung aufzulösen.

Beispiel: Soll x aus

(4.) $$2x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \quad \text{und}$$

(5.) $$x^2 + y^2 = 0$$

eliminirt werden, so dividiren wir mit (5.) in (4.) und erhalten den Rest

(6.) $$xy - y^2 - 1 = 0;$$

dividiren wir mit (6.) in (5.), so finden wir den Rest

$$2y^2 + 2 + \frac{1}{y^2} = 0 \quad \text{oder}$$

(7.) $$2y^4 + 2y^2 + 1 = 0,$$

wodurch das Eliminationsresultat dargestellt ist.

3. Sind nun die Coefficienten a_k einer Gleichung, die die Function y definirt, nämlich

(8.) $$y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \cdots + a_n = 0,$$

irgend welche algebraische Functionen von x, die durch Gleichungen

(9.) $$a_k^{\,m} + \psi_{k,1}(x) a_k^{\,m-1} + \psi_{k,2}(x) a_k^{\,m-2} + \cdots + \psi_{k,m}(x) = 0$$

definirt sind, so braucht man nur aus (8.) und (9.) die Grössen a_k zu eliminiren, um eine Gleichung für y zu erhalten, deren Coefficienten *rationale* Functionen von x sind, die also y als *algebraische* Function von x darstellt. Hiermit ist der in 1. ausgesprochene Satz bewiesen.

Zugleich ist zu bemerken, dass auch die *Umkehrung* von $y = f(x)$, d. h. x durch y als Function ausgedrückt, eine algebraische Function ist, was aus (1.) ohne Weiteres hervorgeht.

4. Eine algebraische Function n^{ten} Grades, d. h. eine durch eine Gleichung n^{ten} Grades (in y) definirte Function, ist eine *n-deutige* Function von x, d. h. zu jedem Werthe von x gehören n im Allgemeinen verschiedene Werthe von y, die nur in einzelnen Punkten theilweise oder ganz zusammenfallen. Letztere nennt man *Verzweigungspunkte.* So hat z. B. $y = \sqrt{x}$ zwei Werthe, die als $+\sqrt{x}$ und $-\sqrt{x}$ unterschieden werden können und die nur für $x = 0$ und $x = \infty$ sich in einen einzigen vereinigen. Mit der allgemeinen Aufsuchung der Verzweigungspunkte wollen wir uns hier nicht beschäftigen.

5. Lehrsatz: *Die durch* (1.) *definirte Function* $y = f(x)$, *d. h. einer ihrer* n *Werthe, wird dann und nur dann unendlich, wenn dies mit einem oder mehreren ihrer Coefficienten der Fall ist.*

Beweis: Seien $y_1, y_2, \dots y_n$ die n Werthe von $y = f(x)$, so ist

$$(10.)\qquad \begin{cases} y_1 + y_2 + \cdots + y_n = -\varphi_1(x), \\ y_1 y_2 + y_1 y_3 + \cdots + y_{n-1} y_n = \varphi_2(x), \\ \quad\vdots \\ y_1 y_2 \cdots y_n = (-1)^n \varphi_n(x). \end{cases}$$

Wird nun $\varphi_k(x)$ unendlich, so wird auch die betreffende symmetrische Function der y, also mindestens *ein* y unendlich. Ist dagegen etwa $y_1 = \infty$, so muss, falls $\varphi_n(x)$ nicht unendlich werden soll, mindestens eins der y, etwa y_n, gleich Null sein; dann wird

$$y_1 y_2 \cdots y_{n-1} = (-1)^{n-1} \varphi_{n-1}(x);$$

soll auch dieser Ausdruck nicht unendlich werden, so muss ein weiteres y, etwa y_{n-1}, $= 0$ sein, und man hat dann

$$y_1 y_2 \cdots y_{n-2} = (-1)^{n-2} \varphi_{n-2}(x);$$

auf diese Weise kann man weiter schliessen, bis man auf ein unendliches $\varphi_k(x)$ kommt; ist nämlich selbst

$$y_2 = y_3 = \cdots = y_n = 0,$$

so folgt doch $y_1 = -\varphi_1(x)$, d. h. mindestens ein $\varphi_k(x)$ ist unendlich. — Den Grad des Unendlichwerdens wollen wir hier nicht bestimmen.

6. Um den Differentialquotienten einer algebraischen Function bilden zu können, suchen wir zuerst eine Function $f(x, y)$ mit zwei Variabeln zu differentiiren. Es ist

$$f(x+dx, y+dy) - f(x, y) = f(x+dx, y+dy) - f(x, y+dy) \\ + f(x, y+dy) - f(x, y),$$

oder, wenn wir unter $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ (mit runden ∂ geschrieben) den sog. partiellen Differentialquotienten nach x verstehen, d. h. denjenigen Differentialquotienten, der entsteht, wenn sich blos x ändert, während y als Constante betrachtet wird,

$$f(x+dx, y+dy) - f(x, y) = \frac{\partial f(x, y+dy)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy,$$

oder, soweit $f(x, y)$ sich stetig ändert für continuirliche Änderungen von x und y:

$$(11.)\quad f(x+dx, y+dy) - f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy,$$

da wir unendlich Kleines gegen Endliches vernachlässigen können.

7. Um nun den Differentialquotienten von $y = f(x)$, welches durch $F(y, x) = 0$ definirt ist, zu finden, betrachten wir zuerst $F(y, x)$ als Function der beiden Variabeln y und x und erhalten

$$F(y+dy, x+dx) - F(y, x) = \frac{\partial F(y, x)}{\partial y} dy + \frac{\partial F(y, x)}{\partial x} dx,$$

und wenn wir jetzt $F(y, x) = 0$, also auch $F(y+dy, x+dx) = 0$ setzen:

$$\frac{\partial F(y, x)}{\partial y} dy + \frac{\partial F(y, x)}{\partial x} dx = 0$$

oder

$$(12.)\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F(y, x)}{\partial x}}{\frac{\partial F(y, x)}{\partial y}};$$

die beiden partiellen Differentialquotienten sind so zu bilden, als wenn y und x von einander unabhängige Variable wären. — Auf der rechten Seite von (12.) ist für y der aus $F(y,x) = 0$ berechnete Werth einzusetzen. Da $\frac{\partial F(y,x)}{\partial x}$ und $\frac{\partial F(y,x)}{\partial y}$ wieder rationale Functionen von y und x sind, so ist $\frac{dy}{dx}$ *eindeutig* bestimmt, wenn für y ein bestimmter Werth gewählt ist. Ein jeder Zweig der algebraischen Function setzt sich daher vollkommen eindeutig und stetig fort. Nur wenn x in einen Unendlichkeitspunkt oder Verzweigungspunkt eintritt, wird dies Verhältniss gestört; alsdann werden $\frac{\partial F(y,x)}{\partial x}$ und $\frac{\partial F(y,x)}{\partial y}$ gleichzeitig oder es wird $\frac{\partial F(y,x)}{\partial y}$ allein Null. Im ersteren Falle lassen sich mit Hülfe der höheren Differentialquotienten die verschiedenen Werthe des in unbestimmter Gestalt auftretenden Ausdrucks $\frac{dy}{dx}$ bestimmen; doch glauben wir die eingehendere Untersuchung dieses Gegenstandes übergehen zu dürfen.

Insbesondere folgt aus $y = x^{\frac{m}{n}}$ oder $y^n - x^m = 0$: $\frac{dy}{dx} = \frac{m x^{m-1}}{n y^{n-1}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$.

§ 18.

Die Riemann'schen Flächen.

1. Man nennt eine algebraische Function $y = f(x)$ und die sie definirende Gleichung $F(y,x) = 0$ *irreductibel*, wenn sich $F(y,x)$ nicht in Factoren niederen Grades zerlegen lässt, die in y und x rational sind, *reductibel* im entgegengesetzten Fall. Eine reductible algebraische Function kann man als eine Zusammenstellung mehrerer irreductibler betrachten, weshalb wir uns auf die letzteren beschränken dürfen. So zerfällt z. B.

$$(1.)\qquad y^2 - x^2 + 2x - 1 = (y + x - 1)(y - x + 1) = 0$$

in die Gleichungen

$$(2.)\qquad y + x - 1 = 0 \quad \text{und} \quad y - x + 1 = 0,$$

so dass das aus (1.) berechnete $y = f(x)$ lediglich eine Zusammenstellung zweier ganzen Functionen ist. — Es ist nun von der grössten Wichtigkeit, sich von dem Zusammenhang

der n Werthe einer n-deutigen *irreductiblen* algebraischen Function ein klares Bild zu machen, weshalb wir auf diesen Gegenstand einige Augenblicke verwenden wollen.

2. Wir denken uns die Variable x in einer Ebene, y in einer andern dargestellt (s. Fig. 5), nehmen für x zuerst

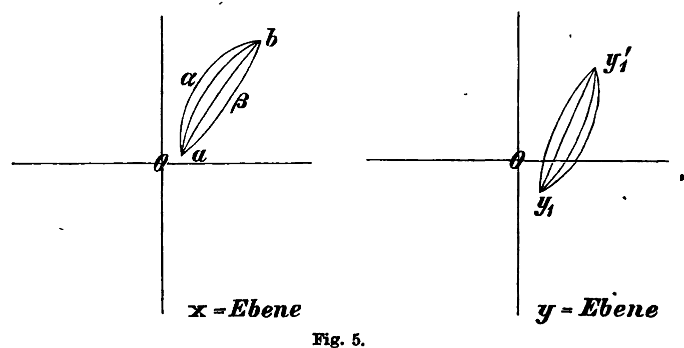


Fig. 5.

einen bestimmten Werth a an, der kein Verzweigungs- oder Unstetigkeitspunkt sein möge, und fixiren unter den n Werthen von y, die ihm entsprechen, einen bestimmten y_1. Nun lassen wir x einen zusammenhängenden Weg, der durch keinen Unstetigkeits- oder Verzweigungspunkt geht, nach einem zweiten Punkte b zurücklegen; y beschreibt dann ebenfalls eine zusammenhängende Linie und gelangt schliesslich nach y_1'; diese Linie ist *eindeutig* bestimmt, da sich y überall, ausser in den Verzweigungspunkten, *eindeutig* fortpflanzt. Lassen wir ferner x einen zweiten Weg zwischen a und b zurücklegen, der dem ersten unendlich benachbart ist und die gleichen Bedingungen erfüllt, auch mit dem ersten zusammen keinen Verzweigungspunkt oder Unstetigkeitspunkt einschliesst, so wird auch der entsprechende von y_1 ausgehende Weg von y dem ersten beständig unendlich nahe bleiben. Da nun y im Punkte b keine zwei unendlich benachbarte Werthe haben kann, wenn derselbe kein Verzweigungs- oder Unstetigkeitspunkt ist, andererseits aber y keine endlichen Sprünge macht, wenn sich x unendlich wenig ändert, so wird y *genau* im Punkte y_1' anlangen müssen, sowie x in b anlangt. So kann man x unendlich viele, sich immer an den vorhergehenden unendlich dicht anschliessende Wege von a nach

b zurücklegen lassen, und immer wird y sich von y_1 bis y_1' bewegen. Hierbei muss nur vorausgesetzt werden, dass der Raum, den diese Wege bedecken, keinen *Verzweigungspunkt* einschliesst, da von einem solchen aus das Weitergehen in mehreren Richtungen möglich ist. Das Durchschreiten eines Unendlichkeitspunktes (der nicht zugleich Verzweigungspunkt ist), das wir bisher nicht miterwähnten, kann ausser Acht bleiben, da wir in dessen Umgebung nur $z = \frac{1}{y} = \frac{1}{f(x)}$ statt $y = f(x)$ zu betrachten brauchen, eine Function, die sich in diesem Punkte durchaus stetig verhält. Hat man auf diese Weise zwei Wege α und β zwischen a und b erhalten, derart, dass x auf einem derselben von a aus fortschreitend in b zu dem gleichen Werthe $y = y_1'$ führt, so ist es auch weiter klar, dass, wenn x von a auf α nach b und dann auf β zurück nach a geht, y wieder zu dem Ausgangswerthe y_1 zurückkehrt. Wir finden somit den wichtigen Satz:

Bewegt sich x auf einer geschlossenen Linie, die durch keine Verzweigungspunkte eines Zweiges von y geht und auch keine einschliesst, bis zu seinem Ausgangspunkte zurück, so erlangt auch der betrachtete Zweig von y nach diesem Umlauf seinen Anfangswerth wieder, beschreibt also ebenfalls eine geschlossene Curve.

Schliesst dagegen der von x durchlaufene Weg einen Verzweigungspunkt ein, so gelangt man im Allgemeinen (jedoch nicht immer) zu einem Werthe von y, der vom Ausgangswerthe verschieden ist*).

3. Das Verhalten der algebraischen Functionen beim Umkreisen eines Verzweigungspunktes wird durch einige Beispiele klarer werden. Sei $y^n = x$, also $y = \sqrt[n]{x}$ oder, wenn $x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ gesetzt wird, $y = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$.

*) Es möge bei dieser Gelegenheit darauf hingewiesen werden, dass in einem Verzweigungspunkte im Allgemeinen nur *zwei*, ausnahmsweise auch *mehrere* Zweige der Function zusammenhängen; für die übrigen Zweige hat ein solcher Verzweigungspunkt keine singuläre Bedeutung.



Nehmen wir $r = 1$ an und lassen φ die Werthe von 0 bis 2π durchlaufen, so kehrt x nach Beschreibung eines Kreises um den Nullpunkt, der ein Verzweigungspunkt ist, zu seinem Anfangswerthe zurück; dagegen gelangt ein Werth von y von $y = 1$ bis zu $\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. Nach $k$maligem Umlaufe von x um den Nullpunkt wird $y = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, und erst nach $n$maligem Umlaufe kehrt y zu seinem ursprünglichen Werthe $y = 1$ zurück. Haben wir dagegen $y = x\sqrt{x-1}$, so ist zwar $x = 0$ ebenfalls ein Verzweigungspunkt, allein nach einem Umlaufe um denselben, der nicht gleichzeitig $x = 1$ umkreist, gelangen wir zum Anfangswerthe von y zurück.

4. Die gegebenen Beispiele zeigen uns, dass wenigstens in manchen Fällen es möglich ist, aus *einem* Werthe von y, etwa y_1, für $x = a$ die übrigen $y_2, y_3, \ldots y_n$ dadurch zu erhalten, dass man x gewisse geschlossene Curven in der Ebene der complexen Zahlen durchlaufen lässt. Es fragt sich nun, ob es in *allen* Fällen möglich ist, durch solche Umläufe der Variabeln *sämmtliche* Werthe von y zu erhalten. Nehmen wir an, es sei dies nicht möglich, sondern es lassen sich auf diese Weise nur $y_1, y_2, \ldots y_k$ in einander überführen, während man von diesen zu den übrigen $y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots y_n$ durch keinen Umlauf gelangen könne. Dann werden sämmtliche symmetrische Functionen der $y_1, y_2, \ldots y_k$, also auch

$$(3.)\qquad \begin{cases} y_1 + y_2 + \cdots y_k, \\ y_1y_2 + y_1y_3 + \cdots + y_{k-1}y_k, \\ \qquad\vdots \\ y_1y_2\cdots y_k \end{cases}$$

bei jedem beliebigen Umlaufe von x ungeändert bleiben, da hierdurch die einzelnen Grössen $y_1, y_2 \ldots y_k$ doch nur unter einander vertauscht werden. Die Grössen (3.) sind daher in der ganzen Ebene *eindeutige* Functionen von x. Da sich aber andererseits die Grössen (3.) nach § 17, 1 als *algebraische* Functionen darstellen lassen, weil $y_1, y_2, \ldots y_k$ solche sind, und algebraische Functionen, wie aus ihrer Form hervorgeht, nur dann eindeutig sind, wenn sie *rational* sind, so sind die

Grössen (3.) *rationale* Functionen von x. Bildet man nun eine Gleichung k^{ten} Grades

$$(4.)\qquad (Y - y_1)(Y - y_2)\ldots(Y - y_k) = 0$$

mit den Lösungen $y_1, y_2, \ldots y_k$, so sind ihre Coefficienten die positiv oder negativ genommenen Grössen (3.), also rationale Functionen von x. Die Grössen $y_1, y_2, \ldots y_k$ sind demnach Lösungen einer Gleichung k^{ten} Grades mit in x rationalen Coefficienten $F_1(y, x) = 0$. Da aber $F_1(y, x) = 0$ nur Lösungen besitzt, die auch solche von $F(y, x) = 0$ sind, so wird es ein Theiler der letzteren Gleichung sein. $F(y, x) = 0$ ist also in diesem Falle *reductibel*. Wir finden:

Irreductible algebraische Functionen sind immer so beschaffen, dass die n Werthe, die sie für irgend ein x annehmen, durch geeignete Umläufe von x in einander übergeführt werden können.

5. Um nun ein klares, übersichtliches Bild von dem Zusammenhange der Werthe einer algebraischen Function unter einander zu geben, ist das von Riemann in die Wissenschaft eingeführte Veranschaulichungsmittel von dem grössten Werthe. Wenn wir hier auch von der *„Riemann'schen Fläche"* keinen so ausgedehnten Gebrauch zu machen haben, wie dies in der Lehre von den complexen Integralen geschieht, so glaube ich doch, diese Theorie wenigstens an einigen Beispielen erörtern zu sollen. Behufs eingehenderen Studiums verweise ich ausser auf die Riemann'sche Inauguraldissertation (Gesammelte Werke, S. 3) namentlich auf: Königsberger, „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen u. s. w."

Bisher dachten wir uns die Variable x in einer Ebene, die zugehörigen Werthe der n-deutigen Function $y = f(x)$ in einer andern ausgebreitet; jedem Punkte der x-Ebene entsprechen dann im Allgemeinen n verschiedene Punkte der y-Ebene. In der Folge wollen wir uns an Stelle der *einen* x-Ebene n auf einander gelegte Ebenen (Blätter*) denken; an Stelle jedes Punktes x treten jetzt n über einander liegende, die jedoch alle dieselbe Zahl x repräsentiren sollen; dagegen

*) Man denke etwa an n auf einander gelegte Bogen Papier!

soll einem Punkte des obersten Blattes der Functionalwerth y_1, einem des zweiten y_2 u. s. w., einem des untersten y_n entsprechen. Alsdann erscheint uns $y = f(x)$ als eine *eindeutige* Function der auf den n Blättern ausgebreiteten x-Werthe. Diese n Blätter, die sog. *Riemann'sche Fläche*, dürfen wir uns aber nicht als völlig isolirt vorstellen, da man ja durch geeignete Führung der Variabeln von einem y-Werth zum andern (wir sprechen nur von irreductibeln Functionen) gelangen kann; wir müssen vielmehr die Blätter theils in einzelnen Punkten, theils auf ganzen Linien an einander heften, um eine entsprechende Verbindung herzustellen. Um dieses im Allgemeinen complicirte, auch vielfach willkürliche, doch immer durchführbare Verfahren klar zu machen, wollen wir uns an einige Beispiele halten.

a. Sei $y = \sqrt{x}$, $y_1 = +\sqrt{x}$, $y_2 = -\sqrt{x}$; Verzweigungspunkte sind $x = 0$ und $x = \infty$. Wir denken uns die auf

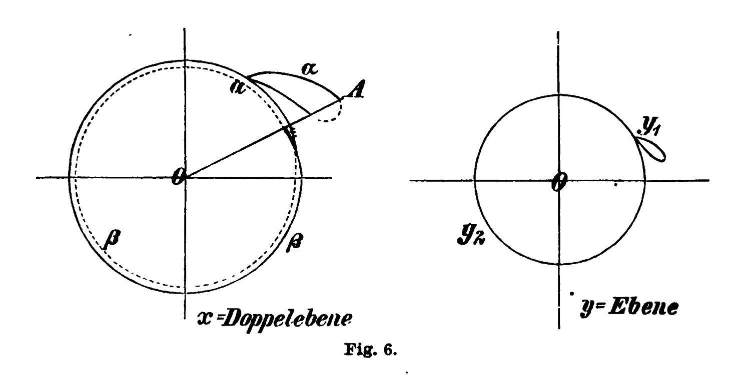


Fig. 6.

einander gelegten beiden Blätter der Riemann'sche Fläche (s. Fig. 6) in einer beliebigen (etwa geraden) Linie OA, welche vom Nullpunkte in irgend welcher Richtung in Unendliche führt, durchschnitten; dann denken wir uns an der Schnittlinie den rechten Rand des unteren Blattes mit dem linken des oberen und, was materiell freilich nicht durchführbar ist, den linken des unteren mit dem rechten des oberen verbunden. Man überzeugt sich nun leicht, dass diese Anordnung dem wirklichen Verhalten der Function entspricht. Lassen wir nämlich die Variable x von irgend einem Punkte

a aus, der auf der oberen Fläche liegen möge, einen (im früheren Sinne) geschlossenen Weg α beschreiben, der den Nullpunkt nicht einschliesst, so gelangen wir zu dem Punkte a auf *demselben* Blatte zurück; daher wird y nach diesem Umlaufe seinen Werth nicht geändert haben. (In der Figur ziehen wir die Linien, die im oberen Blatt zu denken sind, aus, während wir die im unteren befindlichen punktiren.) Lassen wir dagegen x von a aus den Nullpunkt (also auch den Punkt $x = \infty$) auf einem Wege β einmal umkreisen, so gelangen wir nicht wieder zu dem Punkte a auf dem *ersten*, sondern zu dem entsprechenden im *zweiten* Blatte, haben also hiermit nach unserer jetzigen Vorstellungsweise noch keineswegs einen geschlossenen Umlauf ausgeführt; dem entsprechend sind wir auch von y_1 zu y_2 gelangt. Bei einer zweiten Umkreisung gelangen wir zu a im ersten Blatte zurück, haben also jetzt erst eine geschlossene Curve beschrieben; gleichzeitig geht y_2 wieder in y_1 über*). Im Punkte $x = 0$ ist ein directer Übergang von einem Blatte in das andere möglich.

---

*) Wir haben die Anordnung der Fläche absichtlich in vieler Beziehung willkürlich gelassen, um nicht durch unnöthige Specialisirung falsche Vorstellungen zu veranlassen. So ist schon die Festsetzung $y_1 = +\sqrt{x}$, $y_2 = -\sqrt{x}$ nur von *relativer* Bedeutung, da bei complexen oder negativen x von einer Unterscheidung eines positiven und negativen y nicht die Rede sein kann; y_1 und y_2 sollen eben nur das entgegengesetzte Zeichen haben. Wollte man eine bestimmtere Festsetzung der Functionalwerthe haben, welche jedem Blatte der Fläche zugehören, so könnte man etwa den Werth $y = 1$ für $x = 1$ dem *ersten* Blatte zutheilen. Hierdurch ist noch keineswegs bestimmt, welcher Complex von y-Werthen dem ersten Blatte entspricht, da dies noch von der speciellen Wahl des Verzweigungsschnittes abhängt. Aber dies ist auch thatsächlich vollkommen irrelevant; es ist von der grössten Wichtigkeit, zu erkennen, dass es auf diese Wahl nicht ankommt. Der Verzweigungsschnitt spielt auf der Fläche gar keine besondere Rolle und den Functionalwerthen für denselben kommt keine singuläre Bedeutung zu. Eine weitere Erörterung des Gegenstandes ist wohl überflüssig; ein genaueres Durcharbeiten dieses und der folgenden Beispiele, die wir nur kurz skizziren, wird den Leser leicht mit der Riemann'schen Anschauungsweise vertrauter machen.

b. Ist $y = \sqrt[n]{x}$, so durchschneiden wir die n nöthigen Blätter in derselben Weise wie oben und verbinden an der Schnittlinie den rechten Rand des obersten Blattes mit dem linken des zweiten, den rechten des zweiten mit dem linken des dritten u. s. w., schliesslich den rechten des n^{ten} wieder mit dem linken des ersten.

c. Haben wir $y = \sqrt{(x-1)(x-2)}$, so durchschneiden wir die beiden Blätter durch eine (etwa gerade) Linie, die vom ersten Verzweigungspunkte $x = 1$ bis zum zweiten $x = 2$ führt (s. Fig. 7), und verbinden die Blätter an den Schnittlinien wie bei a.; im Verzweigungspunkte $x = \infty$ denken wir uns die Blätter *a* einfach durchstochen und hierdurch die Möglichkeit gewährt, durch diesen Punkt selbst hindurch, jedoch nicht durch seine Umkreisung, aus einem Blatte ins andere zu gelangen. Ein Umkreisen *eines* der im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkte führt in die andere Ebene, ein Umkreisen *beider* oder *keines* von ihnen führt zum Ausgangspunkte in derselben Ebene zurück. Man überzeugt sich leicht davon, dass dieses Arrangement dem wirklichen Verhalten der Function entspricht, namentlich auch davon, dass letztere durch Umkreisen des Punktes $x = \infty$, d. h. beider endlichen Verzweigungspunkte, ihren Werth nicht ändert.

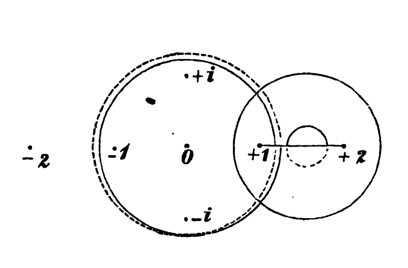


Fig. 7.

Übrigens kann man auch die Zerschneidung der Flächen derart vornehmen, dass man von den Punkten $x = 1$ und $x = 2$ aus Schnitte ins Unendliche führt und an beiden die frühere Zusammenheftung vornimmt.

d. Ist $y = x\sqrt{x-1}$, so ziehen wir einen Schnitt von $x = 1$ ins Unendliche und verbinden wie früher. Im Punkte $x = 0$ denken wir uns die beiden Blätter durchstochen und hierdurch den Zugang vom einen zum andern ermöglicht.

Ein Umkreisen von $x = 1$ führt aus einer Ebene in die andere, während ein Umkreisen von $x = 0$ irrelevant ist.

Die gegebenen Beispiele werden genügen, um die Construction der Riemann'schen Flächen zu erläutern; ein weiteres Eingehen in die Theorie derselben liegt nicht in der Absicht dieses Buches.

Mit den algebraischen Functionen haben wir ein in sich abgeschlossenes Functionengebiet erledigt; im Folgenden wenden wir uns zur Theorie wesentlich anderer Functionen.

Dritter Abschnitt.

Die erweiterten algebraischen Functionen und die allgemeine Theorie der analytischen Functionen.

§ 19.

Einführung der erweiterten algebraischen Functionen.

1. Nachdem wir die algebraischen Functionen als eine in sich abgeschlossene Gruppe kennen gelernt, die aus sich heraus zu keiner Erweiterung des Functionengebietes führt, haben wir die Frage aufzuwerfen: *Wie können wir das Gebiet der uns bekannt gewordenen Functionen in naturgemässer Weise erweitern?* In Wirklichkeit sind sehr mannigfache Wege eingeschlagen worden, um zu neuen Functionen zu gelangen. Man betrachtete z. B. die Potenz, indem man ihren Begriff gleichzeitig in passender Weise erweiterte, als Function des Exponenten und gelangte so zu der Exponentialfunction und durch deren Umkehrung zum Logarithmus, und nach ähnlichen Methoden könnte man wohl noch manche andere Functionen bilden. Dass wir in dieser Richtung nicht vorgehen, vielmehr nur gelegentlich auf die angedeutete Erzeugungsweise der genannten Functionen zurückkommen, hat seinen Grund darin, dass wir auf diese Art keinen umfassenden Complex von Functionen, vielmehr nur isolirte Resultate erhalten. Ein zweiter, bis jetzt mit Vorliebe eingeschlagener Weg ist der, die *Integrale algebraischer Functionen* oder allgemeiner die *Integrale algebraischer Differentialgleichungen* zu untersuchen. Dieses Verfahren hat in der That Manches für sich, da es bei geeigneter Erweiterung eine in sich abgeschlossene Functionengruppe liefert.

Warum wir diesen Weg, der für die elliptischen und Abel'schen Functionen der historische ist, nicht wählen, wird

erst später vollkommen einleuchten, wenn wir die Differentialausdrücke dieser Functionen herstellen; wir werden alsdann sehen, dass wesentlich verschiedene Functionen sehr ähnliche Differentialausdrücke besitzen, und dass, was das Wesentlichste ist, die fraglichen Differentialgleichungen durch stetige Functionen einer Variabeln überhaupt nicht immer zu befriedigen sind, dass man vielmehr durch recht complicirte Betrachtungen von Differentialgleichungen, die nur *eine* unabhängige Variable enthalten, auf Functionen *mehrerer* Variabeln hingewiesen wird. Dazu kommt noch, dass ein Integral (vgl. § 4, 1) überhaupt nicht als ein ausgeführter, d. h. zur Berechnung geeigneter Ausdruck angesehen werden kann, sondern vielmehr ein zu lösendes Problem ausspricht.

2. Der Weg, den wir wirklich einschlagen wollen, ist ein ebenso nahe liegender wie naturgemässer. Während wir bis jetzt nur Functionen mit Hülfe einer *endlichen* Anzahl von Operationen construirten, werden wir jetzt eine *unendliche* Anzahl solcher zu Hülfe nehmen. Bei den algebraischen Functionen setzten wir stillschweigend voraus, dass in der definirenden Gleichung $F(y, x) = 0$ nur Potenzen von y und x mit *endlichem* Exponenten vorkommen; jetzt lassen wir diese Einschränkung fallen und gestatten auch die Aufnahme von unendlich hohen Potenzen in die Gleichung. So gelangen wir zu den *erweiterten algebraischen* Functionen.

Ins Besondere wird durch diese Erweiterung aus der *ganzen* Function die nach Potenzen von x fortschreitende *Potenzreihe*, die natürlich nur unter der Voraussetzung ihrer Convergenz einen Sinn hat; an Stelle der *rationalen* Function tritt der *Quotient zweier Potenzreihen*. Die erweiterte algebraische Function ist vorläufig durch eine Gleichung $F(y, x) = 0$ definirt, wo $F(y, x)$ eine convergente Potenzreihe in Beziehung auf y und x ist. Hiermit ist freilich das Gebiet der erweiterten algebraischen Functionen noch keineswegs abgeschlossen, wie es wohl auf den ersten Blick scheinen möchte; doch können wir auf weitere hierher gehörige Gebilde erst später eingehen. Jedenfalls ist klar, dass die so definirten *transcendenten* (d. h. nicht algebraischen) Functionen mit den analogen algebraischen Functionen manche, wenn auch keines-

wegs alle Eigenschaften gemeinsam haben werden, und dass wir manche bei den algebraischen gefundenen Beziehungen unter geeigneten Einschränkungen auf unsere transcendenten werden übertragen können. Hierin liegt das Wesen der Functionentheorie, die wir im Folgenden vortragen wollen: *die Theorie der zu untersuchenden Functionen ist nur eine Erweiterung der Algebra.*

§ 20.

Die Convergenz unendlicher Potenzreihen.

1. Die weitaus wichtigste der soeben eingeführten Transcendenten (transcendenten Functionen) ist die Erweiterung der ganzen Function, die *unendliche Potenzreihe*:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{0}^{\infty} {}^{n} a_n x^n, \tag{1.}$$

bei der selbstverständlich für die a sowohl als auch für die x complexe Werthe zulässig sind und deren Convergenzbedingungen wir sofort untersuchen werden.

Die Reihe (1.) ist jedenfalls convergent, wenn die Reihe der absoluten Beträge der einzelnen Glieder convergirt, und dieses ist wieder nach dem Cauchy'schen Kriterium der Fall, wenn

$$\frac{|a_{\omega+1} x^{\omega+1}|}{|a_\omega x^\omega|} = \frac{|a_{\omega+1}|}{|a_\omega|} \cdot |x| < 1,$$

also $|x| < \frac{|a_\omega|}{|a_{\omega+1}|}$ ist (wobei die Differenz von $|x|$ und $\frac{|a_\omega|}{|a_{\omega+1}|}$ eine *endliche* sein muss). Haben wir dagegen

$$\frac{|a_{\omega+1}|}{|a_\omega|} \cdot |x| > 1, \text{ also } |x| > \frac{|a_\omega|}{|a_{\omega+1}|},$$

so divergirt die Reihe, weil alsdann ihre Glieder nicht gegen die Null abnehmen. Im Falle $|x| = \frac{|a_\omega|}{|a_{\omega+1}|}$ bleibt die Sache noch unerledigt. Diese Entscheidung setzt stillschweigend voraus, dass $\frac{|a_\omega|}{|a_{\omega+1}|}$ einen bestimmten Grenzwerth besitze; allein es ist dies in Wirklichkeit durchaus nicht immer der

Fall, und wir sind auch im Stande, einen Satz über die Convergenz ganz beliebiger Potenzreihen aufzustellen.

2. Lehrsatz: *Convergirt eine Potenzreihe für*

$$x = x_0 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

so convergirt sie für jedes x, dessen absoluter Betrag um eine endliche Grösse geringer ist wie r.

Beweis: Sei (1.) wieder die vorgelegte Potenzreihe, so können die absoluten Beträge der einzelnen Glieder dieser Reihe für $x = x_0$ keinen ins Unendliche wachsenden Werth besitzen, da sonst von einer Convergenz für $x = x_0$ keine Rede sein könnte; wir dürfen daher annehmen, dass die Grössen $|a_n| r^n$ alle unter einer endlichen Zahl M liegen. Dann ist für $|x| < r$:

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x|^2 + \cdots = |a_0| + |a_1| r \cdot \frac{|x|}{r}$$
$$+ |a_2| r^2 \cdot \frac{|x|^2}{r^2} + \cdots < M\left[1 + \frac{|x|}{r} + \frac{|x|^2}{r^2} + \cdots\right] < \frac{M}{1 - \frac{|x|}{r}},$$

d. h. die links stehende Reihe und hiermit nach § 7, 1 die Reihe (1.) selbst besitzen für dieses x einen endlichen Werth.

Die gefundenen Resultate lassen eine einfache geometrische Veranschaulichung zu, wenn wir uns x in der Ebene der complexen Zahlen dargestellt denken. Die Werthe x, für welche $|x| = \frac{|a_\omega|}{|a_{\omega+1}|}$ ist, oder für die, falls kein solcher Grenzwerth besteht, $|x| = r$ ist, wo wir uns jetzt unter r den Maximalwerth dieser im letzten Lehrsatze auftretenden Grösse denken wollen, liegen auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt und dessen Radius $\frac{|a_\omega|}{|a_{\omega+1}|}$ oder r ist. Für alle Werthe von x, die sich innerhalb dieses „*Convergenzkreises*" in endlichem Abstande von demselben befinden, convergirt die Reihe, für alle ausserhalb gelegenen divergirt sie; für die Punkte des Convergenzkreises selbst und die innerhalb desselben in unendlich geringem Abstande von ihm gelegenen ist eine besondere Untersuchung nöthig. — Den letzten Fall, der von besonderer Merkwürdigkeit ist, werden wir erst im folgenden Paragraphen erledigen; den Fall

$|x| = \frac{|a_\omega|}{|a_{\omega+1}|}$ werden wir unter gewissen Voraussetzungen weiter behandeln.

3. Wir wollen jetzt der Einfachheit halber voraussetzen, dass der Radius des Convergenzkreises (wenn er nicht unendlich ist) die Einheit sei, was immer durch Substitution von $\frac{|a_\omega|}{|a_{\omega+1}|} \cdot x$ an Stelle von x in der Reihe (1.) zu erreichen ist. Alsdann dürfen wir für Werthe des Convergenzkreises $x = \cos\varphi + i\sin\varphi$ setzen. Wir beweisen nun den folgenden

Lehrsatz: *Die Reihe*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{5.}$$

convergirt für $|x| = 1$ *immer, wenn die a* p o s i t i v *sind und von irgend einer Stelle ab gegen die Null zu abnehmen; nur der Punkt* $x = 1$ *macht eine Ausnahme.*

Beweis: Denken wir uns die Glieder mit nicht beständig abnehmenden Coefficienten bereits aus der Reihe ausgeschieden, so haben wir nach Multiplication von

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

mit $1 - x$:

$$\begin{aligned} f_n(x)(1-x) &= a_0 - (a_0 - a_1)x - (a_1 - a_2)x^2 - (a_2 - a_3)x^3 - \cdots \\ &\qquad - (a_{n-1} - a_n)x^n - a_n x^{n+1} \\ &= a_0 - a_n x^{n+1} - \psi_n(x), \end{aligned}$$

worin die Bedeutung von $\psi_n(x)$ ohne Weiteres klar ist.

Die Reihe $\psi_n(x)$ zerlegen wir in ihren reellen und imaginären Theil, indem wir berücksichtigen, dass

$$x^k = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^k = \cos k\varphi + i\sin k\varphi$$

ist; wir haben

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= (a_0 - a_1)\cos\varphi + (a_1 - a_2)\cos 2\varphi + (a_2 - a_3)\cos 3\varphi + \cdots \\ &\quad + (a_{n-1} - a_n)\cos n\varphi + i\Big[(a_0 - a_1)\sin\varphi + (a_1 - a_2)\sin 2\varphi + \\ &\qquad \cdots + (a_{n-1} - a_n)\sin n\varphi\Big], \end{aligned}$$

worin die Grössen $a_k - a_{k+1}$ sämmtlich positiv sind. Gehen wir nun von der endlichen zur unendlichen Reihe durch unendliches Wachsthum von n über, so wird die Convergenz von $f(x)(1 - x) = \psi(x)$, da $a_\omega x^{\omega+1} = 0$ ist, lediglich von

der Endlichkeit des reellen und des imaginären Theils von $\psi_n(x)$ abhängen. Da ferner die Werthe von $\cos kx$ und $\sin kx$ zwischen -1 und $+1$ schwanken, so werden

$$(a_0 - a_1)\cos\varphi + (a_1 - a_2)\cos 2\varphi + (a_2 - a_3)\cos 3\varphi + \cdots + (a_{\omega-1} - a_\omega)\cos\omega\varphi$$

und

$$(a_0 - a_1)\sin\varphi + (a_1 - a_2)\sin 2\varphi + (a_2 - a_3)\sin 3\varphi + \cdots + (a_{\omega-1} - a_\omega)\sin\omega\varphi$$

in convergente Reihen übergehen, wenn dies mit der dem absoluten Betrage nach grösseren oder gleichen Reihe

$$(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{\omega-1} - a_\omega)$$

der Fall ist. Letztere Grösse ist aber gleich $a_0 - a_\omega = a_0$. Da ferner $f(x) = \frac{\psi(x)}{1-x}$ ist, so wird auch $f(x)$ für $|x| = 1$ endlich sein, ausser wenn $x = 1$ ist. — In letzterem Falle hängt die Convergenz von der individuellen Beschaffenheit der Reihe ab.

4. Haben die reellen Grössen a_k nicht positive, sondern *wechselnde* Vorzeichen, so ist die Untersuchung durch Substitution von $-x$ an Stelle von x auf den vorigen Fall zurückzuführen; die Reihe convergirt auf dem ganzen Convergenzkreise, ausser im Punkte $x = -1$.

5. *Innerhalb* des Convergenzkreises ist die Potenzreihe *unbedingt* convergent, weil die Reihe der absoluten Beträge der Glieder convergirt; *auf* dem Convergenzkreise selbst findet im Allgemeinen nur bedingte Convergenz statt.

6. Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, dass $\left|\frac{a_{\omega+1}}{a_\omega}\right| = 0$, resp. $r = \infty$ ist; alsdann convergirt die Reihe für jedes *endliche* x. Da gerade derartige Potenzreihen mit den ganzen Functionen wesentliche Analogien zeigen, so nennen wir sie *transcendente ganze Functionen.*

7. Eine Reihe von der Form

$$f(x) = a_0 + a_1(x - \alpha) + a_2(x - \alpha)^2 + \cdots$$

hat einen Convergenzkreis, dessen Mittelpunkt der Punkt $x = \alpha$ ist.

§ 21.

Allgemeine Eigenschaften der Potenzreihen.

1. Sei

(1.) $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

eine Potenzreihe, deren Convergenzkreis den Radius r besitze (s. Fig. 8).

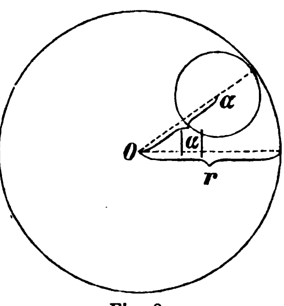


Fig. 8.

In dieser Reihe setzen wir $x = z + \alpha$ und entwickeln in

(2.) $$f(z+\alpha) = a_0 + a_1(z+\alpha) + a_2(z+\alpha)^2 + a_3(z+\alpha)^3 \cdots$$

die einzelnen Glieder nach Potenzen von z, wie dies nach dem binomischen Lehrsatz für ganze Exponenten möglich ist*); wir erhalten

(3.) $$f(z+\alpha) = a_0 + a_1(z+\alpha) + a_2(z^2 + 2\alpha z + \alpha^2) + a_3(z^3 + 3\alpha z^2 + 3\alpha^2 z + \alpha^3) + \cdots,$$

und es fragt sich, ob, resp. wann wir die Glieder dieser Reihe nach steigenden Potenzen von z ordnen dürfen. Diese Frage findet ihre Erledigung durch § 10; denn wir können die Entwicklung (3.) als eine Doppelreihe ansehen, in der die Partialreihen theilweise endlich sind. Die Umordnung wird hiernach möglich sein, wenn z und α so beschaffen sind, dass die Reihe

(4.) $$|a_0| + |a_1 z| + |a_1 \alpha| + |a_2 z^2| + |2 a_2 \alpha z| + |a_2 \alpha^2| + \cdots$$
$$= |a_0| + |a_1||z| + |a_1||\alpha| + |a_2||z|^2 + 2|a_2||\alpha||z| + |a_2||\alpha|^2 + \cdots$$
$$= |a_0| + |a_1|(|z| + |\alpha|) + |a_2|(|z| + |\alpha|)^2 + \cdots$$

convergirt. Dies wird aber dann der Fall sein, wenn

(5.) $$|z| + |\alpha| < r$$

ist. *Wir können demnach $f(z+\alpha)$ nach Potenzen von z oder, was das Gleiche ist, $f(x)$ nach Potenzen von $x - \alpha$ entwickeln,*

*) Auch ohne Verwendung dieses Satzes ist die Entwickelbarkeit der Coefficienten unmittelbar ersichtlich.

wenn $|z| + |\alpha|$ *oder* $|x - \alpha| + |\alpha|$ *kleiner als der Radius des Convergenzkreises von* $f(x)$ *ist.*

Geometrisch stellt sich die Sache in der Weise dar, dass die nach $z = x + \alpha$ geordnete Reihe innerhalb eines Kreises convergirt, der den Punkt $z = 0$ oder $x = \alpha$ zum Mittelpunkte und $r - |\alpha|$ zum Radius hat; dieser Kreis berührt den Convergenzkreis der nach Potenzen von x fortschreitenden Reihe $f(x)$ von innen. — Ausgeschlossen ist hiermit keineswegs, dass die neue Reihe auch in einem *weiteren* Bereiche convergiren könnte; wir kommen auf diesen Punkt später zurück.

2. Lehrsatz: *Jede Potenzreihe ist im Inneren ihres Convergenzkreises eine stetige Function; am Rande des Convergenzbezirks hört diese Eigenschaft auf.*

Beweis: Es ist

$$(6.)\quad f(x + dx) = a_0 + a_1(x + dx) + a_2(x + dx)^2 + \cdots;$$

diese Reihe lässt sich nach Potenzen von dx ordnen, falls $|x| + |dx| < r$ oder $|dx| < r - |x|$ ist. Liegt x nun im Inneren des Convergenzbezirks, d. h. ist $|x| < r$*), so ist diese Bedingung befriedigt, da $|dx|$ unter jeder Grenze klein gedacht werden muss, während wir für einen Punkt des Randes diesen Schluss nicht mehr ziehen dürfen. Wir erhalten

$$(7.)\quad f(x + dx) = f_0(x) + f_1(x)dx + f_2(x)dx^2 + \cdots,$$

worin die $f_k(x)$ Potenzreihen sind, die innerhalb des Convergenzbezirkes von $f(x)$ convergiren müssen. Da $f(x + dx)$ für $dx = 0$ in $f(x)$ übergeht, so muss $f_0(x) = f(x)$ sein, und wir haben demnach

$$f'(x) = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = f_1(x) + f_2(x)dx + f_3(x)dx^2 + \cdots$$
$$= f_1(x) + dx\,[f_2(x) + f_3(x)dx + \cdots] = f_1(x).$$

Der Ausdruck $f_1(x) = f'(x)$, der Coefficient von dx in der Reihe (7.), ergiebt sich aus der unmittelbaren Entwicklung von (6.); wir finden

$$(8.)\quad f'(x) = f_1(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots,$$

*) Diese Ungleichung ist wieder so aufzufassen, dass $|x|$ um eine, wenn auch noch so kleine, *endliche* Grösse unter r liegt.

d. h. dasselbe Resultat, das wir durch gliedweises Differentiiren von $f(x)$ erhalten hätten. Wir haben also folgenden Satz, der den oben ausgesprochenen einschliesst:

Eine unendliche Potenzreihe wird innerhalb ihres Convergenzbezirks in derselben Weise differentiirt wie eine ganze Function; ihr Differentialquotient ist wieder eine Potenzreihe, welche denselben Convergenzbezirk wie $f(x)$ selbst besitzt.

Der letztere Punkt bedarf insofern einer Ergänzung, als bis jetzt nur bewiesen ist, das $f'(x)$ innerhalb des Convergenzbezirks von $f(x)$ convergiren muss; doch ergiebt sich auch mit Leichtigkeit, dass es in keinem *weiteren* Bezirk convergiren kann; denn die Coefficienten von (1.) erscheinen in (8.) mit *zunehmenden* Factoren multiplicirt, wodurch die Convergenz selbstverständlich verringert wird. In Folge dessen convergirt (8.) häufig an der Grenze des Convergenzgebietes nicht mehr, während dies mit (1.) der Fall ist. Die Differentiirbarkeit hört an dieser Grenze auf.

Durch wiederholtes Differentiiren erhalten wir auch die höheren Differentialquotienten immer wieder als Potenzreihen mit dem gleichen Convergenzbezirke*).

3. Differentiiren wir

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

wiederholt, so erhalten wir

$$(9.)\quad \begin{cases} f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots, \\ f''(x) = 2a_2 + 2\cdot 3a_3 x + 3\cdot 4a_4 x^2 + \cdots, \\ f'''(x) = 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4 x + 3\cdot 4\cdot 5a_5 x^2 + \cdots \end{cases}$$

u. s. w.

Setzen wir hierin $x = 0$, so folgt

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0, \\ f'(0) &= 1\cdot a_1, \\ f''(0) &= 1\cdot 2\cdot a_2, \\ f'''(0) &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot a_3 \\ &\vdots \\ f^{(k)}(0) &= 1\cdot 2\cdot 3\cdots k\cdot a_k, \end{aligned}$$

*) Damit ist jedoch nicht ausgeschlossen, dass *unendlich hohe* Differentialquotienten von $f(x)$ ins Unendliche wachsen.

also

(10.) $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} \cdot x + \frac{f''(0)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots$ *).

Man nennt diese Darstellung von $f(x)$ mit Hülfe der Differentialquotienten für den Punkt $x = 0$ die *Maclaurin'sche Reihe.*

Setzen wir in (10.) $f(x+h)$ an Stelle von $f(x)$ und betrachten x als Constante, h als Variable, so finden wir die sog. *Taylor'sche Reihe:*

(11.) $f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1} h + \frac{f''(x)}{1 \cdot 2} h^2 + \frac{f'''(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3} h^3 + \cdots.$

4. Lehrsatz: *Wenn zwei Potenzreihen für alle Punkte innerhalb eines noch so kleinen, doch endlichen um den Nullpunkt beschriebenen Kreises übereinstimmen, so sind sie identisch, d. h. ihre entsprechenden Coefficienten sind gleich.*

Beweis: Ist

(12.) $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$

innerhalb des angegebenen Kreises, so folgt zunächst durch Nullsetzen von x

$$a_0 = b_0,$$

also

$$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots.$$

Diese Gleichung kann beiderseits durch x dividirt werden, wenn x von Null verschieden ist; wir finden

(13.) $a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \cdots$

unter der Voraussetzung, dass nicht $x = 0$ ist. Da wir nun aber gesehen haben, dass die Reihen (13.) innerhalb ihres Convergenzbezirks (welcher derselbe wie bei den Reihen (12.) ist) *stetige* Functionen sind, die sich nicht sprungweise ändern, und die Gleichung (13.) für solche x besteht, die der Null beliebig nahe kommen**), so schliessen wir, dass sie auch

---

*) Natürlich ist hiermit nicht dargethan, dass *jede* Function nach Potenzen von x entwickelt werden kann, wenn wir die Differentialquotienten für den Nullpunkt kennen und die nach Muster von (10.) gebildete Reihe convergirt; vielmehr hat die Entwicklung (10.) die bestimmte Voraussetzung, dass $f(x)$ eine *Potenzreihe* ist.

**) Es ist wichtig hervorzuheben, dass es für diesen Schluss nicht

für $x = 0$ gültig ist. Setzen wir wieder $x = 0$, so folgt weiter

$$a_1 = b_1$$

und

$$(14.)\qquad a_2 x + a_3 x^2 + \cdots = b_2 x + b_3 x^2 + \cdots,$$

und man gelangt durch Wiederholung dieser Schlüsse zu dem Resultat, dass überhaupt

$$(15.)\qquad a_k = b_k$$

ist.

In der Folge wird uns dieser Satz öfters die Möglichkeit bieten, die Coefficienten einer Reihenentwicklung nach der sog. *Methode der unbestimmten Coefficienten* zu berechnen.

5. Die Differentiirbarkeit einer Potenzreihe innerhalb ihres Convergenzkreises überzeugte uns davon, dass die Reihe sich in diesem Intervalle continuirlich, niemals sprungweise ändert; für die Grenze des Convergenzbezirks waren diese Schlüsse nicht mehr möglich. Da aber die Reihe auch *auf* dem Convergenzkreise in vielen Fällen convergent bleibt, so bietet sich die Frage dar, ob sich diese Randwerthe der Reihe und ins Besondere bei welcher *Anordnung* der letzteren ebenfalls stetig an diejenigen für die unmittelbar benachbarten, innerhalb des Convergenzbezirks liegenden x anschliessen. Wie sehr nothwendig eine eingehende Behandlung dieses Gegenstandes ist, zeigt das folgende Beispiel.

Die Reihe

$$(16.)\qquad f_1(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

convergirt unbedingt für $|x| < 1$; es ist daher gleichgültig, in welcher Reihenfolge wir ihre Glieder anordnen, und sie stimmt mit

$$(17.)\qquad f_2(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

für $|x| < 1$ identisch überein. Wird dagegen $x = 1$ gesetzt,

---

erforderlich ist, dass uns die Übereinstimmung beider Reihen in der gesammten Umgebung von Null bekannt ist; es genügt vorauszusetzen, dass die Reihen auf einem endlichen, wenn auch noch so kleinen Linienstück übereinstimmen, welches durch den Nullpunkt geht.

so convergiren die Reihen

(18.) $$f_1(1) = \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \cdots$$

und

$$f_2(1) = \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \cdots$$

auch noch, sind aber nach § 8, 1 an Werth verschieden. Es ist also klar, dass mindestens eine der beiden Reihen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ einen endlichen Stetigkeitssprung macht, wenn x von $1 - \frac{1}{\omega}$ zu 1 übergeht; andrerseits ist es ungewiss, ob bei einer der Reihen kein solcher Stetigkeitssprung stattfindet. Dieser Gegenstand wird erledigt durch den

Abel-Dirichlet'schen Satz: *Ist*

(19.) $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

eine Reihe mit reellen Coefficienten, welche für $|x| < 1$ *und für* $x = 1$ *convergirt, so nähert sich* $f\left(1 - \frac{1}{\omega}\right)$ *dem Grenzwerthe* (ω ist eine *positive*, ins Unendliche wachsende Grösse)

(20.) $$s = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots.$$

Beweis: Es ist, wenn wir

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

setzen:

$$f(x) = s_0 + (s_1 - s_0)x + (s_2 - s_1)x^2 + (s_3 - s_2)x^3 + \cdots$$
$$= (1 - x)(s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \cdots),$$

also

(21.) $$f\left(1 - \frac{1}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega}\left[s_0 + s_1\left(1 - \frac{1}{\omega}\right) + s_2\left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^2 + \cdots + s^n\left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^n\right] + \frac{1}{\omega}\left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^{n+1}\left[s_{n+1} + s_{n+2}\left(1 - \frac{1}{\omega}\right) + s_{n+3}\left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^2 + \cdots\right].$$

Die *endliche* Zahl n können wir uns so gross gewählt denken, dass (in Folge der Convergenz von (20.)) die Grössen s_{n+1}, s_{n+2}, $s_{n+3} \cdots$ beliebig wenig von s verschieden sind; nehmen wir an, sie liegen alle zwischen $s - \delta$ und $s + \varepsilon$, wo δ und ε beliebig klein gedacht werden können. Nun ist der Inhalt der ersten Klammer von (21.) ein *endlicher* Ausdruck, also

mit $\frac{1}{\omega}$ multiplicirt (wir denken uns ω unendlichmal grösser wie n) verschwindend klein, so dass nur der zweite Theil in Betracht kommt. Es ist aber

$$\frac{1}{\omega}\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^{n+1}(s-\delta)\left[1+\left(1-\frac{1}{\omega}\right)+\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^2+\cdots\right]$$
$$<\frac{1}{\omega}\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^{n+1}\left[s_{n+1}+s_{n+2}\left(1-\frac{1}{\omega}\right)+s_{n+3}\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^2+\cdots\right]$$
$$<\frac{1}{\omega}\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^{n+1}(s+\varepsilon)\left[1+\left(1-\frac{1}{\omega}\right)+\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^2+\cdots\right],$$

oder, da

$$1+\left(1-\frac{1}{\omega}\right)+\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^2+\cdots=\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{\omega}\right)}=\omega$$

ist*):

$$\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^{n+1}(s-\delta)<\frac{1}{\omega}\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^{n+1}\left[s_{n+1}+s_{n+2}\left(1-\frac{1}{\omega}\right)+\cdots\right]$$
$$<\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^{n+1}(s+\varepsilon).$$

Wir haben ferner

$$\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^2=1-\frac{2}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}>1-\frac{2}{\omega},$$
$$\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^3>\left(1-\frac{2}{\omega}\right)\left(1-\frac{1}{\omega}\right)>1-\frac{3}{\omega},$$
$$\vdots$$
$$\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^{n+1}>1-\frac{n+1}{\omega},$$

und natürlich andrerseits

$$\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^{n+1}<1,$$

woraus sich bei der Annahme, dass ω unendlich vielmal

---

*) Diese Rechnung basirt auf der Voraussetzung, dass $\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^k$ für unendlich wachsende k sich der *Null* nähert; später werden wir sehen, dass $\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^\omega$ einen *endlichen* Werth repräsentirt; wir müssen uns daher k noch unendlich über ω wachsend denken.

grösser ist wie die endliche Grösse n, ergiebt, dass $\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^{n+1}$ beliebig wenig von 1 verschieden ist.

Wir dürfen daher

$$s-\delta < f\left(1-\frac{1}{\omega}\right) < s+\varepsilon$$

setzen, finden also, dass $f\left(1-\frac{1}{\omega}\right)$ von s beliebig wenig, d. h. gar nicht verschieden ist.

Dieser Satz, der zunächst nur einen speciellen Fall erledigt, kann sofort verallgemeinert werden. Sind $a_0, a_1, \cdots$ complexe Grössen, so denken wir uns (19.) in zwei Reihen zerlegt, von denen die eine reelle, die andere rein imaginäre Werthe enthält, und für die beide der obige Satz Anwendung findet, so dass seine Gültigkeit auch für complexe Coefficienten erwiesen ist. Nunmehr können wir auch $x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ setzen und von

$$f\left[\left(1-\frac{1}{\omega}\right)(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right] = a_0 + a_1(\cos\varphi+i\sin\varphi)\left(1-\frac{1}{\omega}\right) + a_2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^2 + \cdots$$

beweisen, dass es von

$$a_0 + a_1(\cos\varphi + i\sin\varphi) + a_2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \cdots$$

unendlich wenig verschieden ist.

6. Um uns eine deutliche Vorstellung davon zu machen, wie sich die *umgeordnete* Reihe $f(x)$ für $x = 1-\frac{1}{\omega}$ verhält, betrachten wir wieder das Beispiel

$$\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^4}{4}+\cdots. \tag{22.}$$

Setzen wir $x = 1-\frac{1}{\omega}$, so kann sich die Summe einer *endlichen* Anzahl (n) der Glieder dieser Reihe nicht um Endliches von der Summe der entsprechenden Glieder von

$$\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{4}+\cdots \tag{23.}$$

unterscheiden. Falls nun (22.) für $1-\frac{1}{\omega}$ convergent wäre,

so könnte für hinlänglich grosse n der übrig bleibende Rest von (22.) und (23.) beliebig klein gedacht werden, d. h. (22.) und (23.) müssten sich beliebig nahe kommen. Nun wissen wir aber, dass (22.) für $x = 1 - \frac{1}{\omega}$ sich einer andern Grenze nähert. Wir müssen daher schliessen, dass der Rest von (22.) für $x = 1 - \frac{1}{\omega}$ nicht unter eine beliebig kleine Grösse gebracht werden kann, dass also diese Reihe für $x = 1 - \frac{1}{\omega}$ *nicht* convergirt. Man kann sich dieses eigenartige Verhalten so denken, dass (22.) für $|x| < 1$ convergirt, dass sich aber bei der Annäherung von x an 1 diese Convergenz ins Unentliche verzögert, so dass keine noch so grosse Zahl der Glieder der Reihe genügt, um ihren Werth mit beliebiger Annäherung zu berechnen; wird indessen $x = 1$, so tritt wieder Convergenz ein. Man nennt diese merkwürdige Erscheinung *unendlich verzögerte Convergenz*.

§ 22.

Die Erweiterung der Potenzreihen und die analytischen Functionen.

1. Um den folgenden fundamentalen Betrachtungen vollständige Klarheit zu geben, wollen wir wieder von einem Beispiele ausgehen. Der Ausdruck $\frac{1}{1-x}$ ist eine rationale Function, die nur für $x = 1$ unendlich wird, sonst überall stetig ist. Für $|x| < 1$ gilt die Entwicklung

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots,$$

sodass wir innerhalb eines beschränkten Bezirks vollständige Übereinstimmung zwischen $\frac{1}{1-x}$ und einer formell von ihr sehr verschiedenen Potenzreihe haben. Das Centrum des Convergenzkreises der Potenzreihe ist der Nullpunkt; man sagt, $\frac{1}{1-x}$ sei *in der Umgebung* von $x = 0$ oder *für den Punkt* $x = 0$ in eine Potenzreihe entwickelbar. Unter der

Umgebung eines Punktes denken wir uns im Allgemeinen ein endliches, übrigens beliebig kleines Flächenstück, in dessen Innerem, vom Rande überall in endlicher Entfernung, der betreffende Punkt liegt. Wie weit reicht aber der Convergenzkreis der Potenzreihe in unserem Falle? Genau bis an den Unstetigkeitspunkt $x = 1$. Indessen können wir $\frac{1}{1-x}$ auch in eine andere Potenzreihe entwickeln, die nach Potenzen von $x - a$ fortschreitet und deren Convergenzkreis den beliebigen Punkt a zum Mittelpunkte hat, die also eine Entwicklung für die Umgebung des Punktes $x = a$ darstellt. Es ist nämlich

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-a-(x-a)} = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{x-a}{1-a}}$$

$$= \frac{1}{1-a}\left[1 + \frac{x-a}{1-a} + \left(\frac{x-a}{1-a}\right)^2 + \left(\frac{x-a}{1-a}\right)^3 + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{1-a} + \frac{1}{(1-a)^2}(x-a) + \frac{1}{(1-a)^3}(x-a)^2 + \cdots.$$

Diese Entwicklung convergirt für $\left|\frac{x-a}{1-a}\right| < 1$ oder $|x-a| < |1-a|$; bedenkt man, dass $|1-a|$ der geradlinige Abstand des Punktes $x = a$ vom Punkte $x = 1$ ist, so ist ersichtlich, dass der Convergenzkreis der Reihe wieder bis zum Unstetigkeitspunkte $x = 1$ reicht. Unmöglich wird die Entwicklung nur für $a = 1$, wenn man von $a = \infty$ absieht. Man findet also folgende Resultate:

a. $\frac{1}{1-x}$ *lässt sich in jedem endlichen Punkte (oder in der Umgebung jedes Punktes), in dem die Function stetig ist, in eine Potenzreihe entwickeln.*

b. *Die Convergenzkreise der Entwicklungen reichen alle bis zum Unstetigkeitspunkte* $x = 1$.

c. *Mehrere dieser Potenzreihen, deren Convergenzkreise einen gemeinsamen Flächenraum umfassen, liefern für jeden Punkt des letzteren sämmtlich den gleichen Werth* (da alle für einen solchen Punkt mit dem entsprechenden Werthe von $\frac{1}{1-x}$ übereinstimmen).

Man kann sich demnach die Function $\frac{1}{1-x}$ ersetzt denken durch einen Complex von unendlich vielen Potenzreihen, deren Convergenzgebiete sich über die ganze Ebene (soweit sie im Endlichen liegt) verbreiten und nur den einzigen Punkt $x = 1$ ausschliessen. In der Folge werden wir geradezu Functionen durch einen solchen Complex von Potenzreihen definiren; um dieses Verfahren indessen als naturgemäss erscheinen zu lassen, müssen wir einige allgemeine Sätze vorausschicken.

2. Sei eine Potenzreihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

vorgelegt, deren Convergenzkreis den Mittelpunkt $x = 0$ und

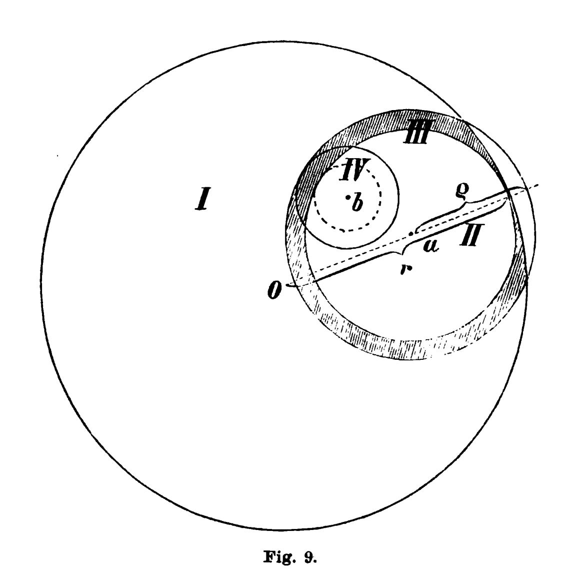


Fig. 9.

den Radius r besitzt; der Raum im Innern dieses Convergenzkreises werde mit I bezeichnet (s. Fig. 9), in demselben liege der Punkt a; dann können wir $f(x)$ nach § 21, 1 in eine nach Potenzen von $x - a$ fortschreitende Reihe

$$f_1(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots$$

transformiren, die jedenfalls innerhalb eines Kreises (der Innenraum desselben heisse II) convergirt, der $x = a$ zum

Mittelpunkte hat und den Convergenzkreis von $f(x)$ von Innen berührt. Im Raume II ist $f(x)$ mit $f_1(x)$ vollkommen identisch. Allein es ist auch möglich (vgl. unser obiges Beispiel), dass sich der Convergenzbereich von $f_1(x)$ noch weiter erstreckt; der Radius desselben sei dann ϱ, sein Innenraum III. Die Frage ist nun: wird die Entwicklung $f_1(x)$ mit $f(x)$ auch in dem (in der Figur schraffirten) Gebiete übereinstimmen, welches III mit I, aber nicht mit II gemeinsam hat? Behufs Beantwortung dieser Frage wählen wir einen Punkt b im Raume II und beschreiben von ihm aus einen Kreis, welcher ganz innerhalb I und III, jedoch zum Theil in den schraffirten Raum fällt; sein Innenraum heisse IV. Nach § 21, 1 ist es nun möglich, sowohl $f(x)$ als auch $f_1(x)$ in Reihen $F(x)$ und $F_1(x)$ zu transformiren, die nach Potenzen von $x - b$ fortschreiten und im Raume IV mit den erstgenannten Reihen *identisch* übereinstimmen. Da nun $f(x)$ und $f_1(x)$ im Raume II identisch gleich sind, und $F(x)$ und $F_1(x)$ in einem Kreise, der den Mittelpunkt b hat und II nicht überschreitet (in der Figur punktirt) resp. mit $f(x)$ und $f_1(x)$ identisch übereinstimmen, so können wir schliessen, dass für dieses Gebiet auch $F(x)$ und $F_1(x)$ identisch sind. Nach § 21, 4 sind aber zwei Potenzreihen, die in der Umgebung des Mittelpunktes ihres Convergenzkreises übereinstimmen, in ihrem ganzen Verlaufe nicht von einander unterschieden. Hieraus folgt weiter, dass im gesammten Raume IV auch $f(x)$ und $f_1(x)$ als identische Transformationen der hier übereinstimmenden Reihen $F(x)$ und $F_1(x)$ identisch sind. Hiernach ist die obige Frage für einen Theil des schraffirten Raumes, nämlich den mit IV gemeinsamen, *bejaht.* Nun können wir aber ausser b noch unendlich viele andere Punkte zum Ausgang wählen und so den Nachweis für weitere Theile des schraffirten Raumes führen; dann können wir auch Ausgangspunkte in dem neugewonnen Raum annehmen u. s. w., und es bedarf keiner weiteren Erörterung, wie man mit solchen Kreisen schliesslich das ganze fragliche Gebiet überdecken kann. Wir haben demnach den Satz:

Eine Potenzreihe, welche aus einer andern durch Transformation hervorgeht, stimmt mit dieser in dem gesammten

Raume überein, der den Convergenzbezirken beider gemeinsam ist.

3. Eine Reihe $f(x)$, welche innerhalb eines endlichen Convergenzkreises convergirt, repräsentirt nur innerhalb dieses Kreises eine Function von x; für x, die ausserhalb desselben liegen, setzt sie keine Functionalbeziehungen fest. Wenn nun die Reihe $f_1(x)$, die in einem gewissen Raume mit $f(x)$ identisch ist, auch für Werthe von x convergirt, die *ausserhalb* des Convergenzbezirks von $f(x)$ liegen, so kann man diesen Theil von $f_1(x)$ als eine *Fortsetzung* der Function $f(x)$ ansehen. Statt $f_1(x)$ könnte man aber auch andere Transformationen von $f(x)$, z. B. $f_2(x)$ u. s. w., deren Convergenzkreise die Punkte b u. s. w. zu Mittelpunkten haben, zu Fortsetzungen benutzen. Sollen nun solche Fortsetzungen einen brauchbaren Sinn haben, so ist es offenbar nöthig, dass irgend zwei derselben, etwa $f_1(x)$ und $f_2(x)$, in einem Bereiche, der ihren Convergenzbezirken gemeinsam ist (s. Figur 10), die *gleichen* Werthe liefern. Dass dies wirklich der Fall ist, lässt sich in ähnlicher Weise wie der vorige Satz begründen. Jenes gemeinsame Stück der Convergenzkreise von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ wird theils innerhalb, theils ausserhalb I fallen; für den inneren Theil ist die Richtigkeit des Satzes selbstverständlich, da hier $f_1(x)$ und $f_2(x)$ nach dem Vorigen mit $f(x)$ identisch sind. Um auch für das äussere, in der Figur schraffirte Stück den Nachweis zu führen, nehmen wir einen Punkt c in dem inneren an und beschreiben um ihn einen Kreis, der auch in den schraffirten Theil reicht, jedoch ganz innerhalb des gesammten gemeinsamen Stückes bleibt. Trans-

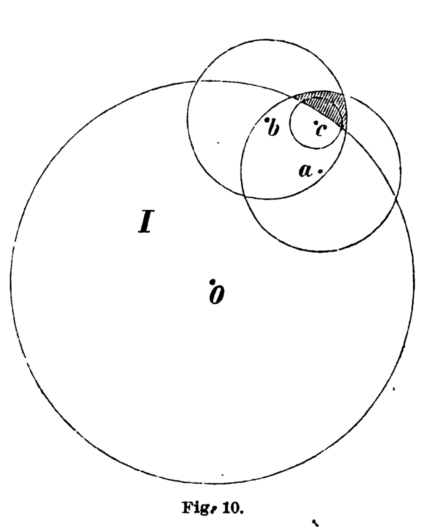


Fig. 10.

formiren wir nun $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zu Potenzreihen $F_1(x)$ und $F_2(x)$, die nach Potenzen von $x - c$ fortschreiten, so werden $F_1(x)$ und $F_2(x)$ in der Umgebung von c identisch sein, da hier $f_1(x)$ und $f_2(x)$ identisch sind. Hieraus folgt nach § 21, 4 wieder, dass $F_1(x)$ und $F_2(x)$ überhaupt identisch sind und dass somit auch $f_1(x)$ und $f_2(x)$ innerhalb des Kreises um c, also auch in einem Theile des schraffirten Raumes übereinstimmen. Diese Schlüsse lassen sich genau so wie in der vorigen Nummer fortsetzen. Wir haben das fundamentale Resultat:

Wenn sich eine durch eine Potenzreihe innerhalb eines gewissen Bezirks definirte Function durch andere Potenzreihen fortsetzen lässt, so ist dies (mit einer später ersichtlichen Beschränkung) nur auf eine einzige Art möglich.

4. Es wird überflüssig sein zu beschreiben, wie in dieser Weise eine durch eine Potenzreihe*) definirte Function nach und nach durch Hinzufügung immer neuer Reihen mit neuen Convergenzgebieten erweitert werden kann, soweit es überhaupt die Natur der Function gestattet; Figur 11 sucht dieses Verfahren zu versinnbildlichen. Mitunter wird sich die Erweiterung auf ein rings begrenztes Gebiet erstrecken; in anderen Fällen wird sie die gesammte Ebene der complexen Zahlen umfassen, eventuell einzelne Punkte ausgenommen, die wir als *singuläre* bezeichnen wollen. Als ein solcher erwies sich z. B. bei den Reihenentwicklungen für $\frac{1}{1-x}$ der Unendlichkeitspunkt $x = 1$, der niemals in das Innere der Convergenzkreise zu liegen kam. Solche isolirte singuläre Punkte stören übrigens die Erweiterung selbst nicht im Geringsten, da man sie umgehen kann (vgl. in Figur 11 die Punkte a und b). Dagegen wird die weitere Fortsetzung unmöglich, wenn *geschlossene* Linien vorhanden sind, über die hinaus sich keine Convergenzbezirke erstrecken. Sind singuläre Punkte vorhanden, so braucht man, wenn man die Er-

*) Dass wir bisher immer von einer Potenzreihe ausgingen, deren Convergenzkreis den *Nullpunkt* zum Mittelpunkte hatte, ist natürlich irrelevant und geschah nur der grösseren Übersichtlichkeit halber; die Betrachtungen gelten auch für andere Potenzreihen.

weiterung um einen solchen herum bis zur Ausgangsstelle fortführt, nicht nothwendiger Weise zu der ursprünglichen Potenzentwicklung zurückzugelangen; vielmehr kann es vorkommen, dass die fortgesetzte Function die Ebene oder einen Theil derselben *mehrfach* überdeckt, sodass sie nur auf einer *Riemann'schen* Fläche eindeutig ist. So lässt sich z. B. $y = \sqrt{x}$ überall in Potenzreihen entwickeln, ausser in $x = 0$ und $x = \infty$. Geht man von der Entwicklung des einen Zweiges

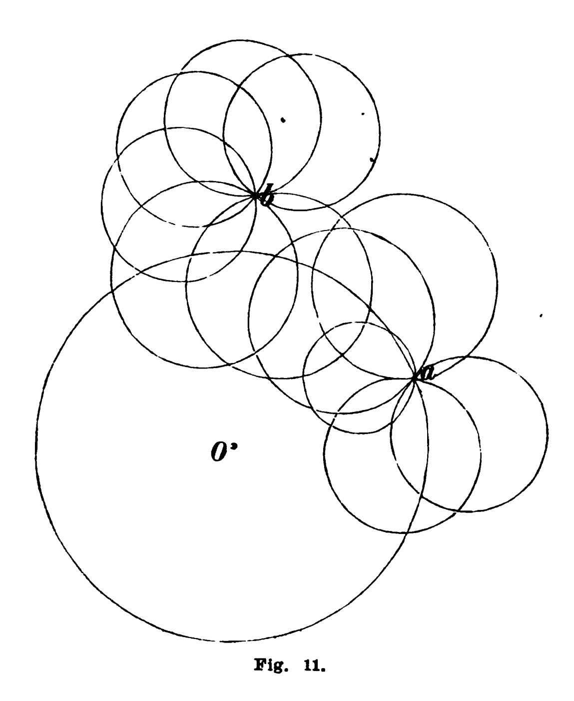


Fig. 11.

der zweideutigen Function aus und setzt dieselbe um den Nullpunkt herum bis zur Ausgangsstelle fort, so gelangt man zur Entwicklung des anderen Zweiges. — Wir wollen nun eine Function, welche sich durch einen solchen Complex von Potenzreihen innerhalb eines gewissen Bereiches darstellen lässt, in diesem Bereiche eine *analytische* Function nennen oder sagen, dass sie in demselben *den Charakter einer ganzen Function* trägt. Wir werden in der Folge sehen, dass sämmtliche Functionen, die wir bis jetzt kennen lernten

ausser in einzelnen singulären Punkten, diesen Charakter besitzen.

Es bleibt nun noch die wichtige Frage zu erledigen, wie weit sich der Convergenzbezirk einer Potenzreihe, die bei der Darstellung einer analytischen Function verwandt wird, erstreckt. Dass er nicht über einen singulären Punkt hinausreichen kann, ist nach der Definition des letzteren selbstverständlich; allein wir werden auch nachweisen können, dass er sich wirklich bis zu einem solchen (resp. bis ins Unendliche) erstrecken muss, d. h. dass es nicht möglich ist, die Function über den Rand des Convergenzbezirks hinaus an *allen* Stellen desselben fortzusetzen. Um diese Untersuchung erledigen zu können, schieben wir eine Hülfsbetrachtung ein.

5. Ist

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^2 + \cdots$$

eine Reihe, deren Convergenzkreis den Radius R besitzt, während $r < R$ ist, und bezeichnen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n = 1$ die $n$ten Einheitswurzeln, so ist nach dem Satze über die Potenzsummen der Einheitswurzeln (die negativen lassen sich durch positive ersetzen) von § 14, 5 für $\mu < n$

$$\frac{1}{n} \sum_1^n {}^k \frac{f(r\alpha_k)}{r^\mu \alpha_k{}^\mu}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_1^n {}^k \frac{a_0}{r^\mu \alpha_k{}^\mu} + \frac{a_1}{r^{\mu-1} \alpha_k{}^{\mu-1}} + \cdots + a_\mu + a_{\mu+1} r \alpha_k$$
$$+ a_{\mu+2} r^2 \alpha^2{}_k + \cdots$$
$$= a_\mu + a_{\mu+n} r^n + a_{\mu+2n} r^{2n} + \cdots.$$

Lässt man n ins Unendliche wachsen, so rücken alle Glieder dieser Reihe ausser a_μ ins Unendliche, sind also wegen der absoluten Convergenz von $f(x)$ verschwindend klein. Es ist dann

$$(1.) \qquad \frac{1}{\omega} \sum_1^\omega {}^k \frac{f(r\alpha_k)}{r^\mu \alpha_k{}^\mu} = a_\mu.$$

Für negative μ wird der Ausdruck (1.) Null. Denken wir uns die Grössen $r\alpha_k$ geometrisch dargestellt, so erscheint uns a_μ als eine Art von Mittelwerth der Werthe, die $\frac{f(x)}{x^\mu}$ für n,

resp. ω Theilpunkte eines Kreises annimmt, der mit dem Radius r um den Nullpunkt beschrieben ist. Die Grösse des Radius r ist für das Resultat bei $\omega = \infty$ gleichgültig, wenn nur $r < R$ ist.

6. Nehmen wir nun an, die Reihe $f(x)$ lasse sich über ihren Convergenzkreis hinaus in *sämmtlichen* Punkten des letzteren erweitern, d. h. wir können in sämmtlichen Punkten eines Kreises mit dem Radius r, der jetzt *beliebig wenig* kleiner wie R sein möge, Reihenentwicklungen vornehmen, die über den Convergenzkreis um eine endliche, wenn auch kleine Strecke, also alle etwa mindestens um eine Strecke hinausgreifen, die grösser wie δ ist, so wollen wir jenen Mittelwerth für den Kreis mit dem Radius $R + \delta$, für den wir auch $r + \varepsilon$ setzen können ($\varepsilon = R - r + \delta$), untersuchen. Bezeichnen wir mit $r\alpha_k$ und $(r + \varepsilon)\alpha_k$ zwei entsprechende Punkte auf den Kreisen mit den Radien r und $r + \varepsilon$, so ist nach § 21, 3

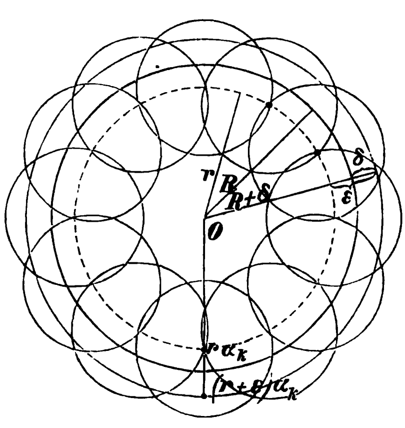


Fig. 12.

$$f[(r + \varepsilon)\alpha_k] = f(r\alpha_k) + \frac{f'(r\alpha_k)\,\varepsilon\alpha_k}{1} + \frac{f''(r\alpha_k)\,\varepsilon^2\alpha_k^2}{1 \cdot 2} + \cdots.$$

Beachten wir, dass die Grössen $f^{(k)}(x)$ in dem in Betracht kommenden Raume absolut convergente Potenzreihen sind, so folgt nach (1.) und dem Zusatze zu dieser Formel, sowie unter Berücksichtigung der Bildung der Coefficienten $f^{(k)}(x)$*):

*) Das Glied mit $x^{\mu-k}$ in $f^{(k)}(x)$ geht durch $k$fache Differentiation aus $a_\mu x^\mu$ hervor und lautet daher

$$\mu(\mu - 1)(\mu - 2)\cdots(\mu - k + 1)\, a_\mu x^{\mu-k}.$$

$$\frac{1}{\omega}\sum_1^\omega{}_k \frac{f(r+\varepsilon)\alpha_k}{(r+\varepsilon)^\mu\alpha_k{}^\mu} + \frac{r^\mu}{(r+\varepsilon)^\mu}\cdot\frac{1}{\omega}\cdot\sum_1^\omega{}_k\left[\frac{f(r\alpha_k)}{r^\mu\alpha_k{}^\mu}\right.$$

$$\left. + \frac{f'(r\alpha_k)}{1\cdot r^\mu\alpha_k{}^{\mu-1}}\varepsilon + \frac{f''(r\alpha_k)}{1\cdot 2\cdot r^\mu\alpha_k{}^{\mu-2}}\varepsilon^2 + \cdots\right]$$

$$= \frac{r^\mu}{(r+\varepsilon)^\mu}\left[a_\mu + \frac{\mu}{1}\cdot\frac{a_\mu\varepsilon}{r} + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{a_\mu\varepsilon^2}{r^2}\right.$$

$$\left. + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\,.\,3}\cdot\frac{a_\mu\varepsilon^3}{r^3} + \cdots + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\mu}\cdot\frac{a_\mu\varepsilon^\mu}{r^\mu}\right]$$

$$= \frac{a_\mu r^\mu}{(r+\varepsilon)^\mu}\left[1 + \frac{\mu}{1}\cdot\frac{\varepsilon}{r} + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon^2}{r^2} + \cdots + \frac{\varepsilon^\mu}{r^\mu}\right]$$

$$= \frac{a_\mu r^\mu}{(r+\varepsilon)^\mu}\left(1+\frac{\varepsilon}{r}\right)^\mu = a_\mu.$$

Man sieht also, dass auch für die allseitig erweiterte Function $f(x)$ dieselbe Mittelwerthrelation wie für den durch die ursprüngliche Potenzreihe dargestellten Theil gilt. Diese Erweiterung kann so weit fortgesetzt werden, bis der Kreis, auf dem die zu summirenden Punkte liegen, an einen singulären Punkt heranreicht.

7. Nach § 2, 4 kann der absolute Betrag von

$$\frac{1}{\omega}\sum_1^\omega{}_k \frac{f(r\alpha_k)}{\alpha_k{}^\mu} = a_\mu r^\mu\,{}^{*)}$$

nicht grösser sein wie der höchste absolute Betrag M_μ, den $\frac{f(r\alpha_k)}{\alpha_k{}^\mu}$ erreicht; M_μ ist aber eine *endliche* Grösse, so lange sämmtliche in Betracht kommenden Grössen $f(r\alpha^k)$ durch unbedingt convergente Potenzreihen dargestellt sind, d. h. im Innern eines um den Nullpunkt beschriebenen Kreises, der keinen singulären Punkt in sich schliesst, aber bis an einen solchen heranreichen kann. Ist nun M der grösste der Werthe M_1, M_2, M_3 u. s. w., so haben wir für $|x| = \varrho < r$

---

*) Wir denken uns jetzt unter r den Radius eines um den Nullpunkt beschriebenen Kreises in dem *erweiterten* Bereiche.

$$\begin{aligned}&|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + |a_3 x^3| + \cdots \\ &= |a_0| + |a_1|\varrho + |a_2|\varrho^2 + |a_3|\varrho^3 + \cdots \\ &= |a_0| + |a_1| r \cdot \frac{\varrho}{r} + |a_2| r^2 \cdot \frac{\varrho^2}{r^2} + \cdots \\ &< M\left[1 + \frac{\varrho}{r} + \frac{\varrho^2}{r^2} + \frac{\varrho^3}{r^3} + \cdots\right] \\ &< M \cdot \frac{1}{1 - \frac{\varrho}{r}},\end{aligned}$$

d. h. die Reihe der absoluten Beträge der Glieder von $f(x)$, also auch $f(x)$ selbst, convergirt für jedes x, dessen absoluter Betrag unter r liegt. Wir finden also das Resultat:

Ist eine unendliche Reihe $f(x - a)$ ein Bestandtheil einer analytischen Function, so erstreckt sich ihr Convergenzkreis bis zu dem a nächstgelegenen singulären Punkte.

Es ist demnach *nicht* möglich, die durch $f(x - a)$ dargestellte Function an *allen* Stellen des Convergenzkreises von $f(x - a)$ zu erweitern.

§ 23.

Eigenschaften der analytischen Functionen; in den kleinsten Theilen ähnliche (conforme) Abbildung.

1. Bevor wir dazu übergehen sämmtliche algebraische Functionen in Potenzreihen zu entwickeln und so zu zeigen, dass dieselben, einzelne singuläre Punkte ausgenommen, analytische Functionen sind, wollen wir auf einige Eigenschaften der letzteren eingehen.

Lehrsatz: *Wenn eine analytische Function auf einer noch so kleinen, doch endlichen Linie einen constanten Werth a besitzt, so ist sie in ihrem ganzen Umfange constant.*

Beweis: Fixiren wir auf jener Linie einen Punkt und betrachten wir die Potenzentwicklung der analytischen Function in demselben, so folgt aus § 21, 4, Anmerkung, dass diese in ihrem ganzen Umfange a gleich ist; denn die Reihe stimmt auf einer durch ihren Ausgangspunkt gehenden Linie mit a überein, ist also mit diesem überhaupt identisch. Setzt man nun die Function durch andere Potenzreihen fort, so haben diese nach demselben Satze immer wieder den Werth a.

Zusatz: *Stimmen zwei analytische Functionen auf einer endlichen zusammenhängenden Linie überein, so sind sie identisch.*

Beweis: Ihre Differenz, die auch eine analytische Function ist, hat auf dieser Linie, also nach dem Vorhergehenden überall den constanten Werth Null.

2. Jede analytische Function ist in ihrem gesammten Bereiche, die äusserste Grenze ausgenommen, endlich und stetig; denn die Reihen, die sie definiren, werden in ihrem Convergenzbezirke nirgends unendlich und sind nach § 21, 2 überall in demselben differentiirbar. Ausserdem pflanzt sich die analytische Function überall *eindeutig* fort. Hieraus folgt, dass alle Functionen, die diesen Bedingungen nicht durchgehends entsprechen, nicht überall den Charakter einer ganzen Function tragen können; nicht nur eigentliche Unstetigkeitspunkte, sondern auch *Verzweigungspunkte* sind als singuläre Punkte anzusehen.

3. Wir wollen zunächst an die Differentiirbarkeit der analytischen Functionen einige Betrachtungen knüpfen, wobei wir es unerledigt lassen, ob sich jede innerhalb gewisser Grenzen differentiirbare Function auch in diesem Gebiete als analytische Function darstellen lässt. Lautet die betreffende Function wieder $y = f(x)$, so ist $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ nur von der Variabeln x, nicht aber von der Wahl der Grösse dx abhängig. Um dieser wichtigen Eigenschaft einen deutlicheren Ausdruck zu geben, setzen wir

$$y = u + vi, \quad x = \xi + \eta i$$

und haben nach der Differentiationsregel für Functionen zweier Variabeln (vgl. § 17, 6), indem wir u und v als Functionen von ξ und η ansehen,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(u + vi)}{d(\xi + \eta i)} = \frac{du + i dv}{d\xi + i d\eta} = \frac{\frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta + i \frac{\partial v}{\partial \xi} d\xi + i \frac{\partial v}{\partial \eta} d\eta}{d\xi + i d\eta}.$$

Soll dieser Ausdruck von der besonderen Wahl von $d\xi$ und $d\eta$ nicht abhängen, so müssen sich diese beiden Grössen herausheben, was offenbar nur der Fall ist, wenn

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + i \frac{\partial v}{\partial \eta} = i\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + i \frac{\partial v}{\partial \xi}\right) = i \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \xi}$$

oder, nach Trennung von Reellem und Imaginärem,

$$(1.)\qquad \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

ist. Differentiiren wir diese beiden Gleichungen nochmals nach ξ und η, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = -\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$$

und durch Subtraction je zweier unter einander stehenden Gleichungen, wenn wir berücksichtigen, dass

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi}.$$

ist*),

$$(2.)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = 0.$$

Der reelle wie der imaginäre Theil einer analytischen Function genügen also beide *derselben partiellen Differentialgleichung*. Von dieser Relation werden wichtige Anwendungen gemacht, namentlich auch in der theoretischen Physik (vgl. z. B. Kirchhoff, Vorlesungen über Mathematische Physik; Mechanik, S. 273 ff.).

3. Von besonderer Wichtigkeit, namentlich auch für die Theorie der höheren periodischen Functionen, sind die geometrischen Beziehungen, die aus dem aufgestellten Grundgesetze folgen. Denken wir uns wieder zwei Ebenen, die der Variabeln x und die der Function y. Jedem Punkte der x-Ebene entsprechen in Folge der Functionalbeziehung $y = f(x)$ ein

*) Es ist nämlich, wenn $\varphi(x, y)$ irgend eine differentiirbare Function zweier Variabeln bezeichnet,

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = \frac{\varphi(x + dx, y) - \varphi(x, y)}{dx},$$

also

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\dfrac{\varphi(x + dx, y + dy) - \varphi(x, y + dy)}{dx} - \dfrac{\varphi(x + dx, y) - \varphi(x, y)}{dx}}{dy}$$

$$= \frac{\dfrac{\varphi(x + dx, y + dy) - \varphi(x + dx, y)}{dy} - \dfrac{\varphi(x, y + dy) - \varphi(x, y)}{dy}}{dx} = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y \partial x}.$$



oder mehrere Punkte der y-Ebene. Man kann daher sagen, dass die Punkte der x-Ebene durch die Function $y = f(x)$ einfach oder mehrfach auf der y-Ebene *abgebildet* werden. Eine zusammenhängende Curve in der x-Ebene wird durch die analytische Function $y = f(x)$ — wir nehmen an, dass die Curve durch keinen singulären Punkt geht — wieder als eine oder mehrere Curven abgebildet. Denken wir uns nun von einem fixirten Punkte x der x-Ebene nach verschiedenen Richtungen hin unendlich kleine Gerade auslaufend (s. Fig. 13),

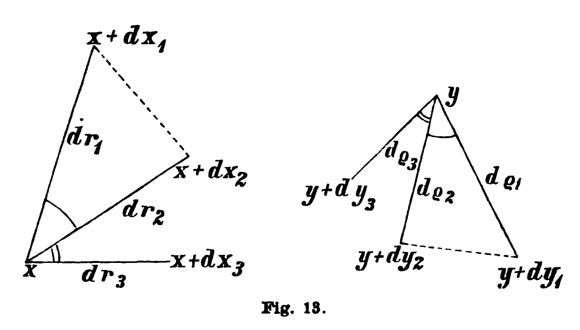


Fig. 13.

deren andere Endpunkte $x + dx_1$, $x + dx_2$, ... sein mögen, so entsprechen diesen in der y-Ebene unendlich kleine Curven, die wir wegen ihrer Kleinheit als Gerade ansehen können, die von y nach $y + dy_1$, $y + dy_2$ u. s. w. gehen. Nach Obigem ist nun

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy_2}{dx_2} = \frac{dy_3}{dx_3} = \cdots;$$

setzen wir

$$dx_\alpha = dr_\alpha(\cos\varphi_\alpha + i\sin\varphi_\alpha),$$
$$dy_\alpha = d\varrho_\alpha(\cos\psi_\alpha + i\sin\psi_\alpha),$$

und beachten zunächst nur die absoluten Beträge, so ergiebt sich hieraus

$$(3.)\qquad \frac{d\varrho_1}{dr_1} = \frac{d\varrho_2}{dr_2} = \frac{d\varrho_3}{dr_3} = \cdots,$$

d. h. die entsprechenden unendlich kleinen, von entsprechenden Punkten ausgehenden Linien stehen in beiden Ebenen in Proportion. Ferner folgt

$$(4.)\qquad \frac{\cos\psi_1 + i\sin\psi_1}{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1} = \frac{\cos\psi_2 + i\sin\psi_2}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} \text{ u. s. w.},$$



oder

$$\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} = \frac{\cos\psi_1 + i\sin\psi_1}{\cos\psi_2 + i\sin\psi_2} \text{ u. s. w.,}$$

oder

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$
$$= \cos(\psi_1 - \psi_2) + i\sin(\psi_1 - \psi_2) \text{ u. s. w.,}$$

also (von irrelevanten Vielfachen von 2π abgesehen)

$$(5.)\qquad \varphi_1 - \varphi_2 = \psi_1 - \psi_2,$$

d. h. je zwei entsprechende Paare der unendlich kleinen Linien bilden gleiche Winkel mit einander. Die beiden unendlich kleinen Dreiecke mit den Eckpunkten x, $x + dx_1$, $x + dx_2$ und y, $y + dy_1$, $y + dy_2$ sind daher einander *ähnlich*. Hieraus ziehen wir den Schluss:

Durch eine analytische Function wird die x-Ebene (eventuell nur ein Theil derselben) auf der y-Ebene in den kleinsten Theilen ähnlich (oder, wie man zu sagen pflegt, conform) abgebildet, d. h. alle unendlich kleinen Linien, die von entsprechenden Punkten ausgehen, stehen in beiden Ebenen in gleichem Verhältniss, und die Winkel, unter denen sich zwei entsprechende Linienpaare schneiden, sind gleich; einem unendlich kleinen Dreieck der einen Ebene entspricht ein ähnliches in der andern Ebene.

In den singulären Punkten kann eine Unterbrechung der Conformität statthaben.

4. Im Punkte $x = \infty$ ist es nicht möglich, eine Function in eine gewöhnliche Potenzreihe zu verwandeln, wenn erstere auch $\left(\text{wie z. B. } \frac{1}{1-x}\right)$ in diesem Punkte einen endlichen Werth hat. Mit Herrn Weierstrass sagen wir, eine Function habe im Punkte $x = \infty$ den Charakter einer ganzen Function, wenn sie sich hier nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ entwickeln lässt. Freilich hat diese Anschauungsweise das Missliche, dass sich diese Reihe mit den nach $x - a$ fortschreitenden für andere Punkte von $f(x)$ nicht in der Weise zu einem Ganzen vereinigt, wie dies mit den letzteren unter einander der Fall ist.

§ 24.

Die singulären Punkte.

1. Während bei der Bildung einer Function im Allgemeinen die grösste Willkürlichkeit walten kann, ist dies bei den *analytischen* Functionen, die für unsere ferneren Untersuchungen allein in Betracht kommen, keineswegs der Fall; die Werthe der Function in verschiedenen Punkten erscheinen durch gewisse Beziehungen unter einander verknüpft. In § 23, 1 sahen wir ja bereits, dass eine analytische Function vollständig bestimmt ist, wenn wir ihre Werthe auf einer noch so kleinen, doch zusammenhängenden Linie kennen. Ist beispielsweise eine analytische Function für alle reellen x (und nicht einmal diese Functionalwerthe können willkürlich festgesetzt werden) bestimmt, so ist hiermit auch die Function für beliebige complexe x definirt. Die Gesammtheit der Functionalwerthe erscheint uns als ein netzartiges Gefüge, dessen einzelne Maschen ihre Gestalt gegenseitig bedingen. Dieses Gefüge ist nun niemals (dies werden wir allerdings erst später erkennen) derart, dass es sich über die ganze y-Ebene ausbreitete, ohne dass irgendwo eine Unregelmässigkeit in der Anordnung nöthig würde; die Bildung der analytischen Functionen selbst bedingt es, dass an einzelnen Stellen die Entwickelbarkeit nach Potenzen und damit auch die Stetigkeit aufhört; es sind dies eben die singulären Punkte. Freilich können auch bei einer Function Unstetigkeiten auftreten, die nicht sowohl durch ihren analytischen Charakter, als vielmehr durch die speciell gewählte Form bedingt sind; bereits früher haben wir solche mit dem Namen *hebbare* Unstetigkeiten belegt (§ 16, 4); dieselben können wir in der Folge unberücksichtigt lassen.

2. Unter den nichthebbaren Singularitäten nehmen die *Verzweigungspunkte* eine besondere Stellung ein; das Verhalten einer analytischen Function in deren Umgebung wollen wir hier nicht weiter untersuchen.

3. Wird eine Function in einem Punkte unendlich oder unbestimmt, so gehört derselbe natürlich zu den singulären Punkten; indessen sind hier zwei Fälle zu unterscheiden.

Es kann sein, dass (vgl. § 12, 2), wenn $f(x_1) = \infty$ wird, doch $\left[(x - x_1)^k f(x)\right]_{x=x_1}$, worin k eine rationale Zahl bezeichnet, einen endlichen, von Null verschiedenen Werth besitzt und dass sich $(x - x_1)^k f(x)$ im Punkte $x = x_1$ in eine Potenzreihe entwickeln lässt $\left(\text{für } x = \infty \text{ ist Entsprechendes von } \frac{f(x)}{x^k} \text{ zu verlangen}\right)$; alsdann nennen wir die Unstetigkeit eine *ausserwesentliche*. Andernfalls ist der Unstetigkeitspunkt ein *wesentlicher*. Bei den algebraischen Functionen kommen wesentliche Unstetigkeiten überhaupt nicht vor, dagegen werden wir solche später kennen lernen. Man kann annehmen, dass in einem ausserwesentlichen Unstetigkeitspunkte eine Function $f(x)$ *einen bestimmten* Werth besitzt, da $\frac{1}{f(x)}$ den bestimmten Werth Null hat; in *wesentlichen* Unstetigkeitspunkten kann die Function schlechthin unbestimmt werden, derart dass $\frac{1}{f(x)}$ nicht Null, sondern ebenfalls unbestimmt ist. Zu den wesentlichen Unstetigkeiten wollen wir ausserdem sämmtliche Singularitäten rechnen, die noch nicht erwähnt wurden, so z. B. den Fall, dass eine Function auf unendlich kleinem Raume einen endlichen Sprung macht, dass sie an einer Stelle keinen bestimmten (eindeutigen oder mehrdeutigen) Differentialquotienten besitzt u. s. w.

4. **Lehrsatz:** *Nimmt eine Function auf einem endlichen, begrenzten Raume unendlich oft denselben Werth an, ohne constant zu sein, so besitzt sie in diesem Raume mindestens einen wesentlichen Unstetigkeitspunkt.*

Beweis: Denken wir uns den betreffenden Raum durch Linien in eine beliebig grosse, doch endliche Zahl von Parcellen zerlegt, von denen keine Dimensionen besitzt, die eine gewisse, beliebig klein zu wählende Grösse übersteigen, und wählen wir, was offenbar immer möglich ist, die Grenzlinien hierbei so, dass unendlich viele der fraglichen Punkte nicht auf dieselben zu liegen kommen, so werden mindestens in *einer* der Parcellen *unendlich* viele Punkte vorhanden sein müssen, die den gleichen Functionalwerth liefern; denn andernfalls wäre die Zahl dieser Punkte im Ganzen eben eine end-

liche. Da man die Parcellirung soweit treiben kann, wie man will, so muss sich schliesslich in jenem Raume mindestens ein Punkt a finden, in dessen unmittelbarer Umgebung sich unendlich viele jener Punkte zusammendrängen. Wenn nun die Function $f(x)$, was ausgeschlossen wurde, hier nicht zusammenhängend constant ist, so schwankt sie auf einem beliebig kleinen Raume hin und her. Die Grösse $\frac{dy}{dx}$ kann sich dann in diesem Punkte keinem bestimmten Grenzwerthe nähern, und es ist daher hier weder für $f(x)$ noch für $f(x)(x-a)^k$ eine Potenzentwicklung möglich, da ja eine solche wie ihr Product mit $(x-a)^k$ im Punkte a differentiirbar sein müsste. a ist also ein *wesentlicher* Unstetigkeitspunkt.

5. Es kann vorkommen, dass sich unendlich viele Unstetigkeitspunkte (die wir dann als wesentliche ansehen müssen) zu einer zusammenhängenden *Unstetigkeitslinie* an einander reihen. Eine solche Unstetigkeitslinie kann ins Besondere eine geschlossene oder beiderseits ins Unendliche laufende Curve sein und die Ebene der complexen Zahlen in mehrere getrennte Theile, d. h. so zerlegen, dass man aus keinem Theile in den andern gelangen kann, ohne die Unstetigkeitslinie zu überschreiten; eine beiderseits ins Unendliche laufende Linie müssen wir uns hierbei im Unendlichkeitspunkte geschlossen denken. Hierzu ist noch weiter zu bemerken, dass nur bei *eindeutigen* Functionen, also wenn die Riemann'sche Fläche eine einfache Ebene ist, durch eine im gewöhnlichen Sinne geschlossene Curve eine Zerstückelung des ganzen Bereiches für x hervorgerufen wird; ist dagegen die Function eine mehrdeutige, ist also die Riemann'sche Fläche eine zusammengesetzte, so sind zur Zerstückelung der letzteren im Allgemeinen mehrere solche Curven nöthig. Ist nun der Bereich der Variablen x durch Unstetigkeitslinien in solche getrennte Gebiete zerlegt, so werden die einzelnen Theile der Function $f(x)$, die diesen Gebieten entsprechen, in *analytischer* Beziehung *verschiedene* Functionen repräsentiren; denn es ist unmöglich, Potenzentwicklungen herzustellen, die aus dem einen Bereiche in den andern hinübergreifen. In der That ist es Herrn Weierstrass gelungen, Ausdrücke zu bilden, welche

beliebig, viele durchaus getrennte analytische Functionen darstellen (Monatsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin; aus dem Jahre 1880, S. 719 ff.).

Beispiel: Die Reihe

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{1}{x^n - \frac{1}{x^n}} = \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{x^n}{x^{2n} - 1}$$

convergirt immer, wenn $|x| \gtrless 1$ ist. Denn für $|x| > 1$ giebt das Cauchy'sche Kriterium

$$\frac{\left|x^\omega - \frac{1}{x^\omega}\right|}{\left|x^{\omega+1} - \frac{1}{x^{\omega+1}}\right|} = \frac{\left|1 - \frac{1}{x^{2\omega}}\right|}{\left|1 - \frac{1}{x^{2\omega+2}}\right| \cdot |x|} = \frac{1}{|x|} < 1;$$

für $|x| < 1$ haben wir aber

$$\frac{\left|x^\omega - \frac{1}{x^\omega}\right|}{\left|x^{\omega+1} - \frac{1}{x^{\omega+1}}\right|} = \frac{|x^{2\omega} - 1| \cdot |x|}{|x^{2\omega+2} - 1|} = |x| < 1.$$

Dagegen werden unendlich viele Glieder von $f(x)$ unendlich, sobald x eine Einheitswurzel ist. Wenn man nun bedenkt, dass die Einheitswurzeln einen mit dem Radius 1 um den Nullpunkt beschriebenen Kreis in einer Dichtigkeit bedecken, die jede Grenze übersteigt, so ist es klar, dass dieser Kreis $f(x)$ eine Unstetigkeitslinie bildet. Für $|x| > 1$ und $|x| < 1$ stellt $f(x)$ also zwei völlig getrennte Functionen dar, deren analytischer Charakter ohne Schwierigkeit nachzuweisen ist.

§ 25.

Der binomische Satz.

1. Als einfachstes Beispiel der Entwicklung einer algebraischen Function in eine Potenzreihe behandeln wir den sog. *binomischen Satz*, welcher uns den Ausdruck $(1 + x)^n$ in eine Potenzreihe verwandeln lehrt; n kann hierbei eine positive oder negative rationale Zahl sein; irrationale und complexe n schliessen wir bis auf Weiteres aus, da wir denselben erst später einen Sinn unterlegen werden. Für ganze, positive n wird die Entwicklung bei der n^{ten} Potenz von x abbrechen und für beliebige x gültig sein; in jedem andern Falle er-

halten wir eine unendliche Potenzreihe, deren Convergenzkreis den Radius 1 besitzt, da sich $x = -1$ als der einzige singuläre Punkt erweisen wird.

2. Es ist

$$(a + x_1)(a + x_2) \cdots (a + x_n) = a^n + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) a^{n-1} + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots x_{n-1} x_n) a^{n-2} + \cdots + x_1 x_2 \cdots x_n;$$

die Zahl der Summanden, welche der Coefficient von a^{n-k} enthält, ist gleich der Zahl der Combinationen zur k^{ten} Classe, die bei n Elementen möglich sind*), d. h.

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}.$$

Nehmen wir nun $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = x$, so folgt

$$(1.) \quad (a + x)^n = a^n + n_1 a^{n-1} x + n_2 a^{n-2} x^2 + \cdots n_{n-1} a x^{n-1} + x^n,$$

*) Um das hier angewandte Resultat herzuleiten, sind nur die allerersten Elemente der sog. Combinationslehre erforderlich, die wir hier der Vollständigkeit wegen zusammenstellen wollen.

a. Die Zahl der *Permutationen* von n verschiedenen Elementen $a_1, a_2, \ldots a_n$, d. h. die Anzahl der Anordnungen, die man diesen Grössen geben kann, ist $n(n-1)(n-2)\ldots 3 . 2 . 1 = n!$ (sprich n Fakultät); denn man kann jedes der n Elemente an die erste Stelle, jedes der $(n-1)$ übrigen an die zweite, jedes der $(n-2)$ noch übrigbleibenden an die dritte Stelle setzen u. s. w.

b. Die Zahl der *Variationen* von n verschiedenen Elementen zur k^{ten} Classe, d. h. die Anzahl der Gruppen von je k verschiedenen Elementen, die man aus jenen n Elementen formiren kann, wobei die Gruppen, die sich nur durch die Reihenfolge der Elemente unterscheiden, als *verschieden* angesehen werden, beträgt

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1);$$

denn man kann an die erste Stelle n, an die zweite $(n-1)$, schliesslich an die k^{te} $(n-k+1)$ verschiedene Elemente setzen.

c. Die Zahl der *Combinationen* von n verschiedenen Elementen zur k^{ten} Classe, d. h. die Anzahl der Gruppen von je k verschiedenen Elementen, die man aus jenen n Elementen herstellen kann, wobei auf die Reihenfolge der Elemente *keine* Rücksicht genommen wird, beträgt

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k};$$

denn man erhält sie aus der Zahl der Variationen, indem man letztere durch die Zahl der Permutationen, die bei den k Elementen einer Gruppe möglich sind, d. h. durch $1 . 2 . 3 \ldots k$ dividirt.

worin, wie in der Folge immer geschehen soll,

$$(2.)\qquad n_k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}$$

gesetzt ist; n_k heisst der k^{te} *Binomialcoefficient für den Exponenten* n.

Da $(a+x)^n$ in a und x symmetrisch ist, so muss

$$(3.)\qquad n_k = n_{n-k}$$

sein; ins Besondere ist $n_0 = n_n = 1$.

Nehmen wir $a = 1$, so erhalten wir

$$(4.)\qquad (1+x)^n = 1 + n_1 x + n_2 x^2 + \cdots + n_1 x^{n-1} + x^n.$$

3. Um nun auch zu zeigen, dass die Entwicklung

$$(1+x)^n = 1 + n_1 x + n_2 x^2 + \cdots,$$

worin die Coefficienten nach Formel (2.) gebildet sind, für *beliebige rationale* n gilt, wenn nur die Reihe auf der rechten Seite convergirt, wenden wir ein ganz anderes Verfahren an. Statt nämlich den Ausdruck $(1+x)^n$ zum Ausgangspunkte zu wählen, beschäftigen wir uns zuerst mit der Reihe

$$(5.)\qquad f(n, x) = 1 + n_1 x + n_2 x^2 + \cdots$$

und suchen deren Werth zu bestimmen, nachdem wir über ihre Convergenz ins Klare gekommen sind. Zum letzteren Zwecke wenden wir das Cauchy'sche Kriterium an. Es ist

$$\left|\frac{n_{\omega+1}x^{\omega+1}}{n_\omega x^\omega}\right| = \left|\frac{n_{\omega+1}}{n_\omega}\right|\cdot|x| = \left|\frac{\dfrac{n(n-1)\cdots(n-\omega)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(\omega+1)}}{\dfrac{n(n-1)\cdots(n-\omega+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots \omega}}\right|\cdot|x|$$

$$= \left|\frac{n-\omega}{\omega+1}\right|\cdot|x| = |x|;$$

die Reihe (5.) convergirt daher, gleichgültig welchen (auch complexen) Werth n besitzt, für $|x| < 1$ unbedingt, während sie für $|x| > 1$ sicher divergirt, ausser bei ganzzahligen, positiven n; der Fall $|x| = 1$ macht eine eingehendere Untersuchung nöthig, die wir vorläufig nur für *reelle* n durchführen. Bei der letzteren Bedingung ist es klar, dass die Grössen n_k bei hinlänglich grossen k *wechselnde* Zeichen besitzen, da $n_{k+1} = n_k \dfrac{n-k}{k+1}$ und $n - k < 0$ ist, falls $k > n$ wird. Wir können daher § 20, 4 zur Anwendung bringen und finden, dass die Reihe (5.) für $|x| = 1$, jedoch $x = -1$ ausgenommen,

convergirt oder divergirt, jenachdem die Coefficienten n_k gegen die Null hin abnehmen oder nicht. Ein Abnehmen dieser Coefficienten findet aber für $k > n$ statt, wenn

$$\left|\frac{n-k}{k+1}\right| < 1, \text{ also } k - n < k + 1, \text{ d. h. } n > -1$$

ist; für $n = -1$ bleiben sie gleich und für $n < -1$ nehmen ihre absoluten Werthe zu, so dass in den beiden letzten Fällen die Reihe divergirt. Dass für $n > -1$ die Coefficienten auch *gegen die Null hin* abnehmen, ergiebt sich daraus, dass nach § 11, 1 das unendliche Product

$$|n_\omega| = \prod_1^\omega{}_k \frac{|n-k+1|}{k} = \pm \prod_1^\omega{}_k \left(1 - \frac{n+1}{k}\right),$$

in dem $n + 1 > 0$ ist, divergirt, d. h. den Werth Null hat, weil die Reihe $(n+1)\sum_1^\omega{}_k \frac{1}{k}$ divergirt. — Ist $x = -1$, so haben alle Glieder von einem gewissen k ab gleiche Zeichen, und wir können das Kriterium von § 5, 5 anwenden. Es ist

$$\omega\left(1 - \left|\frac{n_{\omega+1}}{n_\omega}\right|\right) = \omega\left(1 - \frac{\omega - n}{\omega + 1}\right) = \omega\,\frac{n+1}{\omega+1} = n + 1;$$

die Reihe convergirt daher für $n > 0$. Dass für $n < 0$ die Reihe divergirt, folgt schon daraus, dass für $n = 0$ nach Weglassung des ersten Gliedes und nach Division durch n sich die divergente harmonische Reihe ergiebt, während für $n > 0$ offenbar eine noch stärkere Divergenz eintritt. — Das Gesammtresultat lautet:

Die „Binomialreihe“ (5.) *convergirt für beliebige complexe n unbedingt, wenn $|x| < 1$ ist; für $|x| = 1$, $x = -1$ ausgenommen, convergirt sie (im Allgemeinen nur bedingt) bei reellen n, die der Bedingung $n > -1$ genügen, für $x = -1$ dagegen nur, wenn $n > 0$ ist.*

4. Nach dieser Voruntersuchung über die Convergenz der Binomialreihe beweisen wir eine wichtige Eigenschaft der letzteren, die uns sofort die Möglichkeit bietet, ihren Werth zu bestimmen. Nehmen wir $|x| < 1$ an, so dürfen wir zwei Binomialreihen in bekannter Weise mit einander multipliciren und haben

$$f(m, x) \cdot f(n, x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

worin

$$a_k = m_0 n_k + m_1 n_{k-1} + m_2 n_{k-2} + \cdots + m_{k-1} n_1 + m_k n_0,$$

also

$$a_{k+1} = m_0 n_{k+1} + m_1 n_k + \cdot \cdot + m_k n_1 + m_{k+1} n_0$$

ist. Bemerken wir, dass

$$\frac{m+n-k}{k+1} = \frac{m}{k+1} + \frac{n-k}{k+1} = \frac{m-1}{k+1} + \frac{n-(k-1)}{k+1}$$

$$= \frac{m-2}{k+1} + \frac{n-(k-2)}{k+1} = \cdots = \frac{m-k}{k+1} + \frac{n}{k+1}$$

ist, und multipliciren wir den Ausdruck für a_k mit $\frac{m+n-k}{k+1}$, indem wir bei der Multiplicatian der einzelnen Posten nach und nach die eben gefundenen Ausdrücke für $\frac{m+n-k}{k+1}$ benutzen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{m+n-k}{k+1} a_k = &\frac{m}{k+1} m_0 n_k + \frac{n-k}{k+1} m_0 n_k \\ &+ \frac{m-1}{k+1} m_1 n_{k-1} + \frac{n-(k-1)}{k+1} m_1 n_{k-1} \\ &+ \frac{m-2}{k+1} m_2 n_{k-2} + \frac{n-(k-2)}{k+1} m_2 n_{k-2} \\ &+ \cdots \\ &+ \frac{m-k}{k+1} m_k n_0 + \frac{n}{k+1} m_k n_0,\end{aligned}$$

oder unter Berücksichtigung, dass

$$\frac{\mu - r}{r+1} \mu_r = \mu_{r+1}$$

ist:

$$\begin{aligned}\frac{m+n-k}{k+1} a_k = &\frac{1}{k+1} m_1 m_k + m_0 n_{k+1} \\ &+ \frac{2}{k+1} m_2 n_{k-1} + \frac{k}{k+1} m_1 n_k \\ &+ \frac{3}{k+1} m_3 n_{k-2} + \frac{k-1}{k+1} m_2 n_{k-1} \\ &+ \cdots \\ &+ \frac{k}{k+1} m_k n_1 + \frac{2}{k+1} m_{k-1} n_2 \\ &+ m_{k+1} n_0 + \frac{1}{k+1} m_k n_1,\end{aligned}$$

oder, wenn wir die gleichnamigen Grössen zusammenfassen:

$$\frac{m+n-k}{k+1}a_k = m_0 n_{k+1} + m_1 n_k + m_2 n_{k-1} + \cdots + m_k n_1 + m_{k+1} n_0 = a_{k+1}.$$

Da nun $a_0 = 1$ ist, so haben wir nach dieser Recursionsformel

$$a_1 = \frac{m+n}{1},$$

$$a_2 = \frac{m+n}{1}\cdot\frac{m+n-1}{2},$$

$$a_3 = \frac{m+n}{1}\cdot\frac{m+n-1}{2}\cdot\frac{m+n-2}{3}$$

u. s. w.,

d. h.

(6.) $$a_k = m_0 n_k + m_1 n_{k-1} + m_2 n_{k-2} + \cdots + m_1 n_{k-1} + m_0 n_k = (m+n)_k.$$

Es ist also für beliebige m und n

(7.) $$f(m, x)\cdot f(n, x) = f(m+n, x).$$

Die Multiplication zweier Binomialreihen liefert eine dritte Binomialreihe, die $m+n$ an Stelle von m oder n enthält.

Eine Folgerung hieraus ist (für ganze, positive k)

(8.) $$f^k(m, x) = f(km, x).$$

5. Sei nun m eine rational gebrochene, positive Zahl, etwa $m = \frac{\mu}{\gamma}$, so ist nach (8.)

$$f^\gamma(m, x) = f^\gamma\left(\frac{\mu}{\gamma}, x\right) = f(\mu, x).$$

Da wir aber wissen, dass

$$f(\mu, x) = (1+x)^\mu$$

ist (da ja μ eine ganze Zahl ist), so folgt

$$f^\gamma(m, x) = (1+x)^\mu,$$

also

$$f(m, x) = (1+x)^{\frac{\mu}{\gamma}} = (1+x)^m,$$

wodurch wir den binomischen Satz für positive, gebrochene m erwiesen haben. Da ferner nach (7.)

$$f(-m, x)\cdot(f(m, x) = f(0, x) = 1$$

ist, so folgt

$$f(-m, x) = \frac{1}{f(m, x)} = \frac{1}{(1+x)^m} = (1+x)^{-m},$$

d. h. derselbe Satz ist auch für negative m richtig.

Wir haben somit für beliebige, rationale gebrochene, positive oder negative m:

$$(9.)\quad (1+x)^m = 1 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \cdots$$
$$= 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots.$$

Dabei ist jedoch zu bemerken, dass im Falle eines gebrochenen m die rechtsstehende Reihe nur *einen* Werth von $(1+x)^m$ repräsentirt, nämlich denjenigen, der für $x = 0$ in 1 übergeht, falls man von einem beliebigen x zu $x = 0$ auf einem Wege gelangt, der ganz innerhalb des Convergenzkreises der Reihe liegt, der also den Verzweigungspunkt $x = -1$ nicht umkreist. Die übrigen Werthe erhält man aus diesem durch Multiplication mit den entsprechenden Einheitswurzeln. — Die Gleichung (9.) ist vorläufig nur für $|x| < 1$ erwiesen; da indessen nach dem Abel-Dirichlet'schen Satze (§ 21, 5) die Reihe auf der rechten Seite von (8.) bei ungeänderter Anordnung keinen Sprung macht, wenn man zu Randwerthen übergeht, und auch $(1+x)^m$ für $|x| = 1$ stetig bleibt, falls nicht $x = -1$ und gleichzeitig $m < 0$ ist, so wird die Gleichung (9.) auch für $|x| = 1$ richtig bleiben, falls die Reihe rechts ihre Convergenz beibehält und ihre Anordnung nicht alterirt wird.

Beispiele von Binomialentwicklungen:

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2,$$
$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3,$$
$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

u. s. w.,

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$$
$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \cdots$$

u. s. w.,

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \cdots$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \cdots,$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \cdots.$$

6. Für spätere Untersuchungen ist eine für die Binomialcoefficienten geltende Relation, durch die eine Erweiterung der Binomialentwicklung möglich ist, von grossem Nutzen. Wir stellen uns die Aufgabe, für die Summe

$$m_0\left(\frac{m}{2}\right)_k + m_2\left(\frac{m}{2}-1\right)_{k-1} + m_4\left(\frac{m}{2}-2\right)_{k-2} + \cdots + m_{2k}\left(\frac{m}{2}-k\right)_0$$

einen einfacheren Ausdruck zu finden. Es ist

$$m_{2r}\left(\frac{m}{2}-r\right)_{k-r} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-2r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2r}$$

$$\cdot\frac{\left(\frac{m}{2}-r\right)\left(\frac{m}{2}-r-1\right)\cdots\left(\frac{m}{2}-k+1\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(k-r)} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-2r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2r}$$

$$\cdot\frac{(m-2r)(m-2r-2)\cdots(m-2k+2)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k-2r)} = \frac{m(m-2)(m-4)\cdots(m-2k+2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r-1)}$$

$$\cdot\frac{(m-1)(m-3)\cdots(m-2r+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2r}\cdot\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k-2r)},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner mit

$$(2r+1)(2r+3)\cdots(2k-3)(2k-1)$$

multiplicirt,

$$m_{2r}\left(\frac{m}{2}-r\right)_{k-r} = \frac{m(m-2)(m-4)\cdots(m-2k+2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}$$

$$\cdot\frac{(m-1)(m-3)\cdots(m-2r+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2r}\cdot\frac{(2k-1)(2k-3)\cdots(2r+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k-2r)}$$

$$= \frac{m(m-2)(m-4)\cdots(m-2k+2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}$$

$$\cdot\frac{\frac{m-1}{2}\left(\frac{m-1}{2}-1\right)\left(\frac{m-1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{m-1}{2}-r+1\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}$$

$$\cdot\frac{(k-\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2}-1)(k-\frac{1}{2}-2)\cdots(k-\frac{1}{2}-k+r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(k-r)}$$

$$= \left(\frac{m-1}{2}\right)_r\left(\frac{2k-1}{2}\right)_{k-r}\cdot\frac{m(m-2)(m-4)\cdots(m-2k+2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}.$$

Da der letzte Factor von r unabhängig ist, so tritt er in allen Gliedern der zu untersuchenden Summe auf, und wir erhalten mit Hülfe von (6.)

$$m_0\left(\frac{m}{2}\right)_k + m_2\left(\frac{m}{2}-1\right)_{k-1} + m_4\left(\frac{m}{2}-2\right)_{k-2} + \cdots + m_{2k}\left(\frac{m}{2}-k\right)_0$$

$$= \frac{m(m-2)(m-4)\cdots(m-2k+2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}\left[\left(\frac{m-1}{2}\right)_0\left(\frac{2k-1}{2}\right)_k\right.$$

$$\left. + \left(\frac{m-1}{2}\right)_1\left(\frac{2k-1}{2}\right)_{k-1} + \cdots + \left(\frac{m-1}{2}\right)_k\left(\frac{2k-1}{2}\right)_0\right]$$

$$= \frac{m(m-2)(m-4)\cdots(m-2k+2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}\cdot\left(\frac{m}{2}+k-1\right)_k$$

$$= \frac{m(m-2)(m-4)\cdots(m-2k+2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}\cdot\frac{(m+2k-2)(m+2k-4)\cdots(m-2)m}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}$$

oder, wenn wir die Factoren im Zähler des letzteren Bruches umstellen und mit den entsprechenden des ersteren vereinigen:

$$(10.)\quad m_0\left(\frac{m}{2}\right)_k + m_2\left(\frac{m}{2}-1\right)_{k-1} + m_4\left(\frac{m}{2}-2\right)_{k-2} + \cdots$$

$$+ m_{2k}\left(\frac{m}{2}-k\right)_0 = \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\cdots(m^2-(2k-2)^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2k)}.$$

In gleicher Weise finden wir einen einfacheren Ausdruck für

$$m_1\left(\frac{m-1}{2}\right)_k + m_3\left(\frac{m-3}{2}\right)_{k-1} + m_5\left(\frac{m-5}{2}\right)_{k-2} + \cdots$$

$$+ m_{2k+1}\left(\frac{m-2k-1}{2}\right)_0;$$

denn es ist

$$m_{2r+1}\left(\frac{m-2r-1}{2}\right)_{k-r} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-2r)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2r+1)}$$

$$\cdot\frac{(m-2r-1)(m-2r-3)\cdots(m-2k+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k-2r)} = \frac{m(m-1)(m-3)\cdots(m-2k+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r+1)}$$

$$\cdot\frac{(m-2)(m-4)\cdots(m-2r)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2r)}\cdot\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k-2r)}$$

$$= \frac{m(m-1)(m-3)\cdots(m-2k+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}\cdot\frac{(m-2)(m-4)\cdots(m-2r)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2r)}$$

$$\cdot\frac{(2k+1)(2k-1)\cdots(2r+3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k-2r)}$$

$$= \left(\frac{m-2}{2}\right)_r\left(\frac{2k+1}{2}\right)_{k-r}\cdot\frac{m(m-1)(m-3)\cdots(m-2k+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)},$$

also

$$(11.)\quad m_1\left(\frac{m-1}{2}\right)_k + m_3\left(\frac{m-3}{2}\right)_{k-1} + m_5\left(\frac{m-5}{2}\right)_{k-2} + \cdots$$

$$+ m_{2k+1}\left(\frac{m-2k-1}{2}\right)_0 = \frac{m(m-1)(m-3)\cdots(m-2k+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}\left[\left(\frac{m-2}{2}\right)_0\left(\frac{2k+1}{2}\right)_k\right.$$

$$\left. + \left(\frac{m-2}{2}\right)_1\left(\frac{2k+1}{2}\right)_{k-1} + \cdots + \left(\frac{m-2}{2}\right)_k\left(\frac{2k+1}{2}\right)_0\right]$$

$$= \frac{m(m-1)(m-3)\cdots(m-2k+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}\cdot\left(\frac{m+2k-1}{2}\right)_k$$

$$= \frac{m(m-1)(m-3)\cdots(m-2k+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}\cdot\frac{(m+1)(m+3)\cdots(m+2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}$$

$$= \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\cdots(m^2-(2k-1)^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2k+1)}.$$

7. Wir benutzen die letzten Relationen, um Reihenentwicklungen für die Ausdrücke

$$(\sqrt{1+x^2}+x)^m \pm (\sqrt{1+x^2}-x)^m$$

herzustellen. Die Entwicklung nach dem binomischen Satze giebt zunächst, wenn wir die sich weghebenden Glieder gleich weglassen:

$$(\sqrt{1+x^2}+x)^m + (\sqrt{1+x^2}-x)^m = (1+x^2)^{\frac{m}{2}}\left[\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^m\right.$$

$$\left. + \left(1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^m\right] = 2(1+x^2)^{\frac{m}{2}}\left[1 + m_2\frac{x^2}{1+x^2}\right.$$

$$\left. + m_4\frac{x^4}{(1+x^2)^2} + \cdots\right] = 2\left[(1+x^2)^{\frac{m}{2}} + m_2x^2(1+x^2)^{\frac{m}{2}-1}\right.$$

$$\left. + m_4x^4(1+x^2)^{\frac{m}{2}-2} + \cdots\right],$$

und bei weiterer Anwendung desselben Satzes auf die einzelnen Glieder

$$(12.)\quad (\sqrt{1+x^2}+x)^m + (\sqrt{1+x^2}-x)^m$$

$$= 2\left[1 + \left(\frac{m}{2}\right)_1 x^2 + \left(\frac{m}{2}\right)_2 x^4 + \cdots\right.$$

$$+ m_2x^2\left(1 + \left(\frac{m}{2}-1\right)_1 x^2 + \left(\frac{m}{2}-1\right)_2 x^4 + \cdots\right)$$

$$+ m_4x^4\left(1 + \left(\frac{m}{2}-2\right)_1 x^2 + \left(\frac{m}{2}-2\right)_2 x^4 + \cdots\right)$$

$$\left. + \cdots\cdots \right]$$

$$= 2\left[1 + \left(m_0\left(\frac{m}{2}\right)_1 + m_2\left(\frac{m}{2}-1\right)_0\right)x^2 \right.$$
$$\left. + \left(m_0\left(\frac{m}{2}\right)_2 + m_2\left(\frac{m}{2}-1\right)_1 + m_4\left(\frac{m}{2}-2\right)_0\right)x^4 + \cdots\right]$$
$$= 2\left[1 + \frac{m^2}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^6 + \cdots\right].$$

Ganz ebenso finden wir

$$(13.)\quad (\sqrt{1+x^2}+x)^m - (\sqrt{1+x^2}-x)^m$$
$$= (1+x^2)^{\frac{m}{2}}\left[\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^m - \left(1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^m\right]$$
$$= 2(1+x^2)^{\frac{m}{2}}\left[m_1\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} + m_3\frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} + m_5\frac{x^5}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}} + \cdots\right]$$
$$= 2\left[m_1 x(1+x^2)^{\frac{m-1}{2}} + m_3 x^3(1+x^2)^{\frac{m-3}{2}} \right.$$
$$\left. + m_5 x^5(1+x^2)^{\frac{m-5}{2}} + \cdots\right]$$
$$= 2\left[m_1 x + \left(m_1\left(\frac{m-1}{2}\right)_1 + m_3\left(\frac{m-3}{2}\right)_0\right)x^3 \right.$$
$$\left. + \left(m_1\left(\frac{m-1}{2}\right)_2 + m_3\left(\frac{m-3}{2}\right)_1 + m_5\left(\frac{m-5}{2}\right)_0\right)x^5 + \cdots\right]$$
$$= 2\left[\frac{m}{1}x + \frac{m(m^2-1^2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 + \cdots\right].$$

Beide Reihenentwicklungen sind jedenfalls für $|x| < 1$ gültig; es versteht sich von selbst, dass das Zeichen von $\sqrt{1+x^2}$ hierbei immer als so gewählt vorausgesetzt wurde, dass die Wurzel in der Umgebung von $x = 0$ mit der Binomialentwicklung identisch wird.

8. Zum Schlusse möge noch bemerkt werden, dass durch den binomischen Satz die Reihenentwicklung für $y = x^n$, n beliebig reell und rational, in jedem Punkte mit Ausnahme von $x = 0$ und $x = \infty$ gegeben ist; denn es ist

$$(14.)\quad y = x^n = \left[(x-a)+a\right]^n = a^n\left[1+\frac{x-a}{a}\right]^n$$
$$= a_n\left[1 + n_1\frac{x-a}{a} + n_2\left(\frac{x-a}{a}\right)^2 + n_3\left(\frac{x-a}{a}\right)^3 + \cdots\right]$$
$$= a^n + n_1 a^{n-1}(x-a) + n_2 a^{n-2}(x-a)^2 + n_3 a^{n-3}(x-a)^3 + \cdots,$$

also

$$(11.)\quad m_1\left(\frac{m-1}{2}\right)_k + m_3\left(\frac{m-3}{2}\right)_{k-1} + m_5\left(\frac{m-5}{2}\right)_{k-2} + \cdots$$

$$+ m_{2k+1}\left(\frac{m-2k-1}{2}\right)_0 = \frac{m(m-1)(m-3)\cdots(m-2k+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}\left[\left(\frac{m-2}{2}\right)_0\left(\frac{2k+1}{2}\right)_k\right.$$

$$\left. + \left(\frac{m-2}{2}\right)_1\left(\frac{2k+1}{2}\right)_{k-1} + \cdots + \left(\frac{m-2}{2}\right)_k\left(\frac{2k+1}{2}\right)_0\right]$$

$$= \frac{m(m-1)(m-3)\cdots(m-2k+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}\cdot\left(\frac{m+2k-1}{2}\right)_k$$

$$= \frac{m(m-1)(m-3)\cdots(m-2k+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}\cdot\frac{(m+1)(m+3)\cdots(m+2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}$$

$$= \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\cdots(m^2-(2k-1)^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2k+1)}.$$

7. Wir benutzen die letzten Relationen, um Reihenentwicklungen für die Ausdrücke

$$(\sqrt{1+x^2}+x)^m \pm (\sqrt{1+x^2}-x)^m$$

herzustellen. Die Entwicklung nach dem binomischen Satze giebt zunächst, wenn wir die sich weghebenden Glieder gleich weglassen:

$$(\sqrt{1+x^2}+x)^m + (\sqrt{1+x^2}-x)^m = (1+x^2)^{\frac{m}{2}}\left[\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^m\right.$$

$$\left. + \left(1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^m\right] = 2(1+x^2)^{\frac{m}{2}}\left[1 + m_2\frac{x^2}{1+x^2}\right.$$

$$\left. + m_4\frac{x^4}{(1+x^2)^2} + \cdots\right] = 2\left[(1+x^2)^{\frac{m}{2}} + m_2x^2(1+x^2)^{\frac{m}{2}-1}\right.$$

$$\left. + m_4x^4(1+x^2)^{\frac{m}{2}-2} + \cdots\right],$$

und bei weiterer Anwendung desselben Satzes auf die einzelnen Glieder

$$(12.)\quad (\sqrt{1+x^2}+x)^m + (\sqrt{1+x^2}-x)^m$$

$$= 2\left[1 + \left(\frac{m}{2}\right)_1 x^2 + \left(\frac{m}{2}\right)_2 x^4 + \cdots\right.$$

$$+ m_2x^2\left(1 + \left(\frac{m}{2}-1\right)_1 x^2 + \left(\frac{m}{2}-1\right)_2 x^4 + \cdots\right)$$

$$+ m_4x^4\left(1 + \left(\frac{m}{2}-2\right)_1 x^2 + \left(\frac{m}{2}-2\right)_2 x^4 + \cdots\right)$$

$$\left. + \cdots\cdots \right]$$

$$= 2\left[1 + \left(m_0\left(\frac{m}{2}\right)_1 + m_2\left(\frac{m}{2} - 1\right)_0\right)x^2\right.$$
$$\left. + \left(m_0\left(\frac{m}{2}\right)_2 + m_2\left(\frac{m}{2} - 1\right)_1 + m_4\left(\frac{m}{2} - 2\right)_0\right)x^4 + \cdots\right]$$
$$= 2\left[1 + \frac{m^2}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m^2(m^2 - 2^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \frac{m^2(m^2 - 2^2)(m^2 - 4^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^6 + \cdots\right].$$

Ganz ebenso finden wir

$$(13.)\quad (\sqrt{1 + x^2} + x)^m - (\sqrt{1 + x^2} - x)^m$$
$$= (1 + x^2)^{\frac{m}{2}}\left[\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)^m - \left(1 - \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)^m\right]$$
$$= 2(1 + x^2)^{\frac{m}{2}}\left[m_1\frac{x}{(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}} + m_3\frac{x^3}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + m_5\frac{x^5}{(1 + x^2)^{\frac{5}{2}}} + \cdots\right]$$
$$= 2\left[m_1 x(1 + x^2)^{\frac{m-1}{2}} + m_3 x^3(1 + x^2)^{\frac{m-3}{2}}\right.$$
$$\left. + m_5 x^5(1 + x^2)^{\frac{m-5}{2}} + \cdots\right]$$
$$= 2\left[m_1 x + \left(m_1\left(\frac{m-1}{2}\right)_1 + m_3\left(\frac{m-3}{2}\right)_0\right)x^3\right.$$
$$\left. + \left(m_1\left(\frac{m-1}{2}\right)_2 + m_3\left(\frac{m-3}{2}\right)_1 + m_5\left(\frac{m-5}{2}\right)_0\right)x^5 + \cdots\right]$$
$$= 2\left[\frac{m}{1}x + \frac{m(m^2 - 1^2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{m(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 + \cdots\right].$$

Beide Reihenentwicklungen sind jedenfalls für $|x| < 1$ gültig; es versteht sich von selbst, dass das Zeichen von $\sqrt{1 + x^2}$ hierbei immer als so gewählt vorausgesetzt wurde, dass die Wurzel in der Umgebung von $x = 0$ mit der Binomialentwicklung identisch wird.

8. Zum Schlusse möge noch bemerkt werden, dass durch den binomischen Satz die Reihenentwicklung für $y = x^n$, n beliebig reell und rational, in jedem Punkte mit Ausnahme von $x = 0$ und $x = \infty$ gegeben ist; denn es ist

$$(14.)\quad y = x^n = \left[(x - a) + a\right]^n = a^n\left[1 + \frac{x - a}{a}\right]^n$$
$$= a_n\left[1 + n_1\frac{x - a}{a} + n_2\left(\frac{x - a}{a}\right)^2 + n_3\left(\frac{x - a}{a}\right)^3 + \cdots\right]$$
$$= a^n + n_1 a^{n-1}(x - a) + n_2 a^{n-2}(x - a)^2 + n_3 a^{n-3}(x - a)^3 + \cdots,$$

eine Reihe, die für $|x-a|<|a|$ jedenfalls convergirt. *Die gebrochene Potenz x^n ist also überall ausser in den Punkten $x=0$ und $x=\infty$ eine analytische Function.*

§ 26.

Weiteres über analytische Functionen.

1. Das Product zweier nach derselben Variabeln fortschreitenden Potenzreihen, die innerhalb eines gewissen Bezirks gemeinsam convergiren, ist wieder eine ebensolche Potenzreihe, die in demselben Bezirk convergirt. Dies versteht sich nach § 9 von selbst.

2. Auch der Quotient zweier Potenzreihen:

$$f(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots}$$

ist durch eine innerhalb eines endlichen Convergenzkreises convergirende, nach Potenzen von x fortschreitende Reihe darstellbar, falls b_0 von Null verschieden ist. Denn wir haben

$$f(x)=\frac{1}{b_0}\cdot\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots}{1+\frac{b_1}{b_0}x+\frac{b_2}{b_0}x^2+\cdots}.$$

Da der Nenner für $x=0$ gleich 1 wird und in der Umgebung dieses Punktes stetig ist, so wird durch hinlänglich kleine x

$$\left|\frac{b_1}{b_0}x+\frac{b_2}{b_0}x^2+\cdots\right|<1$$

gemacht werden können; es folgt

$$f(x)=\frac{1}{b_0}(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)$$

$$\cdot\left[1-\left(\frac{b_1}{b_0}x+\frac{b_2}{b_0}x^2+\cdots\right)+\left(\frac{b_1}{b_0}x+\frac{b_2}{b_0}x^2+\cdots\right)^2-\cdots\right],$$

ein Ausdruck, der durch Ausmultipliciren und Umordnen der Glieder (was nach § 10 möglich ist) in eine Potenzreihe übergeht, die in der Umgebung von $x=0$ convergirt.

3. Hiermit ist ins Besondere nachgewiesen, dass jede *rationale* Function in der Umgebung jedes im Endlichen gelegenen Punktes a, der kein Unstetigkeitspunkt ist, in eine Potenzreihe verwandelt werden kann; denn wir können die Function durch Transformation in die Form

$$f(x) = \frac{a_0' + a_1'(x-a) + a_2'(x-a)^2 + \cdots + a_n'(x-a)^n}{b_0' + b_1'(x-a) + b_2'(x-a)^2 + \cdots + b_m'(x-a)^m}$$

setzen und nach der vorigen Nummer verfahren, ausser wenn $b_0' = 0$ ist, d. h. wenn die Function für $x = a$ unendlich wird. Der Convergenzkreis der Reihe erstreckt sich bis zu dem a nächstgelegenen Unstetigkeitspunkte (§ 22, 7). Ist $b_0 = 0$ und etwa auch noch $b_1' = b_2' = \cdots = b_k' = 0$, so können wir von $f(x)$ den Factor $\frac{1}{(x-a)^k}$ absondern und dann wie vorher verfahren; multipliciren wir hierauf wieder aus, so erhalten wir eine Reihe:

$$\frac{A_{-k}}{(x-a)^k} + \frac{A_{-k+1}}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_{-1}}{x-a} + A_0 + A_1(x-a) + A_1(x-a)^2 + \cdots,$$

die, den Punkt a ausgenommen, innerhalb eines um $x = a$ beschriebenen Kreises convergirt, der wieder bis zum nächsten Unstetigkeitspunkte reicht. — Um auch für die Umgebung von $x = \infty$ eine Potenzentwicklung für $f(x)$ zu erhalten, schreiben wir

$$f(x) = x^{n-m} \cdot \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \frac{b_{m-2}}{x} + \cdots + \frac{b_0}{x^m}}$$

und entwickeln nach Potenzen von $\frac{1}{x}$; die sich ergebende Reihe enthält ausser den negativen eventuell (wenn $n > m$ ist) auch einige positive Potenzen von x.

4. Auch $\varphi(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^n$, n reell und rational, lässt sich in der Umgebung von $x = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln, wenn nicht $a_0 = 0$ ist; denn wir haben

$$\varphi(x) = a^n \left[1 + \left(\frac{a_1}{a_0}x + \frac{a_2}{a_0}x^2 + \cdots\right)\right]^n$$

$$= a^n \left[1 + n_1\left(\frac{a_1}{a_0}x + \frac{a_2}{a_0}x^2 + \cdots\right) + n_2\left(\frac{a_1}{a_0}x + \frac{a_2}{a_0}x^2 + \ldots\right)^2 + \cdots\right]$$

u. s. w.

Hieraus schliessen wir sofort weiter, dass sich $f^n(x)$, worin $f(x)$ eine rationale Function ist, in der Umgebung jedes Punktes, für den $f(x)$ nicht Null oder unendlich wird, in eine Potenzreihe entwickeln lässt, deren Convergenzkreis mindestens bis zu dem nächsten der genannten Punkte reicht. In der Umgebung der Ausnahmepunkte ist ebenfalls eine Potenzentwicklung möglich, nachdem man den Factor, der das Null- oder Unendlichwerden verursacht, herausgenommen hat*). Die Behandlung von $f(x)$ für die Umgebung von $x = \infty$ ist der in 3. gegebenen analog.

5. Ist $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ eine Potenzreihe, die für $|x| < r$ convergirt, $y = \varphi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$ eine zweite, deren absoluter Werth für $|x| < \varrho$ unterhalb r liegt, so stellt auch

$$f(y) = a_0 + a_1(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) \\ + a_2(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots)^2 + \cdots$$

eine für $|x| < \varrho$ convergente Potenzreihe dar, wie aus § 10 unmittelbar ersichtlich ist.

§ 27.

Die Umkehrung der Potenzreihen.

1. Sei

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{1.}$$

eine Potenzreihe, die mindestens für $|x| \leq 1$ convergirt (andere Fälle können wir durch eine Substitution $x' = \alpha x$ unmittelbar auf diesen zurückführen), und a_1 von Null verschieden. Dann setzen wir

$$\frac{y - a_0}{a_1} = z, \quad \frac{a_k}{a_0} = -b_k, \quad k = 2, 3, 4, \cdots$$

und haben unter der gleichen Convergenzbedingung

$$z = x - b_2 x^2 - b_3 x^3 - b_4 x^4 - \cdots. \tag{2.}$$

Es handelt sich nun darum, zu beweisen, dass sich *einer* der (im Allgemeinen unendlich zahlreichen) Werthe von x, die zu demselben y gehören, in der Umgebung von $x = 0$ in

*) Multiplicirt man nach Vornahme der Potenzentwicklung wieder aus, so erhält man eventuell eine Reihe mit *gebrochenen* Potenzen von x.

eine convergente Potenzreihe nach $z = \frac{y - a_0}{a_1}$ entwickeln lässt, d. h. *dass in dieser Umgebung mindestens* e*in Zweig der sog. „Umkehrung“ der Reihe* (2.) *oder* (1.) *eine analytische Function von z oder y ist.* Zu diesem Zwecke setzen wir vorläufig (was indessen nicht immer die *einzige* zulässige Annahme ist!)

$$(3.) \qquad x = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots$$

in (2.) ein und erhalten

$$(4.) \quad z = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots - b_2 (z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots)^2 - \cdots,$$

und es fragt sich, ob man die Coefficienten c_k dieser Gleichung entsprechend durch die b_k ausdrücken kann, sodass (3.) gleichzeitig eine in der Umgebung von $z = 0$ convergente Reihe wird. Multipliciren wir in (4.) aus, so folgt durch Coefficientenvergleichung

$$\begin{aligned} &c_2 - b_2 = 0, \\ &c_3 - 2b_2 c_2 - b_3 = 0, \\ &c_4 - b_2(c_2^2 + 2c_3) - 3b_3 c_2 - b_4 = 0 \\ &\qquad\qquad \text{u. s. w.,} \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} &c_2 = b_2, \\ &c_3 = 2b_2 c_2 + b_3, \\ &c_4 = b_2(c_2^2 + 2c_3) + 3b_3 c_2 + b_4 \\ &\qquad\qquad \text{u. s. w.,} \end{aligned}$$

woraus auch ohne weitere Fortsetzung der Rechnung ersichtlich ist, dass sich der Reihe nach alle c_n als *ganze* Functionen von $b_2, b_3, \cdots b_n$ darstellen lassen, so dass

$$c_n = \varphi_k(b_2, b_3, \cdots b_n)$$

ist. Weiter geht aus der Form der Bedingungsgleichungen hervor, dass in diesen ganzen Functionen sämmtliche Glieder das *positive* Zeichen haben, d. h. natürlich nur insofern, als man die b_k als unbestimmte Grössen nimmt. Es ist nun zu untersuchen, ob die so gebildete Reihe (3.) in der Umgebung von $z = 0$ convergirt. Ersetzen wir in den c_k die b_k durch die entsprechenden absoluten Beträge $|b_k|$, so wird wegen der durchgehends positiven Zeichen in den Ausdrücken für die c_k der absolute Werth der letzteren zum Mindesten nicht

verringert; das Gleiche ist der Fall, wenn wir an Stelle aller dieser absoluten Beträge den *grössten* derselben M setzen; letzterer muss in Folge der Convergenzbedingung für (1.) und (2.) *endlich* sein.

Wir schliessen hieraus, dass die Reihe (3.) sicher in der Umgebung von $z = 0$ convergirt, wenn dies mit der Reihe

$$(5.) \qquad x = z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \cdots$$

der Fall ist, die aus (3.) dadurch hervorgeht, dass man darin $b_2, b_3, b_4, \cdots$ sämmtlich durch M ersetzt. (5.) ist aber nach dem Vorigen die Umkehrung von

$$(6.) \quad z = x - Mx^2 - Mx^3 - Mx^4 - \cdots = x - M\frac{x^2}{1-x},$$

d. h. die Entwicklung für einen der beiden Werthe von

$$(7.) \qquad x = \frac{z + 1 \pm \sqrt{(z+1)^2 - 4(M+1)z}}{2(M+1)}$$
$$= \frac{z + 1 \pm \sqrt{1 - 2(2M+1)z + z^2}}{2(M+1)}.$$

Dass sich aber (7.) in der Umgebung von $z = 0$ in eine convergente Potenzreihe entwickeln lässt, geht aus § 26, 4 unmittelbar hervor, und zwar ist ersichtlich, dass für das eine Zeichen die Entwicklung mit z anfängt; die letztere ist die für uns in Betracht kommende. Dieselbe muss mit der supponirten Reihe (5.) identisch sein, da nur *eine* Entwicklung möglich ist, wenn man die Umkehrungsreihe mit dem Gliede z beginnt. Hiermit haben wir den Satz erwiesen:

Ist $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ eine in der Umgebung von $x = 0$ convergente Potenzreihe und ist a_1 von Null verschieden, so lässt sich einer der Umkehrungswerthe x derselben in der Umgebung von $z = \frac{y - a_0}{a_1} = 0$ in eine nach Potenzen von z oder $y - a_0$ fortschreitende, mit dem Gliede z beginnende Potenzreihe entwickeln.

Es muss besonders betont werden, dass im Allgemeinen noch andere Umkehrungsentwicklungen möglich sind, wenn man in (3.) mit einem constanten Gliede beginnt; die Umkehrung braucht eben keine *eindeutige* Function von y zu sein.

2. Wenn $a_1 = 0$ ist, sind die vorigen Schlüsse nicht

mehr zulässig und müssen durch andere ersetzt werden. Ist a_k der erste nach a_0 nicht verschwindende Coefficient der Reihe, so haben wir

$$(8.)\qquad y = a_0 + a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \cdots,$$

also

$$(9.)\qquad z = \frac{y - a_0}{a_k} = x^k + \frac{a_{k+1}}{a_k} x^{k+1} + \frac{a_{k+2}}{a_k} x^{k+2} + \cdots$$
$$= x^k - b_{k+1} x^{k+1} - b_{k+2} x^{k+2} - \cdots$$
$$= x^k (1 - b_{k+1} x - b_{k+2} x^2 - \cdots$$

oder

$$z^{\frac{1}{k}} = x(1 - b_{k+1} x - b_{k+2} x^2 - \cdots)^{\frac{1}{k}},$$

also, wenn wir die Wurzelausziehung rechts nach § 26, 4 ausführen, für *einen* der Werthe von $z^{\frac{1}{k}}$:

$$(10.)\qquad z^{\frac{1}{k}} = x - d_2 x^2 - d_3 x^3 - \cdots,$$

woraus mit Hülfe unserer ersten Entwicklung sich für x eine nach Potenzen von $z^{\frac{1}{k}}$ fortschreitende Reihe ergiebt:

$$(11.)\qquad x = z^{\frac{1}{k}} + a_2 z^{\frac{2}{k}} + a_3 z^{\frac{3}{k}} + \cdots.$$

Ist also der erste in (1.) *nach* a_0 *nicht verschwindende Coefficient der* k^{te}, *so ist die Umkehrung (resp. ein Theil dieser Umkehrung) der Reihe in der Umgebung von* $z = 0$ *k-deutig und lässt sich in eine nach Potenzen von* $z^{\frac{1}{k}}$ *fortschreitende, mit* $z^{\frac{1}{k}}$ *beginnende Reihe entwickeln, in der wir für* $z^{\frac{1}{k}}$ *nach einander (nicht gleichzeitig in verschiedenen Gliedern) die k diesem Ausdruck zukommenden Werthe einsetzen dürfen.*

3. Seien in der Reihe

$$(12.)\qquad a = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \cdots$$

$a, a_1, a_2, a_3, \cdots$ Potenzreihen (welche, wie die gesammte Reihe, auch abbrechen dürfen) von x, die in einem Convergenzkreise von nicht unendlich kleiner Ausdehnung *alle* convergiren, während sie natürlich theilweise einen weiteren Convergenzbezirk haben dürfen; dabei möge a kein von x freies Glied

enthalten, also mit x verschwinden, während bei a_1 das Gegentheil stattfinde. Durch eine einfache Transformation werden wir es dann wieder dahin bringen können, dass die Reihen $a, a_1, a_2, a_3, \cdots$ mindestens für $|x| \leqq 1$ convergiren; ferner wird durch eine Transformation von y bewirkt werden können, dass die rechte Seite von (12.) für $|y| \leqq 1$ und $|x| \leqq 1$ unbedingt convergirt. Da nach diesen Umwandlungen die Voraussetzung erlaubt ist, dass die absoluten Beträge der Grössen $a, a_1, a_2, \cdots$ unter einer gewissen endlichen Grenze liegen, so wird es nach 1. möglich sein, eine Reihe

$$(13.)\qquad y = \frac{a}{a_1} + b_2\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 + b_3\left(\frac{a}{a_1}\right)^3 + \cdots$$

aufzustellen, deren Coefficienten $b_2, b_3, \ldots$ ganze Functionen der Grössen $\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}, \ldots$ sind, und die für hinlänglich kleine a, d. h. für hinlänglich kleine x convergirt. Da in a_1 das constante Glied von Null verschieden sein soll, so können wir nach § 26, 2 $\frac{a}{a_1}, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}, \ldots$ innerhalb eines gewissen Bezirks in Potenzreihen nach x entwickeln, und es folgt nach § 10 weiter, dass nach Einsetzung dieser Reihen *ein* Werth von y sich als eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe darstellen lässt, der das constante Glied fehlt. — Ist $a_1 = 0$, so haben wir entsprechende Verhältnisse wie unter 1.

§ 28.

Entwicklung der algebraischen Functionen in Potenzreihen.

1. Die Untersuchungen des vorigen Paragraphen geben uns die Mittel an die Hand, jede algebraische Function y, die durch eine irreductible Gleichung

$$(1.)\qquad f(y, x) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_n y^n = 0$$

definirt ist, worin die a_k ganze Functionen von x sind, in jedem im Endlichen gelegenen Punkte, die Verzweigungs- und Unendlichkeitspunkte ausgenommen, in eine Potenzreihe zu entwickeln. Zunächst können wir die Gleichung (1.) durch eine doppelte Substitution $x = x' + \alpha$, $y = y' + \beta$ derart in eine neue Gleichung

(2.) $f_1(y', x') = a_0' + a_1' y' + a_2' y'^2 + \cdots + a_n' y'^n = 0$

umformen, dass x' und y' gleichzeitig verschwinden, d. h. dass

$$a_0' = b_1 x' + b_2 x'^2 + \cdots$$

ist; wir brauchen zu diesem Zwecke β nach *beliebiger* Annahme von α nur so zu bestimmen, dass $f(\beta, \alpha) = 0$ wird. Verschwindet nun a_0' für $x = 0$ *nicht*, so können wir nach § 27, 3 y' als Potenzreihe von x', also y in der Form

(3.) $$y = \beta + b_1(x - \alpha) + b_2(x - \alpha)^2 + \cdots$$

darstellen. Da für β im Allgemeinen n verschiedene Werthe existiren, so erhalten wir auf diese Art n verschiedene Entwicklungen nach $x - \alpha$, die den n Zweigen der Function y entsprechen. Übrigens hat es theoretisch keine Schwierigkeit, durch geeignete Fortsetzung *einer* Reihe (3.) zu allen übrigen zu gelangen.

2. Wenn a_1' für $x = 0$ oder identisch verschwindet, ist diese Entwicklung nicht mehr möglich; in diesem Falle geht (2.) für $x = \alpha$, d. h. $x' = 0$ in

(4.) $$f_1(y', 0) = A_2' y'^2 + d_3' y'^3 + \cdots + A_n' y'^n = 0$$

oder

(5.) $$A_2'(y - \beta)^2 + A_3'(y - \beta)^3 + \cdots + A_n'(y - \beta)^n = 0$$

über, eine Gleichung, welche die Lösung $y = \beta$ mindestens zweimal besitzt; y nimmt also für $x = a$ denselben Werth mehrfach an, d. h. $x = \alpha$ ist ein *Verzweigungspunkt* der Function y. Die Entwicklung wird demnach nur in *Verzweigungspunkten* (von *Unendlichkeitspunkten* natürlich abgesehen) und auch hier nur für diejenigen Zweige von y, die daselbst zusammenfallen, nicht möglich. Es ist unsere Absicht nicht, diesen Fall weiter zu verfolgen; es genüge zu bemerken, dass in ähnlicher Weise wie in den vorigen Paragraphen hier Entwicklungen nach *gebrochnen* Potenzen angewandt werden können.

§ 29.

Die transcendenten ganzen Functionen.

1. Während eine unendliche Potenzreihe, die innerhalb eines endlichen Kreises convergirt, nur ausnahmsweise allein eine vollständige analytische Function darstellt, vielmehr erst

mit anderen Potenzreihen zusammengenommen eine solche repräsentirt, bildet die für alle endlichen x convergirende Potenzreihe ein in sich abgeschlossenes Ganze; wir nennen eine solche, weil sie mit den algebraischen ganzen Functionen die grösste Analogie zeigt, eine *transcendente ganze Function.*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

ist jedenfalls eine solche, wenn $\frac{|a_{\omega+1}|}{|a_\omega|} = 0$ ist.

2. Der Punkt $x = \infty$ ist für die transcendente ganze Function ein *wesentlicher* Unstetigkeitspunkt; $f(x)$ wird in demselben schlechtweg unbestimmt.

3. Lehrsatz: *Jede transcendente ganze Function $f(x)$ nimmt für geeignete, hinlänglich grosse x Werthe an, die jede vorgelegte endliche Grösse überschreiten.*

Beweis: Nach § 22, 7 ist

$$\frac{1}{\omega} \sum_1^{\omega} {}^k \frac{f(r\alpha_k)}{\alpha_k{}^\mu} = a_\mu r^\mu,$$

und wir folgerten hieraus an der angeführten Stelle, dass $|a_\mu| r^\mu$ nicht grösser sein kann, als der grösste absolute Betrag M, den irgend ein $f(r\alpha_k)$ erreicht. Läge nun M für noch so grosse r unter einer gewissen endlichen Grenze M_1, so wäre das Gleiche mit $|a_\mu| r^\mu$ der Fall; es müsste also

$$|a_\mu| r^\mu \leqq M_1 \quad \text{oder} \quad |a_\mu| \leqq \frac{M_1}{r^\mu}$$

sein für noch so grosse r, d. h. es wäre

$$a_\mu = 0.$$

Eine transcendente ganze Function, deren Werthe für noch so grosse x unter einer endlichen Grösse bleiben, muss daher eine Constante sein.

Zusatz: *Auch $\frac{f(x)}{x^n}$ muss für geeignete grosse x über jede Grenze wachsen.* Denn dieser Ausdruck zerfällt in eine transcendente ganze Function, für die das eben Bewiesene gilt, und in Glieder mit negativen Potenzen von x, die sich mit wachsendem x der Null nähern. — Wir schliessen hieraus,

dass $f(x)$ für geeignete grosse x stärker ins Unendliche wächst, wie jede noch so hohe Potenz von x.

4. *Jede eindeutige Function, die in allen im Endlichen gelegenen Punkten den Charakter einer analytischen Function besitzt, ist eine (algebraische oder transcendente) ganze Function.* Dies folgt aus § 22, 7. Soll dieselbe ins Besondere für $x = \infty$ nicht wesentlich unstetig, sondern nur von endlicher Ordnung unendlich werden, so muss sie eine *algebraische* ganze Function sein.

5. Jede analytische Function, die im Endlichen keine singulären Punkte besitzt und für beliebig grosse x stets unter einer endlichen Grenze bleibt, kann nur eine Constante sein. (Folgt aus 3. und 4.)

6. *Eine analytische Function, die überhaupt keinen singulären Punkt besitzt, kann nur eine Constante sein*; denn sie ist zunächst nach 4. eine ganze Function, und eine solche ist im Unendlichen immer unstetig, wenn sie sich nicht auf eine Constante reducirt.

7. Als eine der wichtigsten Eigenschaften der algebraischen ganzen Functionen hatten wir deren Zerlegbarkeit in lineare Factoren kennen gelernt; es liegt daher die Frage nahe: können wir die bezüglichen Sätze auch auf die *transcendenten* ganzen Functionen übertragen, oder treten hier andere Verhältnisse ein? Zu diesem Zwecke vergegenwärtigen wir uns nochmals den Beweis dafür, dass jede algebraische ganze Function mindestens *einen* Nullwerth besitzt (§ 3, 2). Dieser Beweis stützt sich wesentlich auf die Thatsache, dass durch hinlängliche Vergrösserung des x das höchste Glied einer solchen Function dem absoluten Betrage nach beliebig grösser als die Summe der übrigen gemacht werden kann. Da nun bei der unendlichen Potenzreihe ein höchstes Glied gar nicht vorhanden ist, vielmehr die Glieder einen desto geringeren Einfluss besitzen, je höher ihr Grad ist, so ist es klar, dass jener Beweis auf transcendente ganze Functionen nicht ausgedehnt werden kann. In der That werden wir später transcendente ganze Functionen kennen lernen, die für kein endliches x verschwinden; immerhin kann man auch

diesen unendlich viele Nullpunkte beimessen, die sich in dem Punkte $x = \infty$ concentriren.

8. Wesentlich verschieden von der eben erörterten Frage ist die folgende: *Wenn die transcendente ganze Function* $f(x)$ *für gewisse Werthe* $x = \alpha_1, \alpha_2$ *u. s. w. verschwindet, müssen sich dann von derselben* *lineare* *Factoren* $x - \alpha_1, x - \alpha_2$ *u. s. w., oder, was auf dasselbe hinauskommt, Factoren* $1 - \frac{x}{\alpha_1}, 1 - \frac{x}{\alpha_2}$ *u. s. w. absondern lassen?* Dabei muss vor allen Dingen genauer festgesetzt werden, was wir unter dem Absondern eines linearen Factors bei $f(x)$ verstehen wollen. Man kann nämlich $\frac{f(x)}{1 - \frac{x}{\alpha}}$ nach Früherem immer wieder als Potenzreihe darstellen; doch hat dieselbe nur einen beschränkten Convergenzbezirk. Wir sprechen daher jetzt präciser den folgenden Lehrsatz aus:

Verschwindet die transcendente ganze Function $f(x)$ *für* $x = \alpha$, *so ist* $\frac{f(x)}{1 - \frac{x}{\alpha}}$ *wieder eine transcendente ganze Function.*

Beweis: Nach § 21, 1 können wir $f(x)$ in eine ebenfalls für alle endlichen x convergirende Reihe verwandeln, die nach Potenzen von $x + a$ fortschreitet, wenn a eine beliebige endliche Grösse bedeutet. Wir dürfen daher

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$
$$= b_0 + b_1(x - \alpha) + b_2(x - \alpha)^2 + \cdots$$

setzen. Da nun $f(\alpha) = 0$ sein soll, so wird $b_0 = 0$ sein müssen, d. h. es ist

$$f(x) = (x - \alpha)[b_1 + b_2(x - \alpha) + b_3(x - \alpha)^2 + \cdots]$$
$$= -\alpha\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)[b_1 + b_2(x - \alpha) + b_3(x - \alpha)^2 + \cdots],$$

also

$$\frac{f(x)}{1 - \frac{x}{\alpha}} = -\alpha[b_1 + b_2(x - \alpha) + b_3(x - \alpha)^2 + \cdots].$$

Da sich aber die eingeklammerte, für alle endlichen x convergirende Reihe wieder in eine ebensolche nach Potenzen von x fortschreitende zurückverwandeln lässt, so ist unser Satz bewiesen.

9. Eine transcendente ganze Function kann nicht unendlich viele „Wurzeln“ besitzen, deren absolute Beträge unterhalb einer bestimmten endlichen Grösse liegen. Dies folgt aus § 24, 4*). *Hat also eine transcendente ganze Function unendlich viele Wurzeln, so müssen sich dieselben ins Unendliche erstrecken;* man kann dieselben in eine Reihe

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \cdots$$

ordnen, derart dass

$$|\alpha_{k+1}| \geqq |\alpha_k|$$

ist.

10. Man kann nun in dem letzteren Falle aus $f(x)$ nach und nach die Factoren $1 - \frac{x}{\alpha_1}, 1 - \frac{x}{\alpha_2}, 1 - \frac{x}{\alpha_3}, \cdots, 1 - \frac{x}{\alpha_k}$ absondern und behält immer noch eine für beliebige endliche x convergente Potenzreihe übrig. Der Schluss liegt sehr nahe, dass man auf diese Weise nach und nach $f(x)$ in ein unendliches Product

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha_3}\right) \cdots \varphi(x)$$

umwandeln kann, worin $\varphi(x)$ eine nirgends im Endlichen verschwindende transcendente ganze Function (eventuell natürlich auch eine Constante) bezeichnet. Allein dieser Schluss ist durchaus falsch und beweist nur, wie vorsichtig man beim Übergange vom Endlichen zum Unendlichen sein muss. Allerdings ist bei der Absonderung einer endlichen Zahl solcher Factoren der übrig bleibende Factor eine für alle endlichen x convergirende Potenzreihe, aber es ist sehr wohl möglich, dass bei der unendlichen Fortsetzung dieses Verfahrens der Werth der Potenzreihe für endliche x sich der Null nähert

*) Dass auch nicht unendlich viele *gleiche* Wurzeln möglich sind, erkennt man folgendermassen. Es könnte in diesem Falle die Reihe in die Form

$$(x - a)^\infty [a_0 + a_1 (x - a) + a_2 (x - a)^2 + \cdots]$$

gebracht werden; da aber $(x - a)^\infty$ für jedes endliche, von a verschiedene x unendlich wird, so müssten die a_k alle verschwindend klein sein u. s. w.

oder über jede endliche Grösse wächst. Häufig kommt es vor, dass ein in der beschriebenen Weise gebildetes Product nur bedingt convergirt, ja sogar auch, dass es überhaupt nicht convergirt, wie man es auch anordnen mag. Erst später wird es uns möglich sein zu zeigen, dass sich in allen Fällen eine *modificirte* Productentwicklung dadurch herstellen lässt, dass man jeden Factor noch mit einer nirgends im Endlichen verschwindenden ganzen transcendenten Function multiplicirt.

11. Verschwindet die transcendente ganze Function $f(x)$ für kein endliches x, so ist auch ihr reciproker Werth $\frac{1}{f(x)}$ eine transcendente ganze Function von demselben Charakter; denn nach § 26, 2 trägt dieser Ausdruck für jedes endliche x den Charakter einer ganzen Function, woraus mit Hülfe von § 22, 7 das Weitere folgt.

§ 30.

Die transcendenten rationalen und die erweiterten algebraischen Functionen.

1. Der Quotient zweier transcendenten ganzen Functionen, von denen die eine auch durch eine algebraische ganze Function ersetzt sein darf:

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots} \quad . \tag{1.}$$

heisst eine *transcendente rationale Function.* Dieselbe hat einen wesentlichen Unstetigkeitspunkt, nämlich $x = \infty$; ausserwesentlich unstetig wird sie für die Nullwerthe des Nenners, da bei letzterem ein Factor $x - \alpha$ nur in einer endlichen Potenz auftreten kann (§ 29, 9).

2. Wird der Nenner einer transcendenten rationalen Function $f(x)$ für kein endliches x Null, so lässt sich $f(x)$ auch als transcendente ganze Function darstellen (§ 29, 11).

3. Eine transcendente rationale Function ist überall, ausser für $x = \infty$ und die Nullpunkte des Nenners, eine *analytische* Function (§ 26, 2).

4. Wir sind vorläufig noch nicht im Stande, den fundamentalen Satz zu beweisen: *Jede eindeutige Function* $f(x)$, *die*

für $x = \infty$ *wesentlich unstetig und ausserdem in einer endlichen oder unendlichen Reihe von Punkten*

$$a_1, a_2, a_3, \cdots,$$

wobei $|a_{k+1}| \geqq |a|_k$ *und* $\frac{1}{|a_\omega|} = 0$ *ist, von endlicher ganzzahliger Ordnung unendlich wird, sonst aber überall den Charakter einer ganzen Function trägt, ist eine transcendente rationale Function.* Später werden wir den Beweis hierfür nachtragen. Vorläufig wollen wir nur darthun, dass dieser Satz statthat, wenn die Zahl der ausserwesentlichen Unstetigkeitspunkte eine endliche ist. Sind nämlich die letzteren

$$a_1, a_2, \cdots a_n,$$

wovon auch mehrere zusammenfallen können (sodass wir den Fall des Unendlichwerdens von höherer als der ersten Ordnung nicht weiter zu berücksichtigen brauchen), so ist

$$(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) f(x)$$

eine transcendente ganze Function, woraus die Behauptung folgt. Wird die weitere Bedingung beigefügt, dass der Punkt $x = \infty$ kein wesentlicher, sondern höchstens ein *ausserwesentlicher* Unstetigkeitspunkt sein soll, so ist $f(x)$ eine *algebraische rationale Function.*

5. Es liegt nahe, aus der Analogie mit den algebraischen rationalen Functionen die Vermuthung zu schöpfen, dass eine transcendente rationale Function, welche in den Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ von der $k_1, k_2, k_3 \ldots$ ten Ordnung unendlich wird, sich in die Form

$$\begin{aligned}(2.)\qquad f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots \\ + \frac{B_1}{1 - \frac{x}{\alpha_1}} + \frac{C_1}{\left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right)^2} + \cdots + \frac{F_1}{\left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right)^{k_1}} \\ + \frac{B_2}{1 - \frac{x}{\alpha_2}} + \frac{C_2}{\left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right)^2} + \cdots + \frac{G_2}{\left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right)^{k_2}} \\ + \cdots,\end{aligned}$$

setzen, d. h. sich als Summe einer transcendenten ganzen Function und einer *unendlichen Partialbruchreihe* darstellen lässt. In Wirklichkeit trifft dies jedoch nur vereinzelt zu.

In anderen Fällen convergirt die supponirte Reihe gar nicht oder nur bedingt; es lässt sich indessen zeigen, dass sie durch ganz analoge Mittel, wie sie beim unendlichen Producte anzuwenden sind, immer convergent gemacht werden kann, sei es, dass man zu jedem Gliede eine geeignete Constante, sei es, dass man zu jedem eine passende nirgends im Endlichen Null oder unendlich werdende Function hinzufügen muss. — Wenn es übrigens gelingt, eine convergente Partialbruchreihe $\varphi(x)$ (in irgend einer der angedeuteten Formen) herzustellen, welche in denselben Punkten und hier in derselben Weise unendlich wird, wie $f(x)$, derart dass $f(\alpha_k) - \varphi(\alpha_k) = 0$ ist, so ist $f(x) - \varphi(x)$ eine transcendente oder algebraische ganze Function; denn die ausserwesentlichen Unstetigkeiten fallen bei dieser Differenz weg.

6. Lehrsatz: *Wenn zwei unbedingt convergente Reihen*

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{3.}$$
$$+ \frac{b_1}{1-\frac{x}{\alpha_1}} + \frac{c_1}{\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)^2} + \cdots + \frac{f_1}{\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)^{k_1}}$$
$$+ \frac{b_2}{1-\frac{x}{\alpha_2}} + \frac{c_2}{\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)^2} + \cdots + \frac{g_2}{\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)^{k_2}}$$
$$+ \cdots$$

und

$$\Phi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots \tag{4.}$$
$$+ \frac{B_1}{1-\frac{x}{\alpha_1}} + \frac{C_1}{\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)^2} + \cdots + \frac{F_1}{\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)^{k_1}}$$
$$+ \frac{B_2}{1-\frac{x}{\alpha_2}} + \frac{C_2}{\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)^2} + \cdots + \frac{G_2}{\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)^{k_2}}$$
$$+ \cdots$$

für beliebige x übereinstimmen, so sind sie auch formell identisch.

Beweis: Dass die Nenner in (3.) und (4.) die gleichen sein müssen, wie auch in der obigen Form bereits angenommen ist, liegt auf der Hand. Lassen wir nun x sich der Grösse α_1 beliebig nähern, so wird hierdurch bewirkt

werden können, dass $\frac{f_1}{\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)^{k_1}}$ und $\frac{F_1}{\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)^{k_1}}$ alle übrigen Glieder beliebig viel übertreffen; wir schliessen hieraus, dass

$$f_1 = F_1$$

ist. Wenn wir nun aus der Gleichung $\varphi(x) = \Phi(x)$ die beiden genannten Glieder weglassen, können wir in derselben Weise $\frac{e_1}{\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)^{k_1-1}}$ und $\frac{E_1}{\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)^{k_1-1}}$ vergleichen und $e_1 = E_1$ finden u. s. w. Nachdem durch Fortsetzung dieser Schlüsse die Identität sämmtlicher Partialbrüche dargethan ist, haben wir die identische Gleichung

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots,$$

aus der nach § 21, 4 die Gleichheit der einzelnen Coefficienten folgt.

Auch für Partialbruchreihen in modificirter Form lässt sich Entsprechendes beweisen.

7. Bezeichnet $F(y, x)$ eine für endliche y und x convergente doppelte Potenzreihe, so ist durch die Gleichung

$$F(y, x) = 0$$

eine im Allgemeinen unendlich vieldeutige Function $y = f(x)$ definirt, die als eine Erweiterung der algebraischen anzusehen ist. Aus § 27, 1 geht hervor, dass $f(x)$ im Allgemeinen den Charakter einer ganzen Function trägt. Da wir es in der Folge jedoch nur mit ganz speciellen Fällen solcher Functionen zu thun haben, können wir uns einer weiteren Untersuchung über dieselben enthalten.

§ 31.

Erweiterung der bis jetzt eingeführten transcendenten Functionen.

1. Setzt man in der transcendenten ganzen Function

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

$x = \frac{1}{z-a}$, so erhält man eine Function

$$F(z) = f\left(\frac{1}{z-a}\right) = a_0 + \frac{a_1}{z-a} + \frac{a_2}{(z-a)^2} + \cdots,$$

die in $z = a$ einen wesentlichen Unstetigkeitspunkt besitzt, sonst aber überall endlich und stetig ist. Die Function $F(z)$ kann nicht etwa als eine transcendente rationale Function angesehen werden, da sie sonst $z = \infty$, nicht $z = a$ zum wesentlichen Unstetigkeitspunkte haben müsste. Wir haben daher hier ein Vorkommniss, zu dem sich bei den *algebraischen* rationalen Functionen kein Analogon findet. Übrigens besitzt $F(z)$ überall den Charakter einer ganzen Function, den Punkt $z = a$ ausgenommen; denn in sämmtlichen anderen Punkten b kann man die einzelnen Glieder von $F(z)$ nach Potenzen von $z - b$ $\left(\text{im Punkte } z = \infty \text{ nach Potenzen von } \frac{1}{z}\right)$ entwickeln und dann die entstehende Doppelreihe nach § 10 umordnen.

2. Es hat nun keine Schwierigkeit, Functionen mit beliebig vielen wesentlichen Unstetigkeitspunkten $a_1, a_2, \ldots a_n$ zu bilden; sind nämlich $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ beliebige transcendente ganze Functionen, so ist

$$f_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right) + f_2\left(\frac{1}{x-a_2}\right) + \cdots + f_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$$

eine solche*). Man sieht indessen, dass man auch auf mannichfache andere Arten zu derartigen Functionen gelangen kann; ist z. B. $\varphi(x)$ eine rationale Function, die gerade in den Punkten $a_1, a_2, \ldots a_n$ unendlich wird, während $f(x)$ eine transcendente ganze Function ist, so ist auch $f[\varphi(x)]$ eine Function der gewünschten Art. Wie man *alle* im Übrigen analytische Functionen findet, welche $a_1, a_2, \ldots a_n$ zu wesentlichen Unstetigkeitspunkten haben, während sonst keine Singularitäten bei ihnen vorkommen, soll hier nicht auseinander gesetzt werden; wir verweisen in dieser Hinsicht auf die grundlegende Arbeit von Herrn Weierstrass in den Mathematischen Abhandlungen d. k. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, aus dem Jahre 1876; pag. 11 ff. — Dass man durch Quotientenbildung aus zwei Functionen der ein-

*) Ist $a_k = \infty$, so hat man nur $f_k(x)$ an Stelle von $f_k\left(\frac{1}{x-a_k}\right)$ einzufügen.



geführten Art zu einer Erweiterung der transcendenten rationalen Functionen gelangt, versteht sich von selbst.

In der Folge werden wir uns nur mit *einer* Art der neuen Functionen eingehender beschäftigen, die allein für die weiteren Entwicklungen von Wichtigkeit ist.

3. Eine Reihe

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + \frac{a_{-1}}{x} + \frac{a_{-2}}{x^2} + \frac{a_{-3}}{x^3} + \cdots, \tag{1.}$$

die nach positiven und negativen Potenzen von x fortschreitet, convergirt, wenn ihre beiden einzelnen Theile, der mit positiven und der mit negativen Potenzen, convergiren. Der Convergenzbezirk des ersten Theiles ist das Innere eines Kreises mit dem Centrum $x = 0$, während der zweite convergirt, wenn $\frac{1}{x}$ innerhalb eines anderen Kreises, also x *ausserhalb* eines solchen mit demselben Mittelpunkte liegt (vgl. Fig. 14). *Das Convergenzgebiet von $\varphi(x)$ ist somit das Innere eines Kreisrings, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt ist;* für die Ränder des Rings sind specielle Untersuchungen nöthig. Besonders merkwürdig ist der Fall, für den wir später ein Beispiel finden werden, dass sich der Convergenzkreisring zu einer einfachen Kreislinie zusammenzieht, auf der auch noch Divergenzpunkte liegen können. Der weitaus wichtigste Fall ist aber der, dass sich das Convergenzgebiet über alle endlichen x, $x = 0$ ausgenommen, erstreckt. Dies tritt u. A. ein, wenn $\frac{a_{\omega+1}}{a_\omega} = 0$ und $\frac{a_{-\omega-1}}{a_{-\omega}} = 0$ ist.

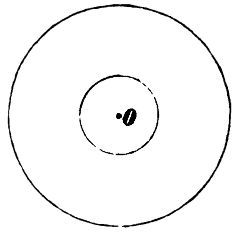


Fig. 14.

Wir nennen alsdann $\varphi(x)$ eine *transcendente ganze Function im weiteren Sinne;* dieselbe wird für $x = 0$ und $x = \infty$ wesentlich unstetig, während sie sonst überall den Charakter einer ganzen Function besitzt*).

*) Im Falle eines beschränkten Convergenzkreisringes ist $\varphi(x)$ im Innern desselben eine analytische Function, wie unmittelbar zu erweisen ist.

4. Lehrsatz: *Zwei Potenzreihen mit steigenden und fallenden Potenzen von x sind identisch, wenn sie für alle x übereinstimmen, die auf einem um den Nullpunkt beschriebenen und innerhalb des Convergenzbezirks befindlichen Kreise liegen.*

Beweis: Sind

$$\varphi_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + \frac{a_{-1}}{x} + \frac{a_{-2}}{x^2} + \cdots$$

und

$$\varphi_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + \frac{b_{-1}}{x} + \frac{b_{-2}}{x^2} + \cdots$$

die fraglichen Reihen und bezeichnet α_k eine n^{te} Einheitswurzel, r den Radius des Kreises, auf dem die Übereinstimmung stattfinden soll, so dass wir

$$\varphi_1(r\alpha_k) = \varphi_2(r\alpha_k)$$

haben, so ist auch

$$\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}{}^k (r\alpha_k)^s \varphi_1(r\alpha_k) = \frac{1}{n}\sum_0^{n-1}{}^k (r\alpha_k)^s \varphi_2(r\alpha_k),$$

worin s positiv oder negativ sein mag. In derselben Weise wie in § 22, 5 finden wir, wenn wir n ins Unendliche wachsen lassen,

$$\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}{}^k (r\alpha_k)^s \varphi_1(r\alpha_k) = a_{-s}$$

und

$$\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}{}^k (r\alpha_k)^s \varphi_2(r\alpha_k) = b_{-s},$$

also

$$a_{-s} = b_{-s}.$$

Sämmtliche Coefficienten beider Reihen stimmen daher überein.

5. Lehrsatz: *Verschwindet die transcendente ganze Function im weiteren Sinne*

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + \frac{a_{-1}}{x} + \frac{a_{-2}}{x^2} + \cdots$$

für $x = a$, so ist

$$\frac{\varphi(x)}{1 - \frac{x}{a}} \text{ oder } \frac{\varphi(x)}{1 - \frac{a}{x}}$$

eine ebensolche Function.

Beweis: Jedenfalls lässt sich eine Constante c so bestimmen, dass

$$c + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

für $x = a$ verschwindet; wir brauchen eben nur $c = -a_0 - a_1 a - a_2 a^2 - \ldots$ zu nehmen. Da nun

$$\varphi(x) = c + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$
$$- c + \frac{a_{-1}}{x} + \frac{a_{-2}}{x^2} + \cdots$$

und $\varphi(a) = 0$ ist, so wird auch

$$- c + \frac{a_{-1}}{x} + \frac{a_{-2}}{x^2} + \cdots$$

für $x = a$ verschwinden. Nach § 29, 8 können wir daher

$$\varphi(x) = \left(1 - \frac{x}{a}\right)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots)$$
$$+ \left(1 - \frac{a}{x}\right)\left(b_{-1} + \frac{b_{-2}}{x} + \frac{b_{-3}}{x^2} + \cdots\right)$$
$$= \left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots\right.$$
$$\left. - \frac{a b_{-1}}{x} - \frac{a b_{-2}}{x^2} - \frac{a b_{-3}}{x^3} - \cdots\right)$$
$$= \left(1 - \frac{a}{x}\right)\left(- \frac{b_0 x}{a} - \frac{b_1 x^2}{a} - \frac{b_2 x^3}{a} - \cdots\right.$$
$$\left. + b_{-1} + \frac{b_{-2}}{x} + \frac{b_{-3}}{x^2} + \cdots\right)$$

setzen, wo die eingeklammerten Reihen transcendente ganze Functionen im weiteren Sinne sind. In Bezug auf unendliche Productentwicklungen gelten wieder die gleichen Bemerkungen wie bei den gewöhnlichen transcendenten ganzen Functionen; übrigens wird die Convergenz des unendlichen Productes davon abhängen, in welcher Form man die einzelnen

Factoren wählt; bei einer *endlichen* Zahl von Factoren ist jedoch immer eine Umformung von $1 - \frac{x}{a}$ in $1 - \frac{a}{x}$ zulässig.

Es existiren auch transcendente ganze Functionen im weiteren Sinne, welche für kein endliches, von Null verschiedenes x verschwinden.

6. Was die Erweiterung des Convergenzgebietes einer nach steigenden und fallenden Potenzen fortlaufenden Reihe $\varphi(x)$ anlangt, so gilt derselbe Satz wie bei den einfachen Potenzreihen: *Der Convergenzkreisring erstreckt sich nach Innen und nach Aussen bis zum nächsten singulären Punkte.* Da nämlich für jeden Kreis, nach dessen Punkten die analytische Function $\varphi(x)$ durch *steigende* Potenzreihen fortgesetzt werden kann, in Folge derselben Betrachtungen wie in § 22, 5, 6 für positive und negative μ

$$\frac{1}{\omega}\sum_{1}^{\omega}{}_{k}\,\frac{\varphi(r\alpha_k)}{r^{\mu}\alpha_k^{\ \mu}} = a_{\mu},$$

also $|a_\mu|r^\mu$ unter einer gewissen endlichen Grösse gelegen ist, so folgt daraus, dass der Theil mit steigenden Potenzen auch für r, die bis zu der gezogenen oberen Grenze wachsen, convergent bleibt, während es dann für den anderen Theil selbstverständlich ist, da er desto besser convergirt, je grösser r ist. Andrerseits wird auch $|a_\mu|r^\mu$ für negative μ und bis zur unteren Grenze verkleinertem r eine gewisse endliche Grenze nicht übersteigen, woraus sich auch für solche r die Convergenz ergiebt.

7. Lehrsatz: *Jede eindeutige Function $f(x)$, welche für $x = 0$ und $x = \infty$ wesentlich unstetig wird, sonst aber überall den Charakter einer ganzen Function trägt, ist eine transcendente ganze Function im weiteren Sinne.*

Beweis: Setzen wir

$$\varphi_1(x) = \frac{f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)}{2},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)}{2},$$

also

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x),$$

so sind $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ Functionen von demselben Charakter wie $f(x)$ selbst, genügen aber ausserdem den Relationen

$$\varphi_1\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi_1(x)$$

und

$$\varphi_2\left(\frac{1}{x}\right) = -\varphi_2(x).$$

Setzen wir

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)\varphi_2(x) = \varphi_3(x),$$

so hat $\varphi_3(x)$ wieder den nämlichen Charakter wie $f(x)$ und befriedigt dieselbe Gleichung wie $\varphi_1(x)$, nämlich

$$\varphi_3\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi_3(x).$$

Substituiren wir nun

$$y = x + \frac{1}{x},$$

also

$$x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} - 1},$$

$$\frac{1}{x} = \frac{y}{2} \mp \sqrt{\frac{y^2}{4} - 1},$$

so wird y unendlich für $x = 0$ und $x = \infty$, bleibt aber im Übrigen endlich;

$$f(x) = f\left(\frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} - 1}\right) \text{ und } f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{y}{2} \mp \sqrt{\frac{y^2}{4} - 1}\right)$$

sind also Functionen, die nur für *unendliche* y wesentlich unstetig werden. Weiter werden sich aus

$$\varphi_1(x) = \frac{f\left(\frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} - 1}\right) + f\left(\frac{y}{2} \mp \sqrt{\frac{y^2}{4} - 1}\right)}{2}$$

die Irrationalitäten bei geeigneter Form der Entwicklung herausheben, wie die folgende Betrachtung zeigt. Denken wir uns unter a eine beliebig grosse *reelle positive* Zahl, so wird die Entwicklung von $f(x)$ im Punkte $x = a$ nach steigenden Potenzen von $x - a$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots$$

in einem Kreise convergiren, der $x = a$ zum Mittelpunkte hat und bis zum nächsten singulären Punkte, d. h. bis zum Nullpunkte reicht. Man sieht ein, dass a so gross gewählt werden kann, dass dieser Convergenzkreis jeden beliebig angenommenen Punkt derjenigen Halbebene, welche rechts von der Axe der rein imaginären Zahlen liegt, umfasst (s. Fig. 15). Liegt nun

$$x = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

in dieser Halbebene, so wird dies auch mit

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\varrho}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \frac{1}{\varrho}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]$$

der Fall sein, und es ist klar, dass bei genügend grossem a sowohl x als auch $\frac{1}{x}$ in den Convergenzkreis der Reihe fallen.

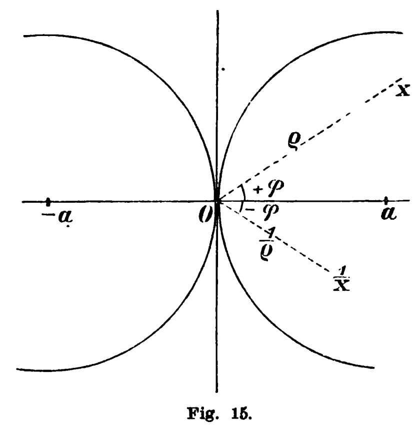


Fig. 15.

Nimmt man $-a$ als Mittelpunkt an, so ist dasselbe für solche x möglich, die auf der linken Seite der Axe der rein imaginären Zahlen liegen. Für Punkte auf der letzteren Axe selbst ist allerdings keine Reihenentwicklung nach steigenden Potenzen möglich, welche x und $\frac{1}{x}$ *gleichzeitig* in ihren Convergenzkreis einschliesst; allein wegen der Eindeutigkeit und Stetigkeit von $f(x)$, wie auch der Eindeutigkeit von $\frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} - 1}$ auf dieser Linie werden sich die Reihenentwicklungen nach Potenzen von $y - \alpha$, die sich hier nach § 26, 5 herstellen lassen, unmittelbar an die für die benachbarten Punkte der eben abgegrenzten Gebiete anschliessen und den Übergang zwischen diesen vermitteln.

Haben wir nun a so gewählt, dass für bestimmte x

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots$$

und

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + a_1\left(\frac{1}{x} - a\right) + a_2\left(\frac{1}{x} - a\right)^2 + \cdots$$

gleichzeitig convergiren, so werden aus

$$\varphi_1(x) = \frac{f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)}{2} = a_0 + \frac{a_1}{2}\left[(x - a) + \left(\frac{1}{x} - a\right)\right]$$
$$+ \frac{a_2}{2}\left[(x - a)^2 + \left(\frac{1}{x} - a\right)^2\right]^2 + \cdots$$

bei Ersetzung von x und $\frac{1}{x}$ durch $\frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} - 1}$ und $\frac{y}{2} \mp \sqrt{\frac{y^2}{4} - 1}$ die Irrationalitäten herausfallen, da alle Glieder der Reihe in x und $\frac{1}{x}$ symmetrisch sind. Wir erkennen hieraus mit Hülfe von § 26, 5, dass

$$\varphi_1(x) = \varphi_1\left(\frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} - 1}\right)$$

eine *eindeutige analytische* Function von y ist, die für kein endliches y unstetig wird. Nehmen wir nun noch § 22, 7 zu Hülfe, so können wir folgern, dass für jedes *endliche* y

$$\varphi_1(x) = \varphi_1\left(\frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} - 1}\right) = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \cdots$$

gesetzt werden kann. Fügen wir $y = x + \frac{1}{x}$ ein, so erhalten wir

$$\varphi_1(x) = A_0 + A_1\left(x + \frac{1}{x}\right) + A_2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \cdots,$$

eine Reihe, die für *alle endlichen, von Null verschiedenen* x convergirt. Da diese Reihe also auch convergirt, wenn $|x|$ an Stelle von x gesetzt wird, so dürfen wir nach § 10 nach Ausmultiplicirung der Potenzen die Reihe umordnen und schreiben

$$\varphi_1(x) = B_0 + B_1\left(x + \frac{1}{x}\right) + B_2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \cdots.$$

In gleicher Weise zeigen wir, dass

$$\varphi_3(x) = \frac{\varphi_3(x) + \varphi_3\left(\frac{1}{x}\right)}{2} = C_0 + C_1\left(x + \frac{1}{x}\right) + C_2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \cdots,$$

also

$$\varphi_2(x) = \frac{C_0 + C_1\left(x + \frac{1}{x}\right) + C_2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \cdots}{x - \frac{1}{x}}$$

ist. Wir haben somit

$$f(x) = B_0 + B_1\left(x + \frac{1}{x}\right) + B_2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \cdots$$
$$+ \frac{C_0 + C_1\left(x + \frac{1}{x}\right) + C_2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \cdots}{x - \frac{1}{x}},$$

wo beide Reihen auf der rechten Seite für beliebige endliche, von Null verschiedene x convergiren. Bedenkt man, dass dieser Ausdruck nicht für alle endlichen, von Null verschiedenen x endlich sein kann, wenn nicht im zweiten Theile der rechten Seite der Zähler durch den Nenner dividirbar ist, so finden wir schliesslich nach geeigneter Zusammenfassung, dass

$$f(x) = D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \cdots$$
$$+ \frac{D_{-1}}{x} + \frac{D_{-2}}{x^2} + \cdots$$

eine *transcendente ganze Function im weiteren Sinne* ist.

8. Über die Quotienten zweier transcendenten Functionen im weiteren Sinne, die *transcendenten rationalen Functionen im weiteren Sinne,* gelten ganz analoge Betrachtungen wie für diejenigen im engeren Sinne. Auch hier sind Partialbruchzerlegungen unter den nämlichen Beschränkungen möglich, wobei noch zu bemerken ist, dass an Stelle von $\frac{a}{\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^k}$ auch $\frac{A}{\left(1 - \frac{\alpha}{x}\right)^k}$ treten kann (natürlich bei sonstiger Umgestaltung der Reihe). Bei einer endlichen Zahl von Gliedern ist die Wahl der einen oder anderen Form beliebig, bei einer unendlichen Zahl wird hierdurch die Convergenz der Reihe beeinflusst. Auf weitere Erörterungen über die Partialbruchentwicklung können wir hier verzichten, da wir doch darauf zurückzukommen haben werden.

Vierter Abschnitt.

Theorie der einfachen, linearen Periodicität.

§ 32.

Einführung der periodischen Functionen.

1. Im vorigen Abschnitte eröffnete sich uns ein Functionengebiet von unabsehbarem Umfange. Die Zahl der Mannichfaltigkeiten, die bei den analytischen Functionen auftreten können, ist eine unendlich grosse, und es ist undenkbar, dass diese Mannichfaltigkeiten durch Specialuntersuchungen auch nur annäherungsweise erschöpft werden könnten. Auch wird es keinen besonderen wissenschaftlichen Werth haben, aufs Geradewohl oder aus praktischen Rücksichten gewisse specielle Functionen aufzustellen und zu untersuchen; vielmehr tritt an uns die wichtige Frage heran: *welche transcendenten Functionen besitzen so hervorstechende Eigenschaften, dass ihre hervorragende Wichtigkeit sofort einleuchtet?* Auf diese Frage, die in ihrer Unbestimmtheit natürlich nicht mit apodiktischer Gewissheit erledigt werden kann, sind mehrfache Antworten gegeben worden. Nachdem die Theorie der sog. elliptischen Integrale zu sehr wichtigen neuen Functionen, den elliptischen Transcendenten geführt hatte, lag es nahe, die Aufgabe zu stellen: *Diejenigen Functionen (resp. deren Umkehrungen) zu entwickeln und zu untersuchen, deren Differentialquotienten algebraische Functionen sind.* Diese Aufgabestellung wies in der That der Entwicklung der Functionentheorie bis in die neueste Zeit ihre Richtung an und hat zur Auffindung der Abel'schen Functionen geführt. Die besonders durch Cauchy, Riemann

u. A. begründete eingehendere Theorie der complexen Integrale hat es möglich gemacht, auf diesem Wege auch die wesentlichsten analytischen Eigenschaften der fraglichen Functionen herzuleiten. Und doch wird jeder, der sich mit diesen Theorien beschäftigt hat, zugestehen müssen, dass jene Art der Einführung neuer Functionen keine naturgemässe ist. Wir müssen an dieser Stelle darauf verzichten, diese Behauptung eingehend zu begründen, da hierzu eben die Kenntniss jener Theorien als bekannt vorausgesetzt werden müsste; wir wollen nur hervorheben, dass ganz ähnliche Integrale zu wesentlich verschiedenen Functionen führen — man denke an die drei Gattungen elliptischer Integrale! —, dass man ins Besondere von den Abel'schen Integralen, die nur Functionen (im weitesten Sinne) *einer* Variabeln darstellen, auf einem recht künstlichen Wege zu den Abel'schen Functionen, die mehrere Variabeln enthalten, gelangt. Während also dieses Verfahren der Natürlichkeit ermangelt, sind andere Einführungsarten der bekannteren Functionen mehr oder weniger willkürlich. Diese Lücke hat den Verfasser zu Betrachtungen veranlasst, die von algebraischen Analogien ausgehen und die das Fundament der folgenden Darstellung der speciellen Functionentheorie bilden sollen.

2. Bei der Theorie der algebraischen Gleichungen bemerkten wir, dass die Lösung der Gleichungen, welche den vierten Grad übersteigen, im *Allgemeinen* nicht mit Hülfe der vier Species und von Wurzelausziehungen möglich ist, dass hingegen eine besondere Klasse von Gleichungen existirt, die eine recht einfache Lösung dieser Art gestatten: *die Abel-schen Gleichungen.* Liessen sich nämlich die sämmtlichen Lösungen einer Gleichung — um nur den einfachsten Fall zu recapituliren — in der Form $x_1, \vartheta_1(x_1), \vartheta_2(x_1), \ldots \vartheta_{n-1}(x_1)$ darstellen (§ 15), wobei $\vartheta_1(x)$ eine *eindeutige* Function bezeichnete und $\vartheta_n(x_1) = x_1$ sein musste, so war es möglich, die Lösungen mit Hülfe n^{ter} Wurzeln aus den Coefficienten zu berechnen. Wir können nun dieses Ergebniss algebraischer Untersuchung sehr leicht auf *rationale* (auch algebraische) Functionen übertragen. Bezeichnet $y = f(x)$ eine rationale Function, so lässt sich im Allgemeinen x nicht mit

Hülfe von Wurzelausziehungen u. s. w. als Function von y darstellen, sondern diese Umkehrung macht complicirtere Operationen nöthig; dagegen wird die algebraische Umkehrung immer möglich sein, wenn die Function n^{ten} Grades $f(x)$ der Bedingung

$$(1.) \qquad f(\vartheta_1(x)) = f(x)$$

genügt, wo $\vartheta_1(x)$ eine nebst ihrer Umkehrung eindeutige Function ist, deren n^{te} Iterirung (und keine frühere!) wieder x liefert. Von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugt man sich, wenn man in (1.) der Reihe nach statt x $\vartheta_1(x)$, $\vartheta_2(x)$ u. s. w. setzt; man erhält

$$f(\vartheta_2(x)) = f(\vartheta_1(x)) = f(x),$$

also schliesslich

$$y = f(x) = f(\vartheta_1(x)) = f(\vartheta_2(x)) = \cdots = f(\vartheta_{n-1}(x)),$$

so dass die n Umkehrungen von $y = f(x)$ durch

$$x, \ \vartheta_1(x), \ \vartheta_2(x), \ \ldots \ \vartheta_{n-1}(x)$$

dargestellt sind. *Die Umkehrung führt also auf die Lösung einer Abel'schen Gleichung, welche durch Ausziehung n^{ter} Wurzeln bewerkstelligt werden kann.* Ist der Grad von $f(x)$ der mn^{te}, so tritt eine § 15 entsprechende Reduction ein.

Es liegt nun ausserordentlich nahe, die für *algebraische* Functionen gewonnenen Resultate zu einer Analogie in der Theorie der *transcendenten* Function zu benutzen. Lassen wir die Bedingung fallen, dass $\vartheta_n(x) = x$ sein soll, so kann $y = f(x)$, welches der Bedingung (1.) genügt, keine rationale oder überhaupt algebraische Function mehr sein, da alsdann demselben y unendlich viele x entsprechen; $f(x)$ wird also, wenn es überhaupt existirt, eine *transcendente* Function sein müssen. Wir wollen nun eine Function $y = f(x)$, welche die Gleichung

$$f(\vartheta_1(x)) = f(x)$$

befriedigt, *eine periodische Function im weiteren Sinne*) oder auch kurzweg nur eine periodische Function,* im Gegensatze zu

---

*) Bisher war es nur üblich, den Namen periodische Function anzuwenden, wenn $\vartheta_1(x) = x + n$ ist, während man bei anderen $\vartheta_1(x)$ sagte, $f(x)$ sei eine Function *mit eindeutigen Transformationen in sich.*

später einzuführenden Functionen auch wohl *eine periodische Function erster Gattung* nennen.

Dabei wollen wir die Function $\vartheta_1(x)$ jetzt keiner weiteren Beschränkung unterwerfen, als dass wir sie als *algebraisch* voraussetzen; *mehrdeutige* $\vartheta_1(x)$ sind also principiell nicht ausgeschlossen. Aus der eben durchgeführten Betrachtung lässt sich vermuthen, dass die periodischen Functionen unter allen Transcendenten die erste Stelle einnehmen, und diese Vermuthung wird in der That vollständig gerechtfertigt; als wichtige Grundeigenschaft der einfacheren periodischen Functionen dürfen wir die erwarten, dass sie sich mit Hülfe von Wurzeln umkehren lassen, die allerdings einen unendlich hohen Grad besitzen und in unendlich grosser Zahl auftreten können.

Die folgende specielle Darstellung wird sich lediglich auf periodische Transcendenten und auf Functionen beschränken, die mit diesen in engem Zusammenhange stehen.

§ 33.

Das Functionaltheorem.

1. Wir wollen an dieser Stelle einen Satz einschalten, der den periodischen Functionen noch von einem ganz anderen Gesichtspunkte aus eine hervorragende Bedeutung verleiht. Wir fragen: *Für welche eindeutigen Functionen $f(x)$ besteht ein algebraisches Functionaltheorem, d. h. für beliebige x und y eine Gleichung*

$$f\left[\psi(x, y)\right] = \varphi\left[f(x), f(y)\right], \tag{1.}$$

worin φ und ψ algebraische Functionen zweier Variabeln bedeuten? Sind φ oder ψ mehrdeutige Functionen, so wird nur verlangt, dass die Gleichung (1.) für *je einen* irgendwie fixirten Werth derselben befriedigt ist. In Worten ausgesprochen lautet diese Frage: *Wann lässt sich eine eindeutige Function einer algebraischen Function zweier Variabeln algebraisch ausdrücken durch die Functionen der einfachen Variabeln?*

Zunächst ist unmittelbar klar, dass sämmtliche *algebraische,* speciell also auch alle *rationalen* Functionen einer Gleichung von der Form (1.) Genüge leisten, und zwar für beliebige ψ; denn $f\left[\psi(x, y)\right]$ ist dann eine algebraische Func-

tion von x und y, und an Stelle der letzteren kann man durch ein algebraisches Eliminationsverfahren $f(x)$ und $f(y)$ einführen. Es fragt sich nur, wann *transcendente* Functionen die Gleichung (1.) befriedigen; dabei wollen wir nicht voraussetzen, dass $f(x)$ analytisch ist, jedoch von der Annahme ausgehen, dass $f(x)$ für unendlich viele x den gleichen Werth annimmt, einzelne x etwa ausgenommen. Dann giebt es eine beliebige Zahl von Werthen $y_1, y_2, \dots y_n$, für welche

$$f(y_1) = f(y_2) = \cdots = f(y_n) = a \tag{2.}$$

ist, ohne dass $\psi(x, y_r) = \psi(x, y_s)$ wird; die Erfüllung der letzteren Bedingung macht deshalb keine Schwierigkeit, weil $\psi(x, y)$ als algebraische Function nur für eine *endliche* Zahl von y-Werthen den gleichen Werth annehmen kann, während unendlich viele y zur Befriedigung von (2.) zur Verfügung stehen. Ausserdem können wir n so gross annehmen, dass es die Zahl der verschiedenen Werthe von φ übersteigt. Wir haben nun

$$\begin{cases} \varphi\left[f(x), a\right] = f\left[\psi(x, y_1)\right] \\ \varphi\left[f(x), a\right] = f\left[\psi(x, y_2)\right] \\ \qquad\vdots \\ \varphi\left[f(x), a\right] = f\left[\psi(x, y_n)\right]; \end{cases} \tag{3.}$$

wegen der zuletzt gemachten Annahme werden aber mindestens 2 der in (3.) vorkommenden Werthe von $\varphi\left[f(x), a\right]$ identisch sein, so dass wir etwa

$$f\left[\psi(x, y_r)\right] = f\left[\psi(x, y_s)\right] \tag{4.}$$

erhalten. Betrachten wir nun $\psi(x, y_r)$ und $\psi(x, y_s)$ als Functionen der einzigen Variabeln x, während y_r und y_s numerische Constanten sind, und schreiben für erstere kürzer $\xi_1(x)$ und $\eta_1(x)$, so wird aus (4.)

$$f\left[\xi_1(x)\right] = f\left[\eta_1(x)\right],$$

oder, wenn wir x statt $\eta_1(x)$ schreiben und mit $\vartheta_1(x)$ eine neue algebraische Function bezeichnen, deren Bedeutung unmittelbar erhellt:

$$f\left[\vartheta_1(x)\right] = f(x), \tag{5.}$$

d. h. $f(x)$ ist eine periodische Function.

Wir haben also den fundamentalen Satz:

Wenn eine eindeutige transcendente Function $f(x)$, welche für unendlich viele x-Werthe den gleichen Werth annimmt, einer Gleichung von der Form (1.) *genügt, so ist sie periodisch.*

2. Ist $f(x)$ eine Function von endlicher Vieldeutigkeit, so werden diese Betrachtungen nicht wesentlich modificirt; dagegen lassen sie sich nicht auf *unendlich vieldeutige* Functionen ohne Weiteres übertragen. Zu den letzteren gehören auch die Umkehrungen der erstbesprochenen Functionen, und über diese beweisen wir folgenden

Lehrsatz: *Genügt $f(x)$ der Gleichung*

$$f\left[\psi(x, y)\right] = \varphi\left[f(x), f(y)\right], \tag{6.}$$

so befriedigt die Umkehrung $F(x)$ von $f(x)$ eine Gleichung derselben Art.

Beweis: Setzt man in (6.) $F(x)$ statt x, $F(y)$ statt y ein, so folgt, da $f\left[F(x)\right] = x$ ist,

$$f\left[\psi\left(F(x), F(y)\right)\right] = \varphi(x, y),$$

und wenn man von beiden Seiten die Function $F(x)$ nimmt:

$$F\left[f\left[\psi\left(F(x), F(y)\right)\right]\right] = \psi\left[F(x), F(y)\right] = F\left[\varphi(x, y)\right], \tag{7.}$$

womit die Behauptung erwiesen ist. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass die letzte Gleichung nur für *einen* der unendlich vielen Werthe von $F(x)$ richtig zu sein braucht.

Beispiel: Aus der Trigonometrie ist die Formel

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

bekannt; aus derselben folgt

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}.$$

3. Eine allgemeine *Umkehrung* des Functionaltheorems ist nicht zulässig; doch werden wir später sehen, dass bei allen eindeutigen Functionen mit einfacher, linearer (d. h. nebst ihrer Umkehrung eindeutiger) Periode, die nur für eine *endliche* Zahl von Argumentswerthen, welche nicht durch die Periodicität verbunden sind, den gleichen Werth annehmen, wirklich immer ein Functionaltheorem besteht.

§ 34.

Die lineare Periodicität.

1. Während wir bis jetzt zuliessen, dass in der Functionalgleichung

$$f\left[\vartheta_1(x)\right] = f(x) \tag{1.}$$

$y = \vartheta_1(x)$ eine beliebige algebraische Function sei, dass also zwischen den Werthen y und x, für welche $f(x)$ gleiche Werthe annimmt, eine *algebraische* Gleichung, die wir *Periodicitätsgleichung* nennen, besteht, wollen wir uns jetzt auf den Fall beschränken, dass $\vartheta_1(x)$ nebst seiner Umkehrung $\vartheta_{-1}(x)$ eine *eindeutige* Function ist. Dies kann nur dann eintreten, wenn die Periodicitätsgleichung in y und x vom ersten Grade ist, mithin die Form

$$Ayx + By + Cx + D = 0 \tag{2.}$$

hat, oder wenn bei anderer Wahl der Coefficienten

$$y = \vartheta_1(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \tag{3.}$$

also y eine sog. *lineare* Function von x ist; a, b, c und d bezeichnen hierbei beliebige complexe Grössen. — Es fragt sich nun, in welcher Weise die Periodicität durch lineare Substitutionen geändert wird und auf welche *Normalformen* sich die Periodicitätsgleichungen reduciren lassen.

2. Ist $F(x) = f\left[\varphi_1(x)\right]$ und genügt wieder $f(x)$ der Gleichung (1.), so haben wir, wenn wir die sich häufenden Klammern in der Folge theilweise weglassen*),

$$F\varphi_{-1}(x) = f(x),$$

$$F\varphi_{-1}\vartheta_1(x) = f\vartheta_1(x) = f(x) = F\varphi_{-1}(x),$$

also, wenn wir $\varphi_1(x)$ an Stelle von x setzen:

$$F\varphi_{-1}\vartheta_1\varphi_1(x) = F(x). \tag{4.}$$

Die Function $F(x)$, welche durch die Substitution $\varphi_1(x)$ aus $f(x)$ hergeleitet wurde, besitzt also die Periode $\varphi_{-1}\vartheta_1\varphi_1(x)$, oder, wenn $\psi(y, x) = 0$ die Periodicitätsgleichung von $f(x)$ bezeichnet, die Periodicitätsgleichung $\psi\left(\varphi_1(y), \varphi_1(x)\right) = 0$.

---

*) Wir bezeichnen durchgehends die k^{te} Iterirung von $\vartheta_1(x)$ mit $\vartheta_k(x)$, die k^{te} Iterirung der Umkehrung $\vartheta_{-1}(x)$ von $\vartheta_1(x)$ mit $\vartheta_{-k}(x)$.

Haben wir somit eine Function mit der Periode $\vartheta_1(x)$, so können wir daraus eine andere mit der Periode $\varphi_{-1}\vartheta_1\varphi_1(x)$ herleiten. Diese Betrachtungen müssen allerdings etwas eingeschränkt werden, wenn $\varphi_1(x)$ oder $\varphi_{-1}(x)$ *mehrdeutig* ist; wählen wir jedoch für $\varphi_1(x)$ wie für $\vartheta_1(x)$ *lineare* Functionen, so ist keinerlei Schwierigkeit vorhanden. — Wir nennen die doppelte Substitution, durch die wir aus einer Periode eine andere herleiten, *Functionalsubstitution*; dieselbe ist für die folgenden, sowie für viele andere Untersuchungen von fundamentaler Wichtigkeit.

3. Wenden wir auf $y = \vartheta_1(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ die lineare Functionalsubstitution $\varphi_1(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ an, in der α, β, γ, δ Grössen bedeuten, die wir noch in passender Weise bestimmen wollen, so haben wir

$$\varphi_{-1}(x) = \frac{\delta x - \beta}{-\gamma x + \alpha},$$

$$\vartheta_1\varphi_1(x) = \frac{(a\alpha + b\gamma)x + a\beta + b\delta}{(c\alpha + d\gamma)x + c\beta + d\delta},$$

also schliesslich

$$(5.)\quad \varphi_{-1}\vartheta_1\varphi_1(x) = \frac{(a\alpha\delta + b\gamma\delta - c\alpha\beta - d\beta\gamma)x + a\beta\delta + b\delta^2 - c\beta^2 - d\beta\delta}{(-a\alpha\gamma - b\gamma^2 + c\alpha^2 + d\alpha\gamma)x - a\beta\gamma - b\gamma\delta + c\alpha\beta + d\alpha\delta}.$$

Wir wollen nun über α, β, γ, δ zunächst so verfügen, dass x aus dem Nenner wegfällt, und haben zu diesem Zwecke die Gleichung

$$(6.)\quad c\alpha^2 + (d - a)\alpha\gamma - b\gamma^2 = 0$$

zu befriedigen. Da wir dies nicht durch gleichzeitiges Nullsetzen von α und γ erzielen dürfen, weil sonst $\varphi_1(x)$ zu einer Constanten würde, und auch nicht γ allein gleich Null genommen zu werden braucht, da sonst $c\alpha^2 = 0$, also $c = 0$, d. h. $\vartheta_1(x)$ bereits in der gewünschten Form sein müsste, so können wir (6.) durch γ^2 dividiren und finden für $\frac{\alpha}{\gamma}$ die quadratische Gleichung

$$(7.)\quad c\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + (d - a)\frac{\alpha}{\gamma} - b = 0,$$

die in allen in Betracht kommenden Fällen lösbar ist. Es ist daher immer möglich, $\vartheta_1(x)$ in die einfachere Form

$$(8.)\quad \vartheta_1(x) = px + n$$

zu transformiren, von der wir bei der weiteren Umformung ausgehen wollen.

Setzen wir jetzt $\varphi_1(x) = \alpha x + \beta$, also $\varphi_{-1}(x) = \frac{x-\beta}{\alpha}$, so erhalten wir

$$\varphi_{-1}\vartheta_1\varphi_1(x) = \frac{p\alpha x + p\beta - \beta + n}{\alpha},$$

und wenn wir β so bestimmen, dass

$$p\beta - \beta + n = 0$$

wird, also

$$\beta = \frac{n}{1-p}$$

nehmen, die *erste Normalform* der Periodicitätsgleichung:

$$y = px. \tag{9.}$$

Diese Transformation wird immer dann und nur dann unmöglich, wenn $p = 1$ ist; in diesem Falle hat $\vartheta_1(x)$ die Form

$$y = x + n.$$

Diese lässt sich noch insofern weiter transformiren, als wir an Stelle von n jeden beliebigen Werth m einführen können, indem wir $\varphi_1(x) = \frac{nx}{m}$ wählen; denn es wird alsdann

$$\varphi_{-1}\vartheta_1\varphi_1(x) = \frac{m}{n}\left(\frac{n}{m}x + n\right) = x + m.$$

Nehmen wir ins Besondere $m = 1$, so gelangen wir zu der *zweiten Normalform*

$$y = x + 1. \tag{10.}$$

4. Nachdem wir die Möglichkeit der Reduction jeder linearen Periode auf eine *multiplicatorische* oder eine *additive* dargethan haben, stellen wir noch die vollständig ausgerechneten Formeln für diese Reduction zusammen.

a. Soll $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ durch $\varphi_1(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ aus $y = px$ hergeleitet werden, d. h. mit

$$\frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta} = p\,\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

identisch sein, so erhalten wir durch Coefficientenvergleichung, wobei auf einen gemeinsamen Factor aller Coefficienten keine Rücksicht zu nehmen ist,

$$(11.)\quad \begin{cases} a = p\alpha\delta - \beta\gamma, \\ b = -\beta\delta(1-p), \\ c = \alpha\gamma(1-p), \\ d = \alpha\delta - p\beta\gamma \end{cases}$$

und hieraus

$$d - ap = \alpha\delta(1-p^2),$$
$$dp - a = \beta\gamma(1-p^2),$$
$$bc = -\alpha\beta\gamma\delta(1-p)^2$$

und weiter, indem wir $\alpha\beta\gamma\delta$ in doppelter Weise ausdrücken,

$$\frac{(d-ap)(dp-a)}{(1-p^2)^2} = -\frac{bc}{(1-p)^2}$$

oder

$$(12.)\quad (d-ap)(dp-a) + bc(1+p)^2 = 0$$

oder

$$(13.)\quad p^2 - \frac{a^2+d^2+2bc}{ad-bc}p + 1 = 0,$$

also

$$(14.)\quad p = \frac{a^2+d^2+2bc \pm \sqrt{(a^2+d^2+2bc)^2 - 4(ad-bc)^2}}{2(ad-bc)}$$
$$= \frac{a^2+d^2+2bc \pm \sqrt{(a^2-d^2)^2 + 4bc(a+d)^2}}{2(ad-bc)}$$
$$= \frac{a^2+d^2+2bc \pm (a+d)\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2(ad-bc)}$$
$$= -1 + \tfrac{1}{2}\frac{(a+d)^2 \pm (a+d)\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{ad-bc}.$$

Die Zweideutigkeit dieser Formel ist dahin zu erklären, dass an Stelle der Periode p ebensogut auch $\frac{1}{p}$ gewählt werden kann; denn ist $f\left[\vartheta_1(x)\right] = f(x)$, so folgt auch durch Einsetzen von $\vartheta_{-1}(x)$ für x: $f(x) = f\left[\vartheta_{-1}(x)\right]$ und umgekehrt. In der That bleibt (13.) ungeändert, wenn man p mit $\frac{1}{p}$ vertauscht.

Weiter finden wir

$$(15.)\quad \begin{cases} \beta = \dfrac{b(1+p)\alpha}{ap-d}, \\ \gamma = \dfrac{c}{1-p}\dfrac{1}{\alpha}, \\ \delta = \dfrac{ap-d}{1-p^2}\dfrac{1}{\alpha}, \end{cases}$$

während α beliebig gewählt werden kann. Für

(16.) $$(a-d)^2+4bc=0$$

wird

$$p=\frac{a^2+d^2+2bc}{2(ad-bc)}=\frac{(a-d)^2+2bc+2ad}{2(ad-bc)}$$
$$=\frac{(a-d)^2+4bc+2ad-2bc}{2(ad-bc)}=1$$

und die Transformation unmöglich; wenn nicht gerade $\vartheta_1(x)=x$ ist, haben wir dann auf $y=x+1$ zu reduciren.

b. Soll $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ mit

$$\frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta}=1+\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$$

identisch sein, so haben wir

$$a=-\alpha\delta+\beta\gamma-\gamma\delta,$$
$$b=-\delta^2,$$
$$c=\gamma^2,$$
$$d=-\alpha\delta+\beta\gamma+\gamma\delta,$$

also

$$\gamma=\sqrt{c} \quad \text{und} \quad \delta=\sqrt{-b};$$

ferner durch Subtraction der ersten von der vierten Gleichung

$$d-a=2\gamma\delta$$

oder

$$d-a=2\sqrt{-bc},$$

woraus die uns schon bekannte Bedingungsgleichung hervorgeht:

$$(a-d)^2+4bc=0.$$

Weiter folgt aus der ersten Gleichung

$$\beta=\frac{a+\alpha\delta}{\gamma}+\delta=\frac{a+\alpha\sqrt{-b}}{\sqrt{c}}+\sqrt{-b},$$

oder aus der vierten

$$\beta=\frac{d+\alpha\delta}{\gamma}-\delta=\frac{d+\alpha\sqrt{-b}}{\sqrt{c}}-\sqrt{-b},$$

ein Ausdruck, dessen Identität mit dem ersten aus (16.) hervorgeht; α bleibt beliebig. Wir finden also

$$(17.)\begin{cases}\beta = \frac{a+\alpha\sqrt{-b}}{\sqrt{c}} + \sqrt{-b} = \frac{d+\alpha\sqrt{-b}}{\sqrt{c}} - \sqrt{-b},\\ \gamma = \sqrt{c},\\ \delta = \sqrt{-b}.\end{cases}$$

Die Vorzeichen von $\sqrt{-b}$ und $\sqrt{c}$ können beliebig angenommen werden, sind aber dann für die sämmtlichen Gleichungen (17.) festzuhalten.

5. Wir wollen nun weiter beweisen, *dass die beiden Normalfälle der linearen Periodicität nicht allein durch keine lineare, sondern auch überhaupt durch keine algebraische Transformation in einander übergeführt werden können.*

Wäre nämlich $z = \psi_1(x)$ eine algebraische Function, welche durch die *irreductible* Gleichung $F(z, x) = 0$ definirt sein möge, so beschaffen, dass sie als Functionalsubstitution in die Gleichung $y = x + 1$ eingesetzt dieselbe in $y = px$ überführte, so müsste

$$\psi_1(y) = \psi_1(x) + 1$$

durch $y = px$ befriedigt werden, so dass wir hätten

$$\psi_1(px) = \psi_1(x) + 1.$$

Diese Relation kann aber, wenn wir zur definirenden Gleichung $F(z,x) = 0$ zurückgreifen, auch so ausgedrückt werden: die Gleichungen $F(z, x) = 0$ und $F(z + 1, px) = 0$ sollen für übereinstimmende x durch ein gleiches z befriedigt werden. Da aber voraussetzungsmässig $F(z, x) = 0$ irreductibel ist und $F(z + 1, px) = 0$ von dem nämlichen Grade in z und x sein muss wie jenes, so folgt, dass $F(z, x)$ und $F(z + 1, px)$ bis auf einen constanten Factor C identisch sind*). Seien nun etwa die höchsten Glieder in Bezug auf z von $F(z, x)$ nach fallenden Potenzen von x geordnet:

$$z^k(a_1x^{r_1} + a_2x^{r_2} + \cdots) + z^{k-1}(b_1x^{s_1} + b_2x^{s_2} + \cdots) + \cdots,$$

---

*) Eine irreductible Gleichung $F(z, x) = 0$ kann mit einer andern keinen Factor gemeinsam haben, der z oder x enthält, da dieselbe nach der Methode der Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers aus beiden Gleichungen auf *rationalem* Wege gefunden werden könnte, woraus dann folgen würde, dass $F(z, x)$ in rationale Factoren zerlegbar wäre.

so hätten wir für beliebige x und z die Gleichung zu befriedigen:

$$(z+1)^k(a_1p^{r_1}x^{r_1}+a_2p^{r_2}x^{r_2}+\cdots)$$
$$+(z+1)^{k-1}(b_1p^{s_1}x^{s_1}+b_2p^{s_2}x^{s_2}+\cdots)+\cdots$$
$$=C[z^k(a_1x^{r_1}+a_2x^{r_2}+\cdots)+z^{k-1}(b_1x^{s_1}+b_2x^{s_2}+\cdots)+\cdots].$$

Nach Entwicklung der Potenzen von $z+1$ ergiebt aber die Coefficientenvergleichung der ersten Glieder mit z^k und z^{k-1}: $a_1p^{r_1}=Ca_1$, also, da wir a_1 als Coefficienten des höchsten Gliedes als von Null verschieden annehmen müssen,

$$C=p^{r_1};$$

ferner

$$k[a_1p^{r_1}x^{r_1}+a_2p^{r_2}x^{r_2}+\cdots]+b_1p^{s_1}x^{s_1}+b_2p^{s_2}x^{s_2}+\cdots$$
$$=C(b_1x^{s_1}+b_2x^{s_2}+\cdots).$$

Diese Gleichung kann für beliebige x nur statthaben, wenn auf beiden Seiten gleich hohe Potenzen von x vorhanden sind, wenn also etwa $r_1=s_1$ ist; dann haben wir

$$ka_1p^{r_1}+b_1p^{r_1}=Cb_1$$

oder

$$ka_1p^{r_1}+b_1p^{r_1}=p^{r_1}b_1$$

oder

$$ka_1+b_1=b_1,$$

eine Gleichung, die in keiner Weise zu befriedigen ist, da k und a_1 nothwendig von Null verschieden sind.

6. Weiter haben wir noch zu untersuchen, *wie weit sich eine multiplicatorische Periode durch eine algebraische Substitution in eine andere derselben Art transformiren lässt.* Sei $z=\psi_1(x)$ eine algebraische Substitution, welche $y=px$ in $y=qx$ überführt und durch die irreductible Gleichung $F(z,x)=0$ definirt ist. Dann muss $\psi_1(y)=p\psi_1(x)$ durch $y=qx$ befriedigt werden, so dass wir haben $\psi_1(qx)=p\psi_1(x)$; oder $F(pz,qx)=0$ muss mit $F(z,x)=0$ eine gemeinschaftliche Lösung haben, d. h. bis auf eine multiplicatorische Constante mit ihm übereinstimmen. Sind

$$a_1z^{r_1}x^{s_1}+a_2z^{r_2}x^{s_2}+\cdots$$

einige Glieder von $F(z,x)$, so haben wir zu setzen:

$$a_1p^{r_1}q^{s_1}z^{r_1}x^{s_1}+a_2p^{r_2}q^{s_2}z^{r_2}x^{s_2}+\cdots$$
$$=Ca_1z^{r_1}x^{s_1}+Ca_2z^{r_2}x^{s_2}+\cdots,$$

und es ist eine Gleichung von der Form

$$ap^r q^s = Ca$$

zu befriedigen. Ist nun a von Null verschieden, so ist

$$C = p^r q^s;$$

eine andere dieser Gleichungen, etwa

$$a' p^u q^v = Ca',$$

lässt sich nur dann befriedigen ohne auch $a' = 0$ zu setzen, wenn

$$p^u q^v = p^r q^s$$

ist; alle übrigen Glieder müssen nothwendiger Weise verschwinden, da zwischen p und q keine weitere derartige Gleichung mit anderen u und v mehr möglich ist. Die Gleichung $F(z, x) = 0$ wird also lauten

$$az^r x^s + a' z^u x^v = 0,$$

oder kürzer

$$z^k = cx^{k_1}$$

oder

$$z = cx^{\frac{k_1}{k}},$$

wobei k_1 und k ganze, positive oder negative Zahlen sind. Wir führen durch diese Substitution $y = px$ über in

$$cy^{\frac{k_1}{k}} = cpx^{\frac{k_1}{k}}$$

oder

$$y = p^{\frac{k}{k_1}} x.$$

Man kann also $y = px$ nur dann und immer dann in $y = qx$ durch eine algebraische Substitution verwandeln, wenn q eine rational gebrochene, positive oder negative Potenz von p ist.

7. Die Periode $y = x + 1$ liefert durch Iterirung und Umkehrung $y = x + k$, worin k eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet; keine diese Iterirungen führt zu dem Ausgangswerthe x zurück, so dass algebraische Functionen mit additiver Periode nicht möglich sind. Bei $y = px$ dagegen sind zwei Fälle zu unterscheiden; entweder ist $|p| = 1$ oder $|p| \lessgtr 1$. Im zweiten Falle kann auch wieder nur eine transcendente Function die Periode $y = px$ besitzen, da kein $y = p^k x$ den Ausgangswerth x ergiebt. Hierbei dürfen wir

$|p| < 1$ annehmen, ohne hierdurch die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, da wir an Stelle von $y = px$ auch $y = \frac{x}{p}$ setzen können und $\left|\frac{1}{p}\right| > 1$ ist, falls $|p| < 1$ ist.

8. Ist $|p| = 1$, aber p keine genaue Einheitswurzel, also

$$p = \cos 2r\pi + i \sin 2r\pi,$$

worin r eine *irrationale* Zahl bezeichnet, so ist leicht zu beweisen, dass die Potenzen von p *jeden* Werth mit dem absoluten Betrage 1 mit beliebiger Annäherung darstellen. Denn zunächst sind die unendlich vielen Werthe

$$p^k = \cos 2kr\pi + i \sin 2kr\pi$$

alle von einander verschieden, weil aus

$$\cos 2kr\pi + i \sin 2kr\pi = \cos 2k_1 r\pi + i \sin 2k_1 r\pi$$

folgen würde (t ist eine ganze Zahl)

$$kr = k_1 r + t$$

oder

$$r = \frac{t}{k - k_1},$$

d. h. r *rational*. Da sich aber diese unendlich vielen verschiedenen Werthe auf eine *endliche* Strecke, nämlich auf eine mit dem Radius 1 um den Nullpunkt beschriebene Kreislinie vertheilen, so können sie nicht sämmtlich um endliche Grössen verschieden sein; es muss also ein p^k von einem p^{k_1} um eine beliebig kleine Grösse, d. h. p^{k-k_1} beliebig wenig von 1 verschieden sein. Die Potenzen von p^{k-k_1} werden dann alle auf jenem Kreise gelegenen Zahlen mit beliebiger Näherung darstellen. Soll nun eine *analytische* Function $f(x)$ so beschaffen sein, dass $f(px) = f(x)$, also auch $f(p^k x) = f(x)$ ist, so muss $f(x)$ für unendlich viele unendlich benachbarte Werthe von x, die sich zu Linien zusammenreihen (nämlich zu Kreisen mit den Radien $|x|$), den gleichen Werth haben. Bedenkt man aber, dass eine analytische Function durchaus stetig ist, dass sie also auf einem unendlich kleinen Intervalle keine endlichen Schwankungen ausführt, so kann man schliessen, dass $f(x)$ auf jedem solchen Kreise, also nach § 23, 1 *überall constant* ist. *Eine Periode* $y = px$, *wobei* $|p| = 1$, *aber* p

keine genaue Einheitswurzel ist, kann also bei analytischen Functionen überhaupt nicht vorkommen.

9. Ist in $y = \vartheta_1(x) = px$ die Grösse p eine genaue n^{te} primitive Einheitswurzel, so ist $\vartheta_n(x) = p^n x = x$; wir haben es also mit einer rückkehrenden Periode zu thun, die auch bei algebraischen Functionen auftreten kann. In der That besitzt

$$f(x) = x^n$$

diese Periode, und es ist leicht zu erweisen, *dass man die allgemeinste eindeutige Function dieser Art in der Gestalt*

$$f(x) = F(x^n) \tag{18.}$$

darstellen kann, wenn $F(x)$ eine beliebige *eindeutige* Function bezeichnet. Substituirt man nämlich in $f(x)$, welches der Bedingung $f(px) = f(x)$, $p^n = 1$ genügt, $y = x^n$, also $x = \sqrt[n]{y}$, so ist $f(\sqrt[n]{y}) = F(y)$ eine *eindeutige* Function von y, da durch die verschiedenen Wurzelwerthe von $\sqrt[n]{y}$, die sich nur um Potenzen von p unterscheiden, $f(\sqrt[n]{y})$ nicht mehrdeutig gemacht wird. Durch Wiedereinsetzung von x^n für y erhält man das behauptete Resultat.

10. Aus dem Vorhergehenden ist ersichtlich, dass sich sämmtliche linearen Perioden, welche nach einer $n$maligen Iterirung zum Anfangswerthe zurückführen, aus der Normalform $y = px$, $p^n = 1$ durch eine lineare Transformation herleiten lassen; die allgemeine Form derselben ist daher durch die Gleichung

$$\frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta} = p\,\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

bestimmt, aus der folgt:

$$y = \frac{(\alpha\delta p - \beta\gamma)x - \beta\delta(1 - p)}{\alpha\gamma(1 - p)x + \alpha\delta - \beta\gamma p},$$

oder, wenn $\frac{\alpha}{\beta} = a$, $\frac{\gamma}{\delta} = b$ gesetzt wird,

$$y = \frac{(ap - b)x + p - 1}{-ab(p - 1)x + a - bp} = \frac{\left(ap^{\frac{1}{2}} - bp^{-\frac{1}{2}}\right)x + p^{\frac{1}{2}} - p^{-\frac{1}{2}}}{-ab\left(p^{\frac{1}{2}} - p^{-\frac{1}{2}}\right)x + ap^{-\frac{1}{2}} - bp^{\frac{1}{2}}},$$

und wenn weiter (auf das Vorzeichen von $p^{\frac{1}{2}}$ braucht keine Rücksicht genommen zu werden)

$$p = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

also

$$p^{\frac{1}{2}} = \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n},\quad p^{-\frac{1}{2}} = \cos\frac{k\pi}{n} - i\sin\frac{k\pi}{n}$$

gesetzt wird,

$$y = \frac{\left(a\cos\frac{k\pi}{n} + ia\sin\frac{k\pi}{n} - b\cos\frac{k\pi}{n} + ib\sin\frac{k\pi}{n}\right)x + 2i\sin\frac{k\pi}{n}}{-2iab\sin\frac{k\pi}{n}x + a\cos\frac{k\pi}{n} - ia\sin\frac{k\pi}{n} - b\cos\frac{k\pi}{n} - ib\sin\frac{k\pi}{n}}$$

$$= \frac{\left[(a-b)\cos\frac{k\pi}{n} + i(a+b)\sin\frac{k\pi}{n}\right]x + 2i\sin\frac{k\pi}{n}}{-2iab\sin\frac{k\pi}{n}x + (a-b)\cos\frac{k\pi}{n} - i(a+b)\sin\frac{k\pi}{n}}$$

oder, wenn endlich

$$a + b = 2r,$$
$$a - b = 2is$$

genommen wird,

$$y = \frac{\left(s\cos\frac{k\pi}{n} + r\sin\frac{k\pi}{n}\right)x + \sin\frac{k\pi}{n}}{-(r^2+s^2)\sin\frac{k\pi}{n}x + s\cos\frac{k\pi}{n} - r\sin\frac{k\pi}{n}}$$

oder

$$(19.)\quad y = \frac{\left(s + r\,\mathrm{tg}\frac{k\pi}{n}\right)x + \mathrm{tg}\frac{k\pi}{n}}{-(r^2+s^2)\,\mathrm{tg}\frac{k\pi}{n}x + s - r\,\mathrm{tg}\frac{k\pi}{n}} = \frac{\left(s\,\mathrm{cotg}\frac{k\pi}{n} + r\right)x + 1}{-(r^2+s^2)x + s\,\mathrm{cotg}\frac{k\pi}{n} - r}.$$

Wir haben nach der durchgeführten Untersuchung drei Normalformen linearer Perioden:

a. $y = x + 1;$

b. $y = px,\ |p| < 1;$

c. $y = px,\ p^n = 1.$

Da nur die beiden ersten auf *transcendente* Functionen führen, so werden wir uns in der Folge nur mit ihnen zu beschäftigen haben.

Die Untersuchung *mehrfacher* Perioden, die bei derselben Function auftreten können, verschieben wir bis auf Weiteres.

11. Hat die eindeutige Function $f(x)$ die Periode

$$y = x + n,$$

so folgt durch unendlich oftmalige Iterirung

$$f(x + \infty) = f(x)$$

oder

$$f(\infty) = f(x),$$

d. h. $f(x)$ muss für $x = \infty$ *alle* Werthe annehmen, die es überhaupt annimmt. $f(x)$ ist demnach für $x = \infty$ vollständig unbestimmt*), $x = \infty$ ist ein *wesentlicher* Unstetigkeitspunkt. Hat $f(x)$ noch einen andern im Endlichen gelegenen wesentlichen Unstetigkeitspunkt $x = a$, so sind auch in Folge der Periodicität $x = a \pm n$, $x = a \pm 2n$ u. s. w. solche. Wir haben also das Resultat:

Jede additiv periodische Function wird im Punkte $x = \infty$ wesentlich unstetig; besitzt sie noch weitere wesentliche Unstetigkeitspunkte, so hat sie deren unendlich viele. Im Falle *eines* wesentlichen Unstetigkeitspunktes wird sich daher (was allerdings vollständig erst später begründet wird) $f(x)$, wenn es analytisch ist, als eine *transcendente, rationale Function* darstellen lassen.

12. Besitzt $f(x)$ die Periodicitätsgleichung $y = px$, $|p| < 1$, so ist einerseits $f(p^\infty x) = f(x)$, also $f(0) = f(x)$, andererseits $f\left(\frac{x}{p^\infty}\right) = f(x)$ oder $f(\infty) = f(x)$; $x = 0$ und $x = \infty$ sind also hier wesentliche Unstetigkeitspunkte. Ist auch $x = a$ ein solcher, so ist es auch $x = ap^k$. Mithin haben wir den Satz:

Jede multiplicatorisch periodische Function (ausser wenn $p^n = 1$ ist) hat $x = 0$ und $x = \infty$ zu wesentlichen Unstetigkeitspunkten; sind deren noch andere vorhanden, so hat sie unendlich viele.

Jede analytische, multiplicatorisch periodische, eindeutige Function stellt sich als *transcendente rationale Function im weiteren Sinne* dar.

13. Schliesslich wollen wir noch einen Blick auf den Fall werfen, dass $f(x)$ mit der linearen Periode $y = \vartheta_1(x)$

---

*) Wenn es nicht eine *Constante* ist.

nicht *eindeutig*, sondern *endlich vieldeutig*, etwa n-deutig ist. Bezeichnen $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_n(x)$ die n verschiedenen Werthe von $f(x)$, so ist jede symmetrische Function derselben eine *eindeutige* Function von x mit der Periode $y = \vartheta_1(x)$. Bildet man daher eine Gleichung n^{ten} Grades, deren Wurzeln $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_n(x)$ sind, so werden die Coefficienten derselben als symmetrische Functionen dieser Grössen *eindeutige* Functionen von x mit der Periode $y = \vartheta_1(x)$ sein. Wir haben also das Resultat:

Jede n-deutige Function mit der linearen Periode $y = \vartheta_1(x)$ lässt sich als Lösung einer Gleichung n^{ten} Grades darstellen, deren Coefficienten eindeutige Functionen mit derselben Periode sind.

Es wird genügen, wenn wir in der Folge die mehrdeutigen Functionen mit linearer Periode ausser Acht lassen und uns nur mit den eindeutigen befassen, da sich die ersteren stets auf die letzteren zurückführen lassen.

§ 35.

Die algebraische Periodicität.

1. Es kann nicht unsere Absicht sein, die Theorie der allgemeinen algebraischen Periodicität hier vollständig zu absolviren, da dieselbe Schwierigkeiten bietet, die noch nicht gänzlich überwunden sind; doch wird es zweckmässig sein, die hierbei eintretenden Verhältnisse an einem Beispiele zu erläutern.

Wenn die Periodicitätsgleichung der *eindeutigen* Function $f(x)$ lautet:

$$(1.) \qquad y = x^2,$$

so müssen nicht nur die Relationen

$$f(x) = f(x^2) = f(x^4) = f(x^8) = \ldots$$

bestehen, sondern auch die durch Umkehrung von (1.) folgenden

$$f(x) = f(\sqrt{x}) = f(\sqrt[4]{x}) = f(\sqrt[8]{x}) = \ldots.$$

Nun hat aber $\sqrt{x}$ zwei Werthe, welche wir als $+\sqrt{x}$ und $-\sqrt{x}$ unterscheiden können, und es entsteht die Frage, ob wir von der periodischen Function $f(x)$ verlangen sollen, dass

sowohl $f(+\sqrt{x})$ als auch $f(-\sqrt{x})$ mit $f(x)$ übereinstimmt, oder ob wir es als genügend betrachten können, wenn *eine* dieser Grössen $f(x)$ gleich wird. In unserem Falle leuchtet das Erstere unmittelbar ein, sofern sich nämlich die Variabele x in $f(x)$ über einen genügend grossen Theil der Ebene der complexen Zahlen ausdehnen darf; denn aus $f(x)=f(x^2)$ folgt durch Einsetzen von $\pm\sqrt{x}$ für x, dass $f(\pm\sqrt{x})=f\left((\pm\sqrt{x})^2\right)=f(x)$ sein muss. Diese Schlussweise wird indessen hinfällig, wenn die Periode $y=\vartheta_1(x)$ eine *nebst ihrer Umkehrung mehrdeutige* irreductible algebraische Function ist. Wir wollen daher bei unserem Beispiele eine Betrachtungsweise durchführen, die sich auch auf diesen allgemeineren Fall anwenden lässt. Machen wir die beschränkende Voraussetzung, dass $f(x)$ eine analytische Function ist, die sich über die ganze Ebene, einzelne Punkte ausgenommen, ausbreitet, und nehmen an, dass nur $f(+\sqrt{x})=f(x)$ sei. Um den Zweig $+\sqrt{x}$ bestimmter zu fixiren, wählen wir einen Punkt x_1 und setzen das zugehörige $+\sqrt{x_1}$ fest, so dass also $f(+\sqrt{x_1})=f(x_1)$ ist. Lassen wir nun x von x_1 ausgehend eine continuirliche Reihe von Werthen durchlaufen, ohne durch einen der singulären Punkte von $f(x)$ oder $f(\sqrt{x})$ zu gehen, so wird, da beide Functionen nicht plötzlich ihren Werth ändern können, die Übereinstimmung $f(\sqrt{x})=f(x)$ fortwährend stattfinden. Nach § 18, 2 kann man aber die Variable x immer so führen, und zwar auf unendlich vielen Wegen, wodurch eine Vermeidung der singulären Punkte stets möglich ist, dass bei der Rückkehr von x zu x_1 die Function $+\sqrt{x_1}$ in $-\sqrt{x_1}$ übergegangen ist. Wir schliessen hieraus, dass auch $f(-\sqrt{x})=f(x)$ sein muss. — Ist $f(x)$ eine Function, die blos für einen beschränkten Theil der Ebene der complexen Zahlen eine analytische Bedeutung besitzt, so sind diese Schlüsse unzulässig.

Aus $f(+\sqrt{x})=f(-\sqrt{x})$ folgt dann durch Änderung der Variabeln $f(x)=f(-x)$, und wenn man beachtet, dass für $f(\sqrt[4]{x})$, $f(\sqrt[8]{x})$ u. s. w. dieselbe Schlussweise wiederholt werden kann, so kommt man schliesslich zu dem Resultate,

dass $f(\alpha x) = f(x)$ sein muss, wenn α eine $2^{k\text{te}}$ Einheitswurzel, k eine beliebig grosse, positive ganze Zahl bedeutet. Da nun für unendlich grosse k diese Einheitswurzeln eine unendlich dicht zusammengedrängte Punktreihe darstellen, so schliessen wir wie in § 34, 8, dass $f(x)$ eine *Constante* sein muss. — Dieselbe Schlussweise ist auch für die Periodicitätsgleichung $y = x^n$ zulässig, während sich im allgemeinen Falle die Sache complicirter gestaltet.

Wir sprechen das (erst unvollständig bewiesene) Resultat aus:

Perioden, welche nicht nebst ihren Umkehrungen eindeutig sind, können bei analytischen Functionen, deren Variable sich über die ganze Ebene der complexen Zahlen, isolirte singuläre Punkte ausgenommen, ausbreitet, im Allgemeinen nicht auftreten. Bei Functionen anderer Art können sie vorkommen.

2. Von den Ausnahmen, die der letzte Satz erleidet, sind besonders zwei hervorzuheben:

a. Wenn die Iterirungen von $\vartheta_1(x)$ und $\vartheta_{-1}(x)$ nicht über jeden endlichen Grad vieldeutig werden (wie dies bei $\sqrt[2^k]{x}$ der Fall ist, das für $k = \infty$ unendlich vieldeutig wird), sondern *sämmtlich einen endlichen Grad der Vieldeutigkeit nicht überschreiten*, so tritt die obige Schwierigkeit nicht ein. *Es lässt sich beweisen, dass dies immer und nur bei solchen Perioden statthat, die aus einer linearen Periode durch eine rationale Functionalsubstitution hergeleitet werden können*).*

Ist beispielsweise

$$F(x + 1) = F(x)$$

und setzen wir

$$f(x) = F(x^2),$$

so lautet $\vartheta_1(x)$ für $f(x)$

$$\vartheta_1(x) = \sqrt{x^2 + 1},$$

und wir haben

$$\vartheta_2(x) = \sqrt{(\sqrt{x^2 + 1})^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 2}$$

*) Der Beweis hierfür wurde vom Verfasser in der Abhandlung: „*Theorie der allgemeinen Periodicität*“ im 18. Band der Math. Annal. gegeben.

und allgemein

$$\vartheta_k(x) = \sqrt{x^2 + k},$$

ferner

$$\vartheta_{-k}(x) = \sqrt{x^2 - k},$$

so dass sämmtliche Iterirungen von $\vartheta_k(x)$ zweideutige Functionen sind.

Macht man bei einer eindeutigen Function mit linearer Periode eine mehrdeutige algebraische Substitution, so erhält man in den meisten Fällen eine mehrdeutige Function, für die die vorhergehenden Schlüsse überhaupt nicht zulässig sind. Es sei bei dieser Gelegenheit bemerkt, dass § 34, 13 auf Functionen mit *mehrdeutiger* Periode keine Anwendung findet.

b. Es kann auch vorkommen, *dass* $\vartheta_k(x)$ *oder* $\vartheta_{-k}(x)$ *beliebig vieldeutig werden, dass jedoch ihre Werthe bis auf eine endliche Anzahl mit solchen früheren Iterirungen zusammenfallen;* auch dann treten die früheren Hindernisse nicht ein. Ist beispielsweise

$$\vartheta_1(x) = (1 \pm \sqrt{x})^2,$$

so haben wir

$$\vartheta_2(x) = \left(1 \pm \sqrt{(1 \pm \sqrt{x})^2}\right)^2,$$

also

$$\vartheta_2(x) = (2 \pm \sqrt{x})^2 \quad \text{und} \quad \vartheta_2(x) = x,$$
$$\vartheta_3(x) = (3 \pm \sqrt{x})^2 \quad \text{und} \quad \vartheta_3(x) = (1 \pm \sqrt{x})^2$$

u. s. w.,

so dass bei jeder neuen Iterirung nur zwei *neue* Werthe hinzukommen; die negativen Iterirungen stimmen mit den positiven überein.

3. Wir wollen nun noch den Nachweis führen, *dass jede rückkehrende algebraische Periode* $y = \vartheta_1(x)$, *die also der Bedingung* $\vartheta_n(x) = x$ *genügt, durch eine algebraische Functionalsubstitution aus* $y = \alpha x$, *worin* α *eine* n^{te} *Einheitswurzel bezeichnet, hergeleitet werden kann.* Dabei ist durchaus festzuhalten, dass wir sämmtliche vorkommenden Relationen als befriedigt ansehen, wenn dies durch *einen* Werth der darin auftretenden mehrdeutigen Functionen geschieht.

Dass wirklich jedes

$$\vartheta_1(x) = \varphi_{-1}\alpha\varphi_1(x)$$

die verlangte Bedingung befriedigt, leuchtet ohne Weiteres ein; denn es ist

$$\vartheta_n(x) = \varphi_{-1}\alpha\varphi_1\varphi_{-1}\alpha\varphi_1\varphi_{-1}\alpha\varphi_1\cdots\varphi_{-1}\alpha\varphi_1(x)$$
$$= \varphi_{-1}\alpha^n\varphi_1(x) = \varphi_{-1}\varphi_1(x) = x.$$

Um nun auch zu zeigen, dass *alle* $\vartheta_1(x)$, für welche $\vartheta_n(x) = x$ ist, aus $y = \alpha x$ herleitbar sind, geben wir eine Transformation wirklich an, welche das Verlangte leistet; eine solche ist

$$\varphi_1(x) = x + \alpha^{n-1}\vartheta_1(x) + \alpha^{n-2}\vartheta_2(x) + \cdots + \alpha\vartheta_{n-1}(x).$$

Führen wir nämlich dieselbe in $y = \alpha x$ ein, so wird daraus

$$\varphi_1(y) = \alpha\varphi_1(x)$$

oder

$$y + \alpha^{n-1}\vartheta_1(y) + \alpha^{n-2}\vartheta_2(y) + \cdots + \alpha\vartheta_{n-1}(y)$$
$$= \alpha[x + \alpha^{n-1}\vartheta_1(x) + \alpha^{n-2}\vartheta_2(x) + \cdots + \alpha\vartheta_{n-1}(x)].$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist in der That $y = \vartheta_1(x)$; denn durch Einsetzung dieser Grösse wird daraus die Identität

$$\vartheta_1(x) + \alpha^{n-1}\vartheta_2(x) + \alpha^{n-2}\vartheta_3(x) + \cdots + \alpha x$$
$$= \alpha[x + \alpha^{n-1}\vartheta_1(x) + \alpha^{n-2}\vartheta_2(x) + \cdots + \alpha\vartheta_{n-1}(x)].$$

Diese Substitution ist nur dann unbrauchbar, wenn $\varphi_1(x)$ identisch zu einer Constanten c wird. Setzen wir in $\varphi_1(x)$ als Argument $\vartheta_1(x)$ ein, so wird daraus

$$\vartheta_1(x) + \alpha^{n-1}\vartheta_2(x) + \alpha^{n-2}\vartheta_3(x) + \cdots + \alpha x = \alpha\varphi_1(x) = \alpha c,$$

so dass $c = \alpha c$, also $c = 0$ ist; $\varphi_1(x)$ verschwindet in diesem Falle identisch. Wir wählen alsdann an Stelle von $\varphi_1(x)$ die Substitution

$$\varphi_1'(x) = \alpha^{n-1}x\vartheta_1(x) + \alpha^{n-2}x\vartheta_2(x) + \cdots$$
$$+ \alpha^{n-k_1}\alpha^{n-k_2}\vartheta_{k_1}(x)\vartheta_{k_2}(x) + \cdots$$
$$= \sum \alpha^{2n-k_1-k_2}\vartheta_{k_1}(x)\vartheta_{k_2}(x),$$

worin die Summation über alle von einander verschiedenen k_1 und k_2 von Null bis $n-1$ auszudehnen ist (dabei ist $\vartheta_0(x) = x$), und man überzeugt sich leicht wie oben, dass durch dieselbe $y = \vartheta_1(x)$ aus $y = \alpha^2 x$ hergeleitet wird. Falls auch dieser Ausdruck identisch verschwindet (eine von Null verschiedene Constante kann er wieder nicht sein), so leiten wir $y = \vartheta_1(x)$ durch die Substitution

$$\varphi_1''(x) = \sum \alpha^{3n-k_1-k_2-k_3}\vartheta_{k_1}(x)\vartheta_{k_2}(x)\vartheta_{k_3}(x)$$

aus $y = \alpha^3 x$ her u. s. w. So können wir weiter gehen bis zu

$$\varphi_1^{(n-2)}(x) = \sum \alpha^{(n-1)n-k_1-k_2-\cdots-k_{n-1}} \vartheta_{k_1}(x)\vartheta_{k_2}(x)\cdots\vartheta_{k_{n-1}}(x).$$

Sollte auch diese Substitution wie alle vorhergehenden zu Null werden, so wollen wir $\vartheta_1(x)$ dadurch bestimmen, dass wir eine Gleichung bilden, welche die n Lösungen

$$x,\ \alpha^{n-1}\vartheta_1(x),\ \alpha^{n-2}\vartheta_2(x),\ \cdots \alpha\vartheta_{n-1}(x)$$

besitzt und lautet

$$\big(X-x\big)\big(X-\alpha^{n-1}\vartheta_1(x)\big)\big(X-\alpha^{n-2}\vartheta_2(x)\big)\cdots\big(X-\alpha\vartheta_{n-1}(x)\big)=0.$$

Multipliciren wir dieselbe aus, so nimmt sie nach bekannten Regeln die Gestalt an:

$$X^n - \varphi_1(x)X^{n-1} + \varphi_1'(x)X^{n-2} - \cdots \pm \varphi_1^{(n-2)}(x)X - \Phi(x) = 0,$$

worin $\Phi(x)$ eine noch unbekannte Function bezeichnet. Da aber voraussetzungsmässig

$$\varphi_1(x) = \varphi_1'(x) = \varphi_1''(x) = \cdots = \varphi^{(n-2)}(x) = 0$$

ist, so geht die Gleichung in

$$X^n - \Phi(x) = 0 \quad \text{oder} \quad X = \sqrt[n]{\Phi(x)} = \alpha_k\chi(x)$$

über. Geben wir k alle Werthe von 0 bis $n - 1$, so müssen wir für X die n Werthe

$$x,\ \alpha^{n-1}\vartheta_1(x),\ \alpha^{n-2}\vartheta_2(x),\ \cdots \alpha\vartheta_{n-1}(x)$$

erhalten. Sei etwa

$$x = \alpha^r\chi(x) \quad \text{und} \quad \alpha^{n-1}\vartheta_1(x) = \alpha^s\chi(x),$$

so folgt durch Elimination von $\chi(x)$

$$\vartheta_1(x) = \alpha^{s-n-r+1}x,$$

d. h. $\vartheta_1(x)$ hat bereits die gewünschte Form.

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass man auf diese Weise alle Perioden $\vartheta_1(x)$ erhält, für die $\vartheta_n(x) = x$ ist, gleichgültig, ob schon für ein $k < n$ $\vartheta_k(x) = x$ ist oder nicht. Soll $\vartheta_n(x)$ die erste Iterirung von $\vartheta_1(x)$ sein, die zu x zurückführt, so muss in $y = \alpha x$, aus dem $\vartheta_1(x)$ hergeleitet ist, α *primitiv* sein.

4. In dem besonderen Falle, dass $\vartheta_2(x) = x$ sein soll, haben wir $\alpha = -1$ zu setzen. Wir erhalten dann für $y = \vartheta_1(x)$ die Gleichung

$$\varphi_1(y) = -\varphi_1(x)$$

oder

$$\varphi_1(y) + \varphi_1(x) = 0,$$

d. h. eine in y und x *symmetrische* Periodicitätsgleichung. Dass auch das Umgekehrte gilt, leuchtet ohne Weiteres ein.

§ 36.

Construction periodischer Functionen.

1. Um eine Function mit der Periode $y = \vartheta_1(x)$ herzustellen, kann man das folgende, für den einfachsten Fall zuerst von Herrn Appell*) angegebene Verfahren anwenden. Bezeichnet $f(x)$ irgend eine geeignet gewählte, in dem in Betracht kommenden Gebiete eindeutig definirte Function, so wird jede *symmetrische* Function $F(x)$ der unendlich vielen Grössen

$$(1.)\quad \begin{cases} f(x),\ f(\vartheta_1(x)),\ \ f(\vartheta_2(x)),\ \ f(\vartheta_3(x)),\ \cdots \\ \qquad f(\vartheta_{-1}(x)),\ f(\vartheta_{-2}(x)),\ f(\vartheta_{-3}(x)),\ \cdots \end{cases}$$

eine Function mit der Periode $y = \vartheta_1(x)$ sein, wenn nur das Aggregat innerhalb gewisser Grenzen einen endlichen, bestimmten Werth repräsentirt. Die unendliche Reihe und das unendliche Product, die man aus den Functionen (1.) formiren kann, sind specielle Fälle hiervon. Diese Methode ist sehr weittragend und namentlich auch zur Construction solcher periodischen Functionen geeignet, deren Argument sich nur über einen beschränkten Theil der Ebene ausbreiten darf; allein sie kann nicht als naturgemäss angesehen werden, da in der passenden Wahl von $f(x)$ immer eine grosse Willkürlichkeit liegt; wir werden später andere Methoden zur Herstellung der allgemeinsten additiv und multiplicatorisch periodischen Functionen anwenden. Hier mögen verschiedene, von Herrn Appell nicht behandelte Beispiele Platz finden.

Beispiel 1. Um eine Function $F(x)$ mit der multiplicatorischen Periode $y = px$, $|p| < 1$ zu bilden, können wir $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ annehmen und erhalten

$$(2.)\quad \begin{aligned} F(x) = f(x) + f(px) + f(p^2x) + \cdots \\ + f\left(\frac{x}{p}\right) + f\left(\frac{x}{p^2}\right) + \cdots \end{aligned}$$

---

*) Comptes rendus, 1879, I, p. 807. Note de M. Appell.

$$= \frac{x}{1+x^2} + \frac{px}{1+p^2x^2} + \frac{p^2x}{1+p^4x^2} + \frac{p^3x}{1+p^6x^2} + \cdots$$

$$+ \frac{\frac{x}{p}}{1+\frac{x^2}{p^2}} + \frac{\frac{x}{p^2}}{1+\frac{x^2}{p^4}} + \frac{\frac{x}{p^3}}{1+\frac{x^2}{p^6}} + \cdots$$

$$= \frac{x}{1+x^2} + \frac{px}{1+p^2x^2} + \frac{p^2x}{1+p^4x^2} + \frac{p^3x}{1+p^6x^2} + \cdots$$

$$+ \frac{\frac{p}{x}}{1+\frac{p^2}{x^2}} + \frac{\frac{p^2}{x}}{1+\frac{p^4}{x^2}} + \frac{\frac{p^3}{x}}{1+\frac{p^6}{x^2}} + \cdots.$$

Dass beide Theile dieser Reihe für beliebige endliche x, durch die keiner der Nenner zu Null gemacht wird, convergiren, ergiebt sich ohne Weiteres aus dem Cauchy'schen Kriterium.

Beispiel 2: Eine Function $F_n(x)$ mit der Periode $y = x^n$ können wir mit Hülfe von $f(x) = x(x-1)$ bilden; wir haben

$$(3.)\quad F_n(x) = x(1-x) + x^n(1-x^n) + x^{n^2}(1-x^{n^2}) + x^{n^3}(1-x^{n^3}) + \cdots$$
$$+ \sqrt[n]{x}\left(1-\sqrt[n]{x}\right) + \sqrt[n^2]{x}\left(1-\sqrt[n^2]{x}\right) + \sqrt[n^3]{x}\left(1-\sqrt[n^3]{x}\right) + \cdots,$$

wobei die Beschränkung zuzufügen ist, dass x eine durchaus *positive* Zahl bedeuten soll, die kleiner als die Einheit ist, und dass auch für die vorkommenden Wurzelgrössen immer deren *reelle positive* Werthe gewählt werden sollen; aus § 35, 1 wissen wir ja, dass keine analytische Function der gewünschten Art existirt, deren Argument sich über die *ganze* Ebene verbreitet. Die Convergenz von (3.) ist ebenfalls mittelst des Cauchy'schen Kriteriums zu erweisen. Für den ersten Theil haben wir

$$\frac{u_{\omega+1}}{u_\omega} = \frac{x^{n^{\omega+1}}\left(1-x^{n^{\omega+1}}\right)}{x^{n^\omega}\left(1-x^{n^\omega}\right)} = \frac{x^{n^{\omega+1}}}{x^{n^\omega}} = x^{(n-1)n^\omega} = 0,$$

für den zweiten aber ist

$$\frac{u_{\omega+1}}{u_\omega} = \frac{\sqrt[n^{\omega+1}]{x}\left(1-\sqrt[n^{\omega+1}]{x}\right)}{\sqrt[n^\omega]{x}\left(1-\sqrt[n^\omega]{x}\right)} = \frac{1-\sqrt[n^{\omega+1}]{x}}{1-\sqrt[n^\omega]{x}}$$

oder, wenn $\sqrt[n^{\omega+1}]{x} = a$ gesetzt wird,

$$\frac{u_{\omega+1}}{u_\omega} = \frac{1-a}{1-a^n} = \frac{1}{1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}}$$

oder, da sich $\sqrt[n^{\omega+1}]{x}$ der Grenze 1 nähert,

$$\frac{u_{\omega+1}}{u_\omega} = \frac{1}{n}.$$

Setzen wir speciell $n = 2$, so ist

$$\begin{aligned}(4.)\quad F_2(x) &= (x - x^2) + (x^2 - x^4) + (x^4 - x^8) + \cdots \\ &\quad + (x^{2^\omega} - x^{2^{\omega+1}}) + (x^{\frac{1}{2}} - x) + \left(x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{2}}\right) \\ &\quad + \left(x^{\frac{1}{8}} - x^{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(x^{\frac{1}{2^{\omega+1}}} - x^{\frac{1}{2^\omega}}\right) \\ &= x^{\frac{1}{2^{\omega+1}}} - x^{2^{\omega+1}} = 1,\end{aligned}$$

so dass also für $n = 2$ die Entwicklung keine eigentliche periodische Function liefert. Man kann dann z. B. $f(x)$ durch $x^2(1 - x)$ ersetzen und erhält die unter den gleichen Bedingungen convergente Reihe

$$\begin{aligned}(5.)\quad F_2'(x) &= x^2(1-x) + x^4(1-x^2) + x^8(1-x^4) + \cdots \\ &\quad + x(1-\sqrt{x}) + \sqrt{x}(1-\sqrt[4]{x}) + \sqrt[4]{x}(1-\sqrt[8]{x}) + \cdots.\end{aligned}$$

Beispiel 3. Um auch zu zeigen, wie ein unendliches Product zur Bildung periodischer Functionen benutzt werden kann, nehmen wir bei der Periodicitätsgleichung $y = px$, $|p| < 1$, $f(x) = \dfrac{1+x}{1+p^{\frac{1}{2}}x}$ und finden, indem wir zur Erzielung der Convergenz die beigefügte Constante C in leicht ersichtlicher Weise verwenden,

$$\begin{aligned}(6.)\quad F(x) &= Cf(x)f(px)f(p^2x)\cdots f\left(\frac{x}{p}\right)f\left(\frac{x}{p^2}\right)\cdots \\ &= C\,\frac{1+x}{1+p^{\frac{1}{2}}x}\cdot\frac{1+px}{1+p^{\frac{3}{2}}x}\cdot\frac{1+p^2x}{1+p^{\frac{5}{2}}x}\cdots \\ &\quad \cdot\frac{1+\frac{x}{p}}{1+\frac{x}{p^{\frac{1}{2}}}}\cdot\frac{1+\frac{x}{p^2}}{1+\frac{x}{p^{\frac{3}{2}}}}\cdot\frac{1+\frac{x}{p^3}}{1+\frac{x}{p^{\frac{5}{2}}}}\cdots\end{aligned}$$

$$= \frac{1+x}{1+p^{\frac{1}{2}}x} \cdot \frac{1+px}{1+p^{\frac{3}{2}}x} \cdot \frac{1+p^2x}{1+p^{\frac{5}{2}}x} \cdots$$

$$\cdot \frac{1+\frac{p}{x}}{1+\frac{p^{\frac{1}{2}}}{x}} \cdot \frac{1+\frac{p^2}{x}}{1+\frac{p^{\frac{3}{2}}}{x}} \cdot \frac{1+\frac{p^3}{x}}{1+\frac{p^{\frac{5}{2}}}{x}} \cdots,$$

ein Product, dessen Convergenz für beliebe endliche x (ausser

$$x = -1, -p, -p^2, -p^3, \cdots, -\frac{1}{p}, -\frac{1}{p^2}, \cdots;$$

$$-p^{\frac{1}{2}}, -p^{\frac{3}{2}}, -p^{\frac{5}{2}}, \cdots, -\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}, -\frac{1}{p^{\frac{3}{2}}}, -\frac{1}{p^{\frac{5}{2}}}, \cdots)$$

aus der Convergenz der Reihen

$$1 + |p| + |p|^2 + |p|^3 + \cdots$$

und

$$|p|^{\frac{1}{2}} + |p|^{\frac{3}{2}} + |p|^{\frac{5}{2}} + \cdots$$

folgt (§ 11, 2).

§ 37.

Geometrische Repräsentation der Periodicität.

1. Besitzt die eindeutige Function $f(x)$ die Periodicitätsgleichung $y = \vartheta_1(x)$, so nimmt $f(x)$ für die Punkte

$$x, \vartheta_1(x), \vartheta_2(x), \vartheta_3(x), \cdots, \vartheta_{-1}(x), \vartheta_{-2}(x), \vartheta_{-3}(x), \cdots$$

den gleichen Werth an; man sagt, dass diese Punkte *correspondiren* oder *äquivalent* sind. Es liegt nun nahe, die Ebene der complexen Zahlen derart in Parcellen zu zerlegen, dass keine zwei Punkte ein und derselben Parcelle äquivalent sind, dass dagegen immer je zwei Punkte verschiedener Parcellen diese Eigenschaft besitzen. Diese Parcellirung ist für einfache Perioden sehr einfach, complicirter, aber auch bei Weitem wichtiger bei mehrfachen Perioden; die Wahl der Grenzen der einzelnen Gebiete lässt übrigens bedeutende Willkürlichkeiten zu.

2. Um die Eintheilung für die Periode $y = \vartheta_1(x) = x + 1$ herzustellen, wählen wir als Ausgangsgrenzlinie irgend eine Gerade, welche senkrecht auf der Abscissenaxe steht (s. Fig. 16). Dieselbe bilden wir durch die Substitutionen $y = \vartheta_k(x)$, k positiv und negativ ab, d. h. wir lassen jedem Punkte x

der ersten Linie einen Punkt $y = \vartheta_k(x) = x + k$ entsprechen; die so erhaltenen Punkte reihen sich zu neuen Linien zusammen. Man construirt auf diese Weise ein System von unendlich vielen parallelen Geraden, welche auf der Abscissenaxe senkrecht stehen und den Abstand 1 besitzen. Die

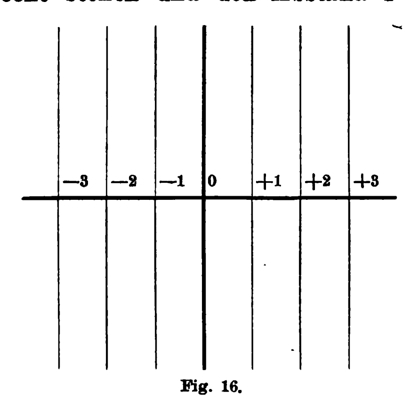


Fig. 16.

Parallelstreifen, in welche diese Geraden die gesammte Ebene zerlegen, haben, wie unmittelbar einleuchtet, die Eigenschaft, dass in keinem zwei äquivalente Punkte liegen, während je einem Punkte eines Streifens in jedem andern ein und nur ein Punkt entspricht*). Für die Punkte, die in *einem* Streifen liegen, nimmt $f(x)$ alle Werthe an, die es überhaupt annimmt.

An Stelle des eingeführten Systems von Geraden hätte man mit gleichem Erfolge irgend einen anderen Complex paralleler Geraden wählen können, von denen je zwei den in der Richtung der Abscissenaxe gemessenen Abstand 1 besitzen; die Richtung dieser Geraden ist ganz willkürlich, abgesehen davon, dass sie mit der Abscissenaxe nicht parallel sein dürfen; man sieht auch, dass man statt der Geraden mannichfache andere, beiderseits ins Unendliche laufende Curven zu Begrenzung hätte benutzen können. *Unter allen Umständen aber sind die Begrenzungen parallele Linien, die den in der Richtung der Abscissenaxe gemessenen Abstand*

*) In Betreff der Punkte, welche auf den Grenzlinien selbst liegen, kann man festsetzen, dass sie zu den Streifen zu rechnen sind, auf deren rechter (oder linker) Seite sie liegen. Ähnliche Bestimmungen sind in allen übrigen Fällen möglich.

1 *besitzen*; *man kann sagen, dass sich dieselben sämmtlich im Punkte* $x = \infty$ *unter einem Winkel von* 0^0 *schneiden.*

3. Lautet die Periodicitätsgleichung $y = px$, $|p| < 1$, so wählt man zur Parcellirung am zweckmässigsten eine Schar von Kreisen, die den Nullpunkt zum Centrum haben und deren Radien resp. $r, pr, p^2 r, p^3 r, \cdots, \frac{r}{p}, \frac{r}{p^2}, \cdots$ sind; r kann ganz willkürlich angenommen werden (s. Fig. 17). Um den wesentlichen Unstetigkeitspunkt $x = 0$ drängen sich

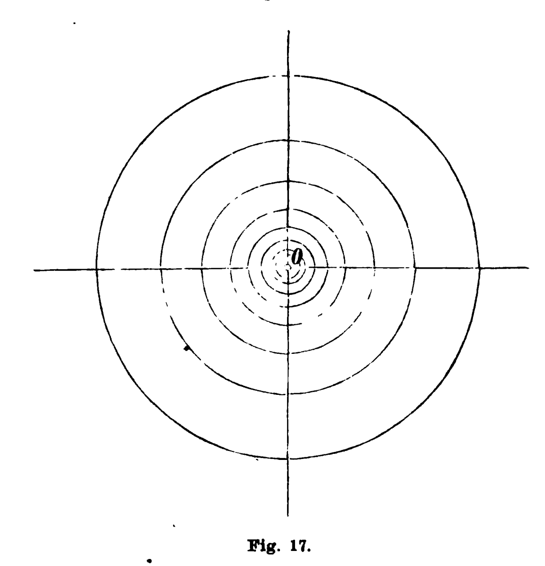


Fig. 17.

diese Kreise unendlich dicht zusammen, und das Gleiche kann man auch für $x = \infty$ annehmen. *Auch hier darf man die Kreise durch sehr mannichfache andere geschlossene Curven ersetzen, die aus einer derselben durch Abbildung mittelst* $y = p^k x$ *hervorgehen. Das Charakteristische für diese Curven ist, dass sie sich niemals schneiden.*

4. Für die Periodicitätsgleichung $y = px$, $p^n = 1$, finden wir eine geeignete Gebietseintheilung, wenn wir von $x = 0$ aus n Gerade, die gleiche Winkel von $\frac{360^0}{n}$ mit einander bilden, ins Unendliche ziehen (s. Fig. 18). *Auch an Stelle dieser Geraden können n andere Linien treten, die sich aber jedenfalls im Nullpunkte und, wie man annehmen muss, auch*

im Unendlichkeitspunkte unter Winkeln von $\frac{360^0}{n}$ *schneiden und die aus einer unter ihnen durch Abbildung mittelst* $y = p^k x$ *hervorgehen.*

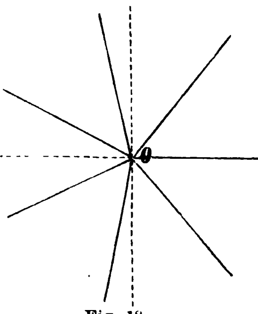


Fig. 18.

5. Wird $f[\varphi_1(x)] = F(x)$ an Stelle von $f(x)$, also die Periode $y = \varphi_{-1}\vartheta_1\varphi_1(x)$ an Stelle von $\vartheta_1(x)$ gesetzt ($\varphi_1(x)$ sei linear), so erhält man die neue Gebietseintheilung aus der alten, indem man die erstere durch $y = \varphi_1(x)$ auf einer neuen (oder, wenn man will, auch auf derselben) Ebene abbildet, wobei die Abbildungsgesetze von § 23 zur Geltung kommen, so dass also die *Winkel* bei dem alten und neuen Systeme die gleichen sind. Ohne auf diesen Gegenstand hier näher einzugehen, sei nur bemerkt, dass die neuen Gebietseintheilungen aus Kreislinien, die im speciellen Falle in Gerade übergehen können, bestehen, wenn dies bei den ursprünglichen der Fall war.

Fünfter Abschnitt.

Die additiv periodischen Functionen.

§ 38.

Die Exponentialfunction.

1. Wir wollen unsere Untersuchungen über additiv periodische Functionen nicht mit der allgemeinen Construction dieser Transcendenten eröffnen, da dieselbe auf Schwierigkeiten führt; vielmehr wollen wir uns durch eine algebraische Analogie leiten lassen. Die additive Periode kann nämlich, wie später (§ 40, 4) nachgewiesen werden soll, durch einen Grenzübergang aus der Periode $y = px$, $p^n = 1$, dadurch hergeleitet werden, dass man n ins Unendliche wachsen lässt. Da nun $f(x) = x^n$ die einfachste Function ist, welche die Periode $y = px$, $p^n = 1$ besitzt, so werden wir die Frage aufzuwerfen haben, *ob eine unendlich hohe Potenz einer geeigneten linearen Function von x einen bestimmten, endlichen Grenzwerth repräsentiren kann.*

Als einfachster Ausdruck dieser Art bietet sich uns

$$(1.) \qquad \varphi(x) = \left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^{\omega}$$

dar, worin ω die gewöhnliche Bedeutung einer reellen, ins Unendliche wachsenden Zahl besitzt; dass derselbe wirklich sich für endliche x einer bestimmten endlichen Grenze nähert, ist sofort ersichtlich, wenn wir (1.) nach dem binomischen Lehrsatze entwickeln; es ist

$$(2.) \qquad \varphi(x) = \left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^{\omega} = 1 + \frac{\omega}{1} \cdot \frac{x}{\omega} + \frac{\omega(\omega-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x^2}{\omega^2} + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{x^3}{\omega^3} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x}{1} + \frac{1 - \frac{1}{\omega}}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{\left(1 - \frac{1}{\omega}\right)\left(1 - \frac{2}{\omega}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3$$
$$+ \frac{\left(1 - \frac{1}{\omega}\right)\left(1 - \frac{2}{\omega}\right)\left(1 - \frac{3}{\omega}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot x^4 + \cdots$$

und unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen gegen endliche

$$(3.)\quad \varphi(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots.$$

Der hier vollzogene Grenzübergang ist von Bedenken keineswegs frei und bedarf einer genaueren Prüfung; wir wollen dieselbe hier eingehend vornehmen, um sie bei späteren, analogen Gelegenheiten übergehen zu können. Die Coefficienten von (2.) stellen sich als ganze Functionen von $\frac{1}{\omega}$, also in der Form

$$(4.)\qquad a_0 + \frac{a_1}{\omega} + \frac{a_2}{\omega^2} + \cdots + \frac{a_n}{\omega^n}$$

dar; es leuchtet ein, dass, soweit nur n endlich ist, bei einem über alle Grenzen wachsenden ω sämmtliche Glieder dieses Ausdrucks ausser dem ersten unter jede noch so klein angenommene endliche Grösse sinken und dass dies also auch mit ihrer Summe der Fall ist, sodass wir für (4.) vollkommen genau a_0 setzen dürfen; auch wenn wir eine *endliche* Zahl von Gliedern der Reihe (2.) zusammennehmen, ist diese Vernachlässigung des Unendlichkleinen durchaus gerechtfertigt. Es kann daher nur die Frage entstehen, ob nicht durch die Vernachlässigung des Unendlichkleinen in *unendlich vielen* Gliedern ein *endlicher* Fehler entstehen kann. Nun zeigt aber das Cauchy'sche Kriterium, dass sowohl (2.) als auch (3.) Reihen sind, die für jedes endliche x unbedingt convergiren; denn für (2.) ist

$$\left|\frac{u_{\omega'+1}}{u_{\omega'}}\right| = \left|\frac{\dfrac{\omega(\omega-1)(\omega-2)\cdots(\omega-\omega')}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(\omega'+1)}}{\dfrac{\omega(\omega-1)\,\omega-2)\cdots(\omega-\omega'+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\omega'}}\right|$$

$$= \left| \frac{\omega - \omega'}{\omega - \omega' + 1} \cdot \frac{1}{\omega' + 1} \right| = \frac{1}{\omega' + 1} = 0^{*}),$$

und für (3.) haben wir

$$\left| \frac{u_{\omega'+1}}{u_{\omega'}} \right| = \left| \frac{\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (\omega' + 1)}}{\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \omega}} \right| = \frac{1}{\omega'} = 0.$$

Man kann daher von beiden Reihen die n ersten Glieder absondern und dabei die *endliche* Zahl n so gross wählen, dass die übrigbleibenden Reste (resp. deren absolute Beträge) bei beiden kleiner wie jede noch so kleine vorgelegte Grösse sind. Nun verursacht die Vernachlässigung des Unendlichkleinen in (2.) bei den ersten n Gliedern keine Unrichtigkeit; die Reste aber können in beiden Reihen so klein angenommen werden, wie man will, so dass sie auch nur eine als beliebig klein anzunehmende Differenz besitzen. Man sieht also, dass der obige Grenzübergang vollkommen streng ist.

Der Ausdruck (3.) stellt eine *transcendente, ganze* Function dar.

2. Setzen wir $x = 1$, so erhalten wir

$$(5.) \qquad \varphi(1) = \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots.$$

Es ist allgemein gebräuchlich, für diese Constante den Buchstaben e zu gebrauchen; aus der sehr convergenten Reihe (5.) berechnet man

$$e = 2{,}718\ 281\ 828\ 459 \cdots.$$

Sehr leicht ist es nachzuweisen, dass e eine *irrationale* Zahl ist. Wären nämlich $e = \frac{m}{n}$, m und n ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler, so hätten wir

*) Dieser Grenzübergang scheint bedenklich, wenn $\omega - \omega' + 1 = 0$ wird; allein in diesem Falle bricht die Reihe im Unendlichen bei $\omega' = \omega + 1$ ab, und wir brauchen den vorliegenden Quotienten nur für kleinere ω' zu bilden.

$$en! = m(n-1)! = n!\left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$
$$+ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots.$$

Nun ist aber

$$n!\left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

eine ganze Zahl und

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots$$
$$< \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right)$$
$$< \frac{1}{(n+1)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} < \frac{1}{n},$$

also ein ächter Bruch; aus unserer Annahme würde mithin folgen, dass die ganze Zahl $m(n-1)!$ einer ganzen Zahl, vermehrt um einen ächten Bruch, gleich wäre. e kann also nicht rational sein. — Herr Hermite hat weiter bewiesen, dass e auch nicht die Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen Coefficienten ist, dass also e eine sog. *transcendente* Zahl darstellt.

3. Die transcendente ganze Function $\varphi(x)$ gewinnt ein erhöhtes Interesse dadurch, dass sie sich für reelle, rationale, endliche x mit einem Ausdrucke von ganz anderer Entstehungsweise identisch erweist. Bezeichnet nämlich x eine solche Zahl und setzen wir fest, dass wir für eine Potenz einer positiven Zahl mit gebrochnem Exponenten (also eine Wurzelgrösse) immer ihren reellen, positiven Werth wählen wollen, so können wir

$$(6.) \qquad e^x = \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega x}$$

ebenfalls nach dem binomischen Lehrsatze entwickeln; wir finden

$$(7.) \qquad e^x = 1 + \frac{\omega x}{1\cdot\omega} + \frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{\omega x(\omega x - 1)}{\omega^2}$$
$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{\omega x(\omega x - 1)(\omega x - 2)}{\omega^3} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots = \varphi(x).$$

Die Function $\varphi(x)$ stimmt demnach für reelle, rationale, endliche x mit dem Ausdrucke e^x überein; wir bezeichnen sie deshalb als *Exponentialfunction* und wollen in der Folge dem allgemeinen Gebrauche gemäss überhaupt e^x statt $\varphi(x)$ schreiben, auch für irrationale und complexe x. Es muss aber ausdrücklich bemerkt werden, dass e^x im letzteren Falle nur als eine *symbolische* Bezeichnung angesehen werden darf, da eine Potenz nur für reelle, rationale Exponenten einen Sinn hat; e^x ist für uns lediglich *eine transcendente ganze Function, keine Exponentialfunction im eigentlichen Sinne des Wortes.*

4. Für reelle, rationale x und y gilt nach den Elementen der Arithmetik und nach der eben gefundenen Identität die Functionalgleichung

$$e^x e^y = e^{x+y},$$

und es fragt sich, ob dieselbe für *beliebige* x und y bestehen bleibt. In der That ist

$$e^x e^y = \left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^\omega \left(1 + \frac{y}{\omega}\right)^\omega = \left(1 + \frac{x+y}{\omega} + \frac{xy}{\omega^2}\right)^\omega$$
$$= \left(1 + \frac{1}{\omega}\left(x + y + \frac{xy}{\omega}\right)\right)^\omega = e^{x+y+\frac{xy}{\omega}}.$$

Bedenkt man, dass e^x als transcendente ganze Function durchaus stetig ist, sich also für verschwindende Änderungen des Argumentes nur um einen verschwindenden Betrag ändert, so kann man die verschwindend kleine Grösse $\frac{xy}{\omega}$ vernachlässigen und findet das fundamentale „*Additionstheorem*“ für die Exponentialfunction:

$$(8.) \qquad e^x e^y = e^{x+y}\;{}^{*)}.$$

Schon hieraus könnten wir mit Hülfe von § 33 schliessen, dass e^x periodisch ist; doch werden wir später erst diesen Gegenstand eingehend erledigen.

5. *e^x verschwindet für kein endliches x.* Der Ausdruck $\left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^\omega$ könnte nämlich erstens dadurch Null werden, dass

---

*) Specielle Folgerungen hieraus sind: $e^x e^{-x} = e^0 = 1$, also $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$; $(e^x)^n = e^x e^x \cdots e^x = e^{nx}$ u. s. w.; man sieht, dass mit e^x ganz wie mit einer gewöhnlichen Potenz gerechnet werden kann.

$1 + \frac{x}{\omega}$ verschwindet, was aber für kein endliches x der Fall ist; oder $\left|1 + \frac{x}{\omega}\right|$ müsste für gewisse x soviel kleiner als 1 sein, dass $\left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^{\omega}$ gegen die Null convergirt. Da aber $\left|1 + \frac{x}{\omega}\right| \geqq 1 - \left|\frac{x}{\omega}\right|$ ist, so müsste das Gleiche für $\left(1 - \left|\frac{x}{\omega}\right|\right)^{\omega}$ und noch mehr für $\left(1 - \left|\frac{\xi}{\omega}\right|\right)^{\omega}$ der Fall sein, wenn $|\xi| > |x|$ ist. e^x müsste also für eine zusammenhängende Reihe von Argumenten, mithin für jedes Argument constant gleich Null sein, was natürlich nicht zutrifft (für $x = 0$ wird beispielsweise $e^0 = 1$).

Wir lernen hier das erste Beispiel einer transcendenten ganzen Function kennen, die für kein endliches x verschwindet. Die Form $\left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^{\omega}$ führt uns indessen zu der Annahme (vgl. § 29, 7), *dass e^x für unendlich grosse x unendlich vielfach den Werth Null annimmt.*

6. Für positive, ins Unendliche wachsende x nimmt auch x ins Unendliche zu, da in

$$e^{\omega} = 1 + \frac{\omega}{1} + \frac{\omega^2}{1 \cdot 2} + \frac{\omega^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

sämmtliche Glieder sich dem Unendlichen nähern, und zwar wächst e^{ω} stärker ins Unendliche wie jede noch so hohe Potenz x^n von x; denn es ist

$$\begin{aligned}\frac{e^{\omega}}{\omega^n} &= \frac{1}{\omega^n}\left[1 + \frac{\omega}{1} + \frac{\omega^2}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{\omega^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}\right] \\ &\quad + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n} + \frac{\omega}{1 \cdot 2 \cdots (n+1)} + \cdots \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n} + \frac{\omega}{1 \cdot 2 \cdots (n+1)} + \cdots,\end{aligned}$$

also unendlich.

§ 39.

Die trigonometrischen Functionen.

1. Bevor wir mit der Untersuchung der Exponentialfunction fortfahren, wollen wir einige mit e^x in engstem Zusammenhange stehende Transcendenten einführen, deren Aus-

wahl sich in der Folge als zweckmässig erweisen wird. Wir setzen

$$(1.)\qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{e^{ix} + \frac{1}{e^{ix}}}{2},$$

$$(2.)\qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{e^{ix} + \frac{1}{e^{ix}}}{2i}.$$

Aus § 38, (3.) folgt

$$(3.)\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots,$$

$$(4.)\quad \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots;$$

$\cos x$ ist eine *gerade*, $\sin x$ eine *ungerade* Function von x, d. h. es ist $\cos(-x) = \cos x$ und $\sin(-x) = -\sin x$, wie aus (3.) und (4.) unmittelbar hervorgeht.

2. Dass wir für die Transcendenten (1.) und (2.) die nämlichen Bezeichnungen anwenden, wie für die *trigonometrischen* Functionen Cosinus und Sinus, rechtfertigt sich dadurch, dass jene Transcendenten wirklich mit den entsprechenden trigonometrischen Functionen zusammenfallen, wenn x *reell* ist. In der That ist, wenn wir jetzt $\cos x$ und $\sin x$ in ihrer trigonometrischen Bedeutung gebrauchen (und wie bisher unter x den betreffenden Kreisbogen mit dem Radius 1 verstehen), nach dem Moivre'schen Satze

$$\cos x + i \sin x = \left(\cos \frac{x}{\omega} + i \sin \frac{x}{\omega}\right)^{\omega}$$
$$= \left[\sqrt{1 - \sin^2 \frac{x}{\omega}} + i \sin \frac{x}{\omega}\right]^{\omega},$$

wobei für die Quadratwurzel derjenige Werth zu wählen ist, der für $x = 0$ in $+1$ übergeht, oder, wenn wir die Quadratwurzel nach dem binomischen Satze entwickeln,

$$\cos x + i \sin x = \left[1 + \frac{\omega}{\omega} \sin \frac{x}{\omega}\left(i - \tfrac{1}{2} \sin \frac{x}{\omega} - \tfrac{1}{8} \sin^3 \frac{x}{\omega} - \cdots\right)\right]^{\omega}$$
$$= e^{\omega \sin \frac{x}{\omega}}\left(i - \tfrac{1}{2} \sin \frac{x}{\omega} - \tfrac{1}{8} \sin^3 \frac{x}{\omega} - \cdots\right).$$

Nun ist für $|x| < \frac{\pi}{2}$ bekanntlich

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|,$$

also

$$\left|\omega \sin\frac{x}{\omega}\right| < |x| < \left|\omega \operatorname{tg}\frac{x}{\omega}\right|;$$

$\left|\omega \sin\frac{x}{\omega}\right|$ und $\left|\omega \operatorname{tg}\frac{x}{\omega}\right|$ nähern sich aber der gleichen Grenze, da

$$\frac{\left|\omega \sin\frac{x}{\omega}\right|}{\left|\omega \operatorname{tg}\frac{x}{\omega}\right|} = \left|\cos\frac{x}{\omega}\right| = \cos 0 = 1$$

ist, und in Folge dessen fällt $\omega \sin\frac{x}{\omega}$ mit x zusammen. Bedenken wir noch, dass $\sin\frac{x}{\omega}$ sich der Null nähert und dass bei dem Argumente der stetigen Exponentialfunction verschwindende Grössen vernachlässigt werden dürfen, so finden wir

$$\cos x + i \sin x = e^{ix} \tag{5.}$$

und durch Änderung des Zeichens

$$\cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i \sin x = e^{-ix} \tag{6.}$$

und hieraus die Gleichungen (1.) und (2.).

Ganz wie bei der Exponentialfunction werden wir die Bezeichnungen, die ursprünglich nur gewissen Functionen mit *reellem* Argumente zukommen, auf solche mit beliebigem *complexem* Argumente übertragen, welche mit den ersteren für reelle x übereinstimmen.

Natürlich können wir jetzt auch die Bezeichnungen

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ u. s. w.}$$

für Functionen mit beliebigem x anwenden.

3. Aus dem Additionstheorem für e^x ergeben sich die Additionstheoreme für die trigonometrischen Functionen, die aus der Elementarmathematik für reelle Argumente bekannt sind. Es ist

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \frac{e^{ix+iy} + e^{-ix-iy}}{2} = \frac{e^{ix}e^{iy} + e^{-ix}e^{-iy}}{2} \\ &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\cdot\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} - \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\cdot\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i} \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{aligned} \tag{7.}$$

und ebenso

$$(8.)\qquad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Weiter ist

$$(9.)\quad \cos^2 x + \sin^2 x = \frac{(e^{ix}+e^{-ix})^2}{4} - \frac{(e^{ix}-e^{-ix})^2}{4} = 1,$$

mithin

$$(10.)\qquad \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x},$$

$$(11.)\qquad \sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}.$$

Zwischen $\sin x$ und $\cos x$ besteht also eine *irrationale* Beziehung, aus der aber keineswegs zu schliessen ist, dass zu *einem* x zwei verschiedene Werthe von $\sin x$ oder $\cos x$ gehören; vielmehr sind $\sin x$ und $\cos x$, wie aus ihrer Definition hervorgeht, durchaus *eindeutige* transcendente ganze Functionen von x; (10.) und (11.) sind also immer nur für *einen* der Wurzelwerthe richtig. Die Gleichungen (7.) und (8.) können leicht so umgeformt werden, dass in (7.) rechts nur $\cos x$ und $\cos y$, in (8.) nur $\sin x$ und $\sin y$ vorkommt; allein dann nehmen diese Gleichungen eine irrationale Form an, bei der die richtige Zuordnung der jedesmal zu wählenden Werthe der Wurzeln nicht ohne Weiteres ersichtlich ist.

Aus den Formeln (7.), (8.) und (9.) lassen sich alle trigonometrischen Relationen herleiten, die in der Elementarmathematik eine Rolle spielen, deren Zusammenstellung indessen hier überflüssig erscheint.

4. Wir bleiben einen Augenblick bei den gefundenen Resultaten stehen, um uns zuerst von dem Verlaufe der Functionen $\cos x$, $\sin x$ und e^x ein anschauliches Bild zu verschaffen; mit Hülfe der gefundenen Beziehungen zu geometrischen und elementararithmetischen Relationen wird uns dies am Leichtesten gelingen, obgleich auch eine rein arithmetische Darstellung nicht unmöglich ist*).

Die Transcendente $\sin x$ verschwindet, wie die geometrische Anschauung zeigt, für $x = 0$, wächst dann für zu-

*) Ich möchte bei dieser Gelegenheit auf die Behandlungsweise von Herrn J. Thomae in dessen *„Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen"*, pag. 48 ff. hinweisen.



nehmende reelle x bis $1 = \sin\frac{\pi}{2}$, nimmt dann beständig ab und passirt $0 = \sin\pi$, geht dann ins Negative bis $-1 = \sin\frac{3\pi}{2}$ und steigt wieder zu $0 = \sin 2\pi$, worauf sich bei weiterem Wachsthum des reellen x dieselben Werthe wiederholen; auch für negative x erhält man keine anderen Werthe, da $\sin(-x) = -\sin x$ ist. Ganz ähnlich verhält sich die Function $\cos x$; es ist $\cos 0 = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\cos\pi = -1$, $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, $\cos 2\pi = 1$ u. s. w., und der Verlauf für die dazwischen liegenden reellen x ist unmittelbar ersichtlich; für negative x erhalten wir die gleichen Werthe, da $\cos(-x) = \cos x$ ist. Für *reelle* x ist durch die geometrische Anschauung ohne Weiteres klar, dass $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ und $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ ist, *dass also* $\sin x$ *und* $\cos x$ *die additive Periode* 2π *besitzen;* aber auch für *beliebige* x folgt dies aus den letzten Resultaten und den Formeln (7.) und (8.); es ist nämlich

$$(12.)\quad \sin(x + 2\pi) = \sin x\cos 2\pi + \cos x\sin 2\pi = \sin x$$

und

$$(13.)\quad \cos(x + 2\pi) = \cos x\cos 2\pi - \sin x\sin 2\pi = \cos x.$$

Auch erkennt man, dass $\sin x$ und $\cos x$ keine *kleinere* additive reelle Periode wie 2π besitzen, da dies, wie aus der geometrischen Betrachtung hervorgeht, für reelle x nicht der Fall ist. Hiermit ist jedoch nicht ausgeschlossen, dass $\sin x$ und $\cos x$ auch für Werthe des Argumentes, die durch die Periodicität nicht verbunden sind, gleiche Werthe annehmen können; wir wissen schon, dass

$$(14.)\quad \cos(-x) = \cos x$$

ist, und haben weiter

$$(15.)\quad \sin(\pi - x) = \sin\pi\cos x - \cos\pi\sin x = \sin x,$$

so dass $\cos x$ noch die zweite, rückkehrende Periode $y = -x$, $\sin x$ aber die Periode $y = \pi - x$ besitzt. Ein Blick auf eine Figur zeigt, dass $\cos x$ und $\sin x$ nur für solche *reelle* x, die durch die aus den Gleichungen (13.) und (14.), resp. (12.) und (15.) hervorgehenden Relationen verbunden sind, gleiche Werthe annehmen.

Ferner ist

$$(16.)\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos x-\cos\frac{\pi}{2}\sin x=\cos x,$$

so dass sich $\cos x$ aus $\sin x$ durch eine lineare Substitution herleiten lässt und umgekehrt.

Für rein imaginäre $x=\eta i$ haben wir

$$(17.)\quad \sin\eta i=i\frac{e^{\eta}-e^{-\eta}}{2}=i\left(\frac{\eta}{1}+\frac{\eta^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\eta^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots\right)$$

und

$$(18.)\quad \cos\eta i=\frac{e^{\eta}+e^{-\eta}}{2}=1+\frac{\eta^2}{1\cdot 2}+\frac{\eta^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots;$$

wir ersehen hieraus, dass $\sin x$ für rein imaginäre x einen rein imaginären Werth besitzt, der beständig von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, wenn dies mit η der Fall ist; $\sin x$ kann daher für rein imaginäre x keinen Werth zweimal annehmen. $\cos x$ ist für imaginäre x reell und grösser wie 1; wächst $|\eta|$ von Null bis unendlich, so wächst $\cos\eta i$ beständig von 1 bis unendlich; für rein imaginäre x nimmt daher $\cos x$ jeden Werth zweimal an, nämlich immer den gleichen für $-x$ und $+x$.

Mit Hülfe dieser Resultate und der Gleichungen (7.) und (8.) lässt sich nun auch der Verlauf der Functionen $\sin x$ und $\cos x$ für beliebige complexe $x=\xi+\eta i$ beurtheilen. Es ist

$$(19.)\quad \sin(\xi+\eta i)=\sin\xi\cos\eta i+\cos\xi\sin\eta i$$
$$=\sin\xi\,\frac{e^{\eta}+e^{-\eta}}{2}+i\cos\xi\,\frac{e^{\eta}-e^{-\eta}}{2}$$

und

$$(20.)\quad \cos(\xi+\eta i)=\cos\xi\cos\eta i-\sin\xi\sin\eta i$$
$$=\cos\xi\,\frac{e^{\eta}+e^{-\eta}}{2}-i\sin\xi\,\frac{e^{\eta}-e^{-\eta}}{2},$$

und es ist so der Werth von $\sin x$ und $\cos x$ in einen reellen und einen rein imaginären Theil zerlegt; $\sin x$ und $\cos x$ sind für complexe x im Allgemeinen complex; reell wird $\sin x$ nur für $\eta=0$ oder $\xi=(k+\frac{1}{2})\pi$, $\cos x$ dagegen für $\eta=0$ oder $\xi=k\pi$.

5. Da

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

ist, so folgt, dass auch e^{ix} die additive Periode 2π, also e^x die additive Periode $2\pi i$ besitzt; wir haben für ganzzahlige k

(21.) $$e^{x+2k\pi i} = e^x$$

und daher

(22.) $$e^{2k\pi i} = 1.$$

Es ist nun von Wichtigkeit festzustellen, ob e^x auch für Werthe von x, die nicht um $2k\pi i$ verschieden sind, den gleichen Werth annehmen kann. Zunächst geht aus

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

hervor, dass e^x für reelle x, die von 0 bis $+\infty$ wachsen, reell ist und beständig von 1 bis $+\infty$ zunimmt, während aus der Gleichung

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

ersichtlich ist, dass e^x für negative x, die von 0 bis $-\infty$ abnehmen, von 1 bis 0 abnimmt. Durchläuft daher x alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, so durchläuft e^x beständig wachsend die reellen Werthe von 0 bis $+\infty$; e^x kann also nicht für zwei verschiedene reelle x den gleichen Werth annehmen.

Setzen wir wieder $x = \xi + \eta i$, so ist

(23.) $$e^{\xi+\eta i} = e^{\xi} e^{\eta i} = e^{\xi}(\cos\eta + i\sin\eta) = e^{\xi}\cos\eta + ie^{\xi}\sin\eta,$$

so dass sich e^x für beliebige complexe x leicht in seinen reellen und seinen rein imaginären Theil zerlegen lässt. Wir fragen nun: wann ist

$$e^{\xi+\eta i} = e^{\xi_1+\eta_1 i}$$

oder

(24.) $$e^{\xi}(\cos\eta + i\sin\eta) = e^{\xi_1}(\cos\eta_1 + i\sin\eta_1)\,?$$

Vor allen Dingen werden die absoluten Beträge der beiden Seiten von (24.) übereinstimmen müssen, d. h. wegen

$$|\cos\eta + i\sin\eta| = 1, \quad |\cos\eta_1 + i\sin\eta_1| = 1$$

muss

(25.) $$e^{\xi} = e^{\xi_1},$$

also nach Obigem

$$\xi = \xi_1$$

sein. Aus (24.) gehen mit Berücksichtigung von (25.) und durch Trennung von Reellem und Imaginärem die Gleichungen

(26.) $$\cos\eta = \cos\eta_1$$

und

(27.) $$\sin\eta = \sin\eta_1$$

hervor. (26.) kann, da η und η_1 reell sind, nach der vorigen Nummer nur statthaben, wenn

$$\eta_1 = \eta + 2k\pi$$

oder

$$\eta_1 = -\eta + 2k\pi$$

ist, während (27.) nur bestehen kann, wenn

$$\eta_1 = \eta + 2k\pi$$

oder

$$\eta_1 = \pi - \eta + 2k\pi = -\eta + (2k+1)\pi$$

ist. Da aber (26.) und (27.) *gleichzeitig* statthaben sollen, so ist nur die Annahme

$$\eta_1 = \eta + 2k\pi$$

möglich. e^x kann also nicht für zwei x-Werthe gleichwerthig sein, wenn diese nicht um $2k\pi i$ differiren.

Ferner lässt sich erkennen, dass $e^x = e^{\xi+\eta i}$ jeden beliebigen endlichen, von Null verschiedenen Werth $a + bi$ annimmt, wenn man x alle möglichen Werthe durchlaufen lässt. Denn soll

$$e^{\xi+\eta i} = a + bi$$

oder

$$e^{\xi}(\cos\eta + i\sin\eta) = a + bi$$

oder

$$e^{\xi}\cos\eta = a,$$
$$e^{\xi}\sin\eta = b$$

sein, so folgt durch Quadriren und Addiren der beiden letzten Gleichungen

$$e^{2\xi} = a^2 + b^2,$$

eine Gleichung, die durch ein reelles ξ befriedigt werden kann, wie man sofort erkennt, wenn man ξ alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lässt; ξ ist immer endlich, wenn nicht $a = b = 0$ ist. Setzen wir nun

$$e^{\xi} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

so folgt weiter

$$\cos\eta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\left(\text{womit } \sin\eta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+b^2}} \text{ identisch ist}\right);$$

dieser Gleichung lässt sich aber durch ein reelles η genügen, da

$$\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| < 1$$

ist. Das Gesammtresultat lautet:

Die Function e^x bleibt ungeändert, wenn man $x+2k\pi i$ an Stelle von x setzt; alle Functionalwerthe, deren Argumente nicht um $2k\pi i$ differiren, sind von einander verschieden. e^x nimmt jeden endlichen, von Null verschiedenen Werth unendlich oft an.

Stellen wir § 37 entsprechend eine Parcellirung der Ebene der complexen Zahlen her, indem wir etwa parallel mit der Abscissenaxe im jeweiligen Abstande 2π unendlich viele Gerade ziehen, so nimmt e^x in jedem Parallelstreifen jeden Werth einmal und nur einmal an.

6. Die Functionen $\sin x$ und $\cos x$ zeigen insofern einen complicirteren Charakter, als sie nicht allein für solche Werthe, die um $2k\pi$ differiren, gleiche Werthe annehmen, wie aus den Gleichungen (14.) und (15.) hervorgeht. Dass aber durch diese und die Gleichungen (12.) und (13.) auch *alle* x bestimmt sind, für die $\sin x$ und $\cos x$ denselben Werth annehmen (und zwar nicht blos für reelle x, um die es sich weiter oben handelte), ist daraus ersichtlich, dass sich e^{ix} aus $\cos x$ und $\sin x$ durch quadratische Gleichungen (nämlich (1.) und (2.)) berechnet, so dass zu jedem $\sin x$ und $\cos x$ nur *zwei* Werthe von e^{ix} gehören können; da e^{ix} in jedem der Parallelstreifen, in die die Ebene der complexen Zahlen durch Parallele zur Ordinatenaxe mit dem jeweiligen Abstande 2π zerlegt wird, jeden Werth nur *einmal* annimmt, so können $\sin x$ und $\cos x$ in demselben jeden Werth nur *zweimal* annehmen.

Dass $\sin x$ und $\cos x$ jeden beliebigen Werth erhalten können, lässt sich ähnlich wie für e^x darthun.

Die Nullpunkte von $\sin x$ und $\cos x$ sind resp.

$$x = k\pi \quad \text{und} \quad x = (k + \tfrac{1}{2})\pi. \tag{28.}$$

7. Aus

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

folgt, dass der Moivre'sche Satz nur ein specieller Fall des Additionstheorems für e^x ist und dass er sich demnach auf complexe x ausdehnen lässt.

8. Entwickelt man in

$$(\cos x \pm i \sin x)^n = \cos nx \pm i \sin nx$$

die linke Seite nach dem binomischen Satze, so erhält man

$$\cos nx + i \sin nx = \cos^n x + i \frac{n}{1} \cos^{n-1} x \sin x$$
$$- \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos^{n-2} x \sin^2 x - i \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{n-3} x \sin^3 x$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^{n-4} x \sin^4 x + \cdots$$

und

$$\cos nx - i \sin nx = \cos^n x - i \frac{n}{1} \cos^{n-1} x \sin x$$
$$- \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos^{n-2} x \sin^2 x + i \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{n-3} x \sin^3 x$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^{n-4} x \sin^4 x + \cdots$$

und durch Addition und Subtraction der beiden letzten Gleichungen und Division durch 2, resp. $2i$:

$$\cos nx = \cos^n x - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos^{n-2} x \sin^2 x$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^{n-4} x \sin^4 x - \cdots \tag{29.}$$

und

$$\sin nx = \frac{n}{1} \cos^{n-1} x \sin x - \frac{n(n-1)(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{n-3} x \sin^3 x$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cos^{n-5} x \sin^5 x + \cdots, \tag{30.}$$

Formeln, die noch mancherlei Umformungen und Erweiterungen zugänglich sind.

9. Haben wir so gezeigt, wie sich die trigonometrischen Functionen des $n$fachen Argumentes durch diejenigen des einfachen ausdrücken, so fragt es sich, wie umgekehrt die des

einfachen Argumentes sich durch diejenigen des $n$fachen darstellen lassen. Da

$$\cos x = \frac{e^{ix} + \frac{1}{e^{ix}}}{2}$$

und umgekehrt

$$e^{ix} = \cos x + i\sqrt{1 - \cos^2 x}$$

ist, so haben wir

$$(31.)\qquad \cos x = \frac{e^{ix} + \frac{1}{e^{ix}}}{2} = \frac{\sqrt[n]{e^{inx}} + \frac{1}{\sqrt[n]{e^{inx}}}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt[n]{\cos nx + i\sqrt{1 - \cos^2 nx}} + \frac{1}{\sqrt[n]{\cos nx + i\sqrt{1 - \cos^2 nx}}}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt[n]{\cos nx + i\sqrt{1 - \cos^2 nx}} + \sqrt[n]{\cos nx - i\sqrt{1 - \cos^2 nx}}}{2}.$$

Man sieht also, dass sich $\cos x$ aus $\cos nx$ $\left(\text{oder } \cos\frac{x}{n}\right.$ aus $\left.\cos x\right)$ mit Hülfe von Wurzelausziehungen berechnen lässt; Gleiches gilt für $\sin x$. Die genauere Discussion der verschiedenen Werthe der rechten Seite von (31.) glauben wir dem Leser überlassen zu dürfen. (Vgl. § 15, 2.)

§ 40.

Der Logarithmus.

1. Die Umkehrung von e^x bezeichnen wir mit $\log x$ *(Logarithmus x)*, so dass die Gleichung

$$(1.)\qquad e^{\log x} = x$$

gilt. Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass die so definirten Logarithmen, die man als die *natürlichen* bezeichnet, sich mit den Logarithmen der Grundzahl e im elementarmathematischen Sinne nur theilweise decken. Die letzteren haben nur einen Sinn für ein *reelles positives* Element und stellen eine bestimmte, reelle Grösse dar. Die hier definirte Function $\log x$ ist unendlich vieldeutig; denn wird die Gleichung $e^y = x_1$ durch $y = y_1$ befriedigt, so genügen auch die Grössen $y_1 + 2k\pi i$ und nur diese derselben.

Die Function $\log x$ *hat für jedes* x *unendlich viele Werthe, welche sich um* $2k\pi i$ *von einander unterscheiden; abgesehen von dieser Vieldeutigkeit ist aber* $\log x$ *eindeutig* (§ 39, 5).

2. Aus § 38, (8.) folgt die Functionalgleichung

$$\log x + \log y = \log xy + 2k\pi i \tag{2.}$$

und hieraus u. A.

$$\log \frac{1}{x} + \log x = \log 1 + 2k\pi i = 2k\pi i,$$

also

$$\log \frac{1}{x} = -\log x + 2k\pi i. \tag{3.}$$

3. Aus § 39 folgt, dass $\log x$ zwar für jedes x auch den Werth unendlich annimmt, insofern in $\log x + 2k\pi i$ die ganze Zahl k unendlich werden kann; doch giebt es unter den unendlich vielen Werthen von $\log x$ immer endliche, wenn nicht $x = 0$ oder $x = \infty$ ist; denn e^x wird nur Null oder unendlich, wenn $x = \infty$ ist. In welcher Weise der reelle Werth von $\log x$ ins Unendliche wächst, wenn dies mit der *positiven* Grösse x der Fall ist, geht aus § 38, 6 hervor. Da nämlich e^x unter den entsprechenden Bedingungen stärker ins Unendliche wächst wie jede noch so hohe Potenz x^n, also x schwächer wie jede noch so hohe Wurzel $\sqrt[n]{e^x}$, so können wir den Satz aussprechen:

Für wachsende positive x *wächst der reelle Werth von* $\log x$ *schwächer ins Unendliche wie* $x^{\frac{1}{n}}$, *mag* n *noch so gross gewählt werden.*

Dieses Resultat lässt sich mittelst (3.) auch auf $\log 0$ übertragen.

Nimmt man vom Logarithmus wieder den Logarithmus, von diesem abermals den Logarithmus u. s. w., so erhält man der Reihe nach Functionen, von denen jede für unendlich wachsende positive x unendlich schwächer ins Unendliche wächst wie die vorhergehende; eine untere Grenze für den Grad des Unendlichwerdens giebt es nicht. Die Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ sind als *wesentliche Unstetigkeitspunkte* anzusehen, da $x^n \log x$ für kein beliebig gebrochenes, doch endliches n in diesen Punkten einen endlichen, von Null verschiedenen Werth annimmt.

4. Aus

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^\omega$$

wird

$$x = \left(1 + \frac{\log x}{\omega}\right)^\omega,$$

$$x^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{\log x}{\omega},$$

also

$$\log x = \omega\left(x^{\frac{1}{\omega}} - 1\right). \tag{4.}$$

Die Umkehrung von e^x lässt sich also, wie dies nach den einleitenden Betrachtungen über periodische Functionen nicht anders zu erwarten war, *durch eine Wurzelgrösse mit unendlich hohem Exponenten* darstellen.

Die Auswerthung des Grenzausdruckes (4.) wird weiter unten folgen; hier wollen wir zunächst prüfen, wie es sich mit der Vieldeutigkeit von $\log x$ nach (4.) verhält. Die ω Werthe von $x^{\frac{1}{\omega}}$ findet man sämmtlich, wenn man einen derselben, den wir kurzweg mit $x^{\frac{1}{\omega}}$ bezeichnen, mit den ω^{ten} Einheitswurzeln

$$\cos\frac{2k\pi}{\omega} + i\sin\frac{2k\pi}{\omega} = e^{\frac{2k\pi i}{\omega}} = \left(1 + \frac{2k\pi i}{\omega}\right)^{\frac{\omega}{\omega}} = 1 + \frac{2k\pi i}{\omega}$$

multiplicirt. In Folge dessen erhalten wir für die sämmtlichen Werthe von $\log x$

$$\log x = \omega\left(x^{\frac{1}{\omega}}\left(1 + \frac{2k\pi i}{\omega}\right) - 1\right) = \omega\left(x^{\frac{1}{\omega}} - 1 + \frac{2k\pi i}{\omega}x^{\frac{1}{\omega}}\right) \tag{5.}$$

$$= \omega\left(x^{\frac{1}{\omega}} - 1\right) + 2k\pi i x^{\frac{1}{\omega}} = \omega\left(x^{\frac{1}{\omega}} - 1\right) + 2k\pi i,$$

da $x^{\frac{1}{\omega}}$ sich der Einheit unendlich nähert (vgl. § 5, 1, Anm.).

Diese Betrachtung zeigt zugleich, wie die additive Periode durch Grenzübergang aus der Periode $y = px$, $p^n = 1$ hervorgeht.

5. Da der Logarithmus wesentlich denselben Charakter hat wie eine Wurzelgrösse, so lässt sich für ihn auch in ganz analoger Weise die *Riemann'sche Fläche* construiren, die hier natürlich unendlich viele Blätter umfassen muss. Weil die

Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ auch Verzweigungspunkte sind, so durchschneiden wir die Gesammtheit der Blätter auf einer von $x = 0$ ins Unendliche laufenden Linie und verbinden auf derselben immer den rechten Rand (vom Nullpunkte aus gesehen) jedes Blattes mit dem linken des folgenden. Durch ein fortgesetztes Umkreisen des Nullpunktes in der einen oder der anderen Richtung gelangt man nach und nach aus jedem Blatte in die übrigen. Dass der Verlauf des Logarithmus wirklich ein entsprechender ist, wird ersichtlich, wenn man

$$\log x = \log [r(\cos\varphi + i \sin\varphi)]$$
$$= \log r + \log e^{i\varphi} = \log r + i\varphi + 2k\pi i$$

auf einem mit dem Radius r um den Nullpunkt beschriebenen Kreise verfolgt. Fixiren wir für $\log r$ einen bestimmten Werth, setzen $k = 0$ und lassen nun x den Nullpunkt in *positiver* Richtung umkreisen (d. h. von r nach ir u. s. w. sich bewegen), also φ beständig wachsen, so nimmt x immer wieder den gleichen Werth an, wenn φ um 2π gewachsen ist, d. h. wenn der Logarithmus in den um $2\pi i$ vermehrten Werth übergegangen ist.

6. Um für $\log x$ Potenzentwicklungen in jedem Punkte mit Ausnahme von $x = 0$ und $x = \infty$ herstellen zu können, wollen wir von einem besonders einfachen Specialfalle ausgehen. Es ist für denjenigen Werth von $\log(1 + x)$, der zu Null wird, wenn x ohne Umkreisung des singulären Punktes $x = -1$ in 0 übergeht:

$$(6.)\ \log(1+x) = \omega\left[(1+x)^{\frac{1}{\omega}} - 1\right] = \omega\left[1 + \frac{1}{\omega}\cdot\frac{x}{1} + \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{\omega}-1\right)\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{\omega}-1\right)\left(\frac{1}{\omega}-2\right)\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots - 1\right]$$
$$= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots,$$

eine Entwicklung, die für $|x| \leqq 1$ mit Ausnahme von $x = -1$ convergirt*).

*) Über die Berechtigung des Grenzübergangs vgl. § 38, 1.

Für $x = 1$ haben wir nach § 21, 5

$$\log 2 = \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots, \tag{7.}$$

eine äusserst schlecht convergirende Reihe.

Aus (6.) folgt weiter

$$\log(1 - x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots \tag{8.}$$

und

$$\log\frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x) \tag{9.}$$
$$= 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right).$$

Setzt man in (8.)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + z \quad \text{oder} \quad x = \frac{z}{z+1},$$

wobei z jede beliebige positive Zahl bedeuten darf (die zulässigen complexen Werthe sind leicht zu bestimmen!), so folgt

$$\log(1+z) = \log\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\log(1-x) \tag{10.}$$
$$= \tfrac{1}{1}\left(\frac{z}{z+1}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{z}{z+1}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{z}{z+1}\right)^3 + \cdots;$$

aus (9.) findet man durch die Substitution

$$\frac{1+x}{1-x} = z \quad \text{oder} \quad x = \frac{z-1}{z+1}$$

$$\log z = 2\left[\tfrac{1}{1}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \cdots\right], \tag{11.}$$

eine Reihe, die ebenfalls für alle positiven z convergirt. Es hat keine Schwierigkeit, mit Hülfe der gefundenen Reihen eine Tabelle der natürlichen Logarithmen zu entwerfen, wobei sich mannichfache Vortheile anwenden lassen; von den natürlichen Logarithmen, mit denen wir es in der Analysis zu thun haben, gelangt man nach elementarer Methode zu den gewöhnlichen Brigg'schen Logarithmen, indem man die ersteren mit $\frac{1}{\log 10} = 0{,}43429448$ multiplicirt.

7. Für $x = -1$ geht (6.) in das Negative der divergenten harmonischen Reihe

$$-\left(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots\right)$$

über, während $\log 0 = -\log\infty$ wird. Es liegt nun die Frage nahe, ob sich ein Ausdruck wie

$$(12.)\quad M_\omega = \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\omega} - \log(\omega + 1)$$

einer bestimmten endlichen Grenze nähert. Wir haben

$$(13.)\quad M_\omega = (1 - \log \tfrac{2}{1}) + (\tfrac{1}{2} - \log \tfrac{3}{2}) + (\tfrac{1}{3} - \log \tfrac{4}{3}) + \cdots + \left(\frac{1}{\omega} - \log\frac{\omega+1}{\omega}\right).$$

Da nun

$$\frac{1}{\mu} - \log\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) = \tfrac{1}{2}\frac{1}{\mu^2} - \tfrac{1}{3}\frac{1}{\mu^3} + \tfrac{1}{4}\frac{1}{\mu^4} - \cdots = \sum_2^\infty{}^n \frac{(-1)^n}{n}\frac{1}{\mu^n}$$

absolut convergent ist, wenn μ die Werthe $1, 2, 3, \ldots \omega$ annimmt, und weniger wie $\tfrac{1}{2}\frac{1}{\mu^2}$ beträgt, während

$$\sum_1^\infty{}^\mu \frac{1}{\mu^2}$$

nach § 5, 4 convergirt, so erkennt man, dass sich $M_\omega = M$ einer bestimmten Constante nähert. Man berechnet für sie, die sog. *Euler'sche* oder *Mascheroni'sche* Constante,

$$M = 0{,}577\,215\,664\,901\ldots$$

8. Es ist

$$\log(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

für $|x| \leqq 1$,

$$\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \cdots$$

für $|x| \geqq 1$, jedesmal $x = -1$ ausgenommen; beide Reihen convergiren daher gemeinsam für $|x| = 1$, $x = -1$ ausgenommen. Unter dieser Bedingung haben wir

$$(14.)\quad \log(1+x) - \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \log\frac{1+x}{1+\frac{1}{x}} = \log x$$

$$= \frac{x - \frac{1}{x}}{1} - \frac{x^2 - \frac{1}{x^2}}{2} + \frac{x^3 - \frac{1}{x^3}}{3} - \frac{x^4 - \frac{1}{x^4}}{4} + \cdots.$$

Setzen wir $x = e^{iw}$, also $\log x = iw + 2k\pi i$, so haben wir unter Berücksichtigung, dass

$$x^n - \frac{1}{x^n} = e^{inw} - e^{-inw} = 2i\sin nw$$

ist und dass $k = 0$ anzunehmen ist (wie durch Einsetzen von $w = 0$ folgt):

$$(15.) \quad w = 2\left(\frac{\sin w}{1} - \frac{\sin 2w}{2} + \frac{\sin 3w}{3} - \frac{\sin 4w}{4} + \cdots\right),$$

eine Entwicklung, die nur für reelle w innerhalb der Grenzen

$$-\pi < w < \pi$$

Gültigkeit besitzt.

9. Es ist nun leicht, die Function $\log x$ in der Umgebung jedes Punktes a ausser $x = 0$ und $x = \infty$ in eine Potenzreihe zu entwickeln, deren Convergenzkreis bis zum Punkte $x = 0$ reicht. Wir haben

$$(16.) \quad \log x = \log\left[a\left(1 + \frac{x-a}{a}\right)\right] = \log a + \log\left(1 + \frac{x-a}{a}\right)$$

$$= \log a + \tfrac{1}{1} \cdot \frac{x-a}{a} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(x-a)^2}{a^2} + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{(x-a^3)}{a^3} - \cdots,$$

und zwar liefert diese Reihe in Folge der unendlichen Vieldeutigkeit der Constanten $\log a$ sämmtliche Werthe von $\log x$. *Die unendlich vieldeutige Transcendente $\log x$ besitzt also überall ausser in den singulären Punkten $x = 0$ und $x = \infty$ den Charakter einer ganzen Function.*

§ 41.

Die cyklometrischen Functionen.

1. Mit Hülfe von $\log x$ ist es nicht schwierig, auch die Umkehrungen der trigonometrischen, die sogenannten *cyklometrischen* Functionen herzustellen. Am einfachsten gestaltet sich die Sache für $\operatorname{arctg} x$ (sprich: arcus tangens x), die Umkehrung von $\operatorname{tg} x$; es ist nämlich

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = -i \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = -i \frac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1},$$

also

$$e^{2ix} = \frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x},$$

$$x = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x}$$

oder

(1.) $\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \log \frac{1+ix}{1-ix} = \frac{1}{2i}\left[\log(1+ix) - \log(1-ix)\right]$ *).

Hieraus folgt für denjenigen Werth von $\operatorname{arctg} x$, der ohne Umkreisung eines der singulären Punkte $x = \pm i$ in den Werth Null für $x = 0$ übergeführt werden kann:

$$(2.) \qquad \operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots,$$

$|x| \leqq 1$, $x = \pm i$ ausgenommen.

2. Setzen wir $x = 1$, so folgt

$$(3.) \qquad \frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

eine praktisch unbrauchbare Reihe, die nur als einfachster analytischer Ausdruck für die Grösse π bemerkenswerth ist.

Mit Hülfe von (2.) ist es übrigens möglich, andere, besser convergirende Reihen für π herzustellen. So erhalten wir schon durch die Bemerkung, dass $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist, die sehr brauchbare Reihe

$$(4.) \qquad \pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3^1} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \cdots\right).$$

Aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

folgt, wenn man $\operatorname{tg} x = \frac{1}{5}$ setzt,

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{5}{12},$$

dann ebenso

$$\operatorname{tg} 4x = \frac{120}{119}$$

und weiter mit Hülfe der Formel

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}:$$

$$\operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239},$$

also

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{239} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \frac{\pi}{4}$$

---

*) Nebenbei ist hieraus ersichtlich, dass $\operatorname{tg} x$ die additive Periode $y = x + \pi$ besitzt, aber für keine zwei x-Werthe, die nicht durch Periodicität verbunden sind, den gleichen Werth annimmt.

und somit

$$(5.) \qquad \frac{\pi}{4} = 4\left[\frac{1}{1\cdot 5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \cdots\right] - \left[\frac{1}{1\cdot 239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \cdots\right].$$

Man berechnet nach diesen Formeln

$$(6.) \qquad \pi = 3,141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\ldots$$

Schon seit längerer Zeit ist der Nachweis beigebracht, dass π und π^2 *irrationale* Zahlen sind; dass π überhaupt nicht als die Lösung einer algebraischen Gleichung mit rationalen Coefficienten darstellbar, dass es also eine *transcendente* Zahl ist, wurde erst in neuester Zeit von Herrn *Lindemann* dargethan (Mathematische Annalen, Band XX, p. 213). Hiermit ist zugleich erwiesen, dass die geometrische Rectification und Quadratur des Kreises mit Hülfe von Zirkel und Lineal nicht möglich ist.

3. Aus

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

folgt

$$e^{ix} = \sqrt{1 - \sin^2 x} + i \sin x,$$

$$x = -i \log\left[\sqrt{1 - \sin^2 x} + i \sin x\right]$$

oder, wenn die Umkehrung von $\sin x$ mit $\arcsin x$ bezeichnet wird,

$$(7.) \quad \arcsin x = -i\log\left[\sqrt{1-x^2} + ix\right] = -i\log\left[\sqrt{1+(ix)^2} + ix\right]$$

$$= -i\log\left[\frac{1}{\sqrt{1+(ix)^2} - ix}\right] = i\log\left[\sqrt{1+(ix)^2} - ix\right]$$

$$= -\frac{i}{2}\left[\log\left(\sqrt{1+(ix)^2} + ix\right) - \log\left(\sqrt{1+(ix)^2} - ix\right)\right]$$

$$= -\frac{i\omega}{2}\left[\left(\sqrt{1+(ix)^2} + ix\right)^{\frac{1}{\omega}} - \log\left(\sqrt{1+(ix)^2} - ix\right)^{\frac{1}{\omega}}\right].$$

Mit Hülfe von § 25, (13.) erhalten wir hieraus*)

---

*) Dass hierbei das richtige Vorzeichen für $\sqrt{1+(ix)^2} = \sqrt{1-x^2}$ gewählt ist, geht daraus hervor, dass diese Wurzel für $x = 0$ zu 1 werden muss. Die Entwicklung liefert denjenigen Werth von $\arcsin x$, der ohne Umkreisung eines singulären Punktes für $x = 0$ Null wird.

$$(8.)\quad \arcsin x = \frac{x}{1} - \frac{\left(\frac{1}{\omega^2} - 1^2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \frac{\left(\frac{1}{\omega^2} - 1^2\right)\left(\frac{1}{\omega^2} - 3^2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^5 - \cdots$$

$$= \frac{x}{1} + \frac{1^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot x^5 + \cdots$$

$$= \frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots,$$

$$|x| \leqq 1.$$

Setzen wir $x = 1$, so wird hieraus

$$(9.)\quad \frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots.$$

Die Entwicklung für $\arccos x$ ist unmittelbar durch die Gleichung

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

gegeben.

Mit Hülfe von § 25, (13.) findet man ferner

$$(10.)\quad \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) = \log\left(\frac{1}{-x + \sqrt{1 + x^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - \log\left(-x + \sqrt{1 + x^2}\right)\right]$$

$$= \frac{x}{1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots.$$

4. Es hat wieder keine Schwierigkeit, $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$ u. s. w. in beliebigen Punkten, die keinen singulären Charakter besitzen, in Potenzreihen zu entwickeln, welche sich leicht durch Transformation der für $x = 0$ gültigen finden lassen. Singuläre Punkte sind bei $\operatorname{arctg} x$ nach (1.) $x = +i$ und $x = -i$, bei $\arcsin x$ nach (7.) $x = \infty$, $x = +1$ und $x = -1$.

5. Die Riemann'sche Fläche für $\operatorname{arctg} x$ ergiebt sich ohne Weiteres aus derjenigen für den Logarithmus. Aus (1.) ist ersichtlich, dass die Punkte $x = +i$ und $x = -i$ bei $\operatorname{arctg} x$ den Punkten $x = 0$ und $x = \infty$ beim Logarithmus entsprechen und dass die Verzweigung von $\operatorname{arctg} x$ denselben Charakter trägt, wie diejenige des Logarithmus, da $\frac{1 + ix}{1 - ix}$ eindeutig ist. An Stelle des von $x = 0$ nach $x = \infty$ laufenden Schnittes setzen wir einen solchen, der die Punkte $x = +i$ und $x = -i$ verbindet, und heften auf demselben den linken Rand jedes Blattes mit dem rechten des folgenden

zusammen. Die Functionalwerthe für denselben Punkt auf zwei aufeinanderfolgenden Blättern unterscheiden sich um die Grösse π.

6. Um für $y = \arcsin x$ die Riemann'sche Fläche zu construiren, wollen wir eine ganz andere, sehr wichtige Methode benutzen, die natürlich auch in den schon behandelten Fällen anwendbar gewesen wäre. Die eindeutige Function $x = \sin y$ bleibt ungeändert für die Substitutionen $z = y + 2k\pi$ und $z = -y + (2k+1)\pi$, während sonst keine Werthe des Argumentes existiren, für welche $\sin y$ den gleichen Werth annimmt. Wir können nun im Sinne von § 37 eine Parcellirung der y-Ebene vornehmen, derart dass keine zwei Punkte derselben Parcelle durch eine jener Substitutionen verbunden sind. Die einfachste dieser Gebietseintheilungen ist die in Figur 19 dargestellte; durch die Punkte $y = (k + \frac{1}{2})\pi$ werden

—III —II —I 0 I II III

$y-2\pi$ $\cdot y$ $y+2\pi$

$-\frac{7\pi}{2}$ $-\frac{5\pi}{2}$ $-\frac{3\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{2}$ 0 $\frac{\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{2}$ $\frac{5\pi}{2}$ $\frac{7\pi}{2}$

$-y-3\pi$ $-y-\pi$ $-y+\pi$ $-y+3\pi$

Fig. 19.

den Parallelen zur Ordinatenaxe gelegt. Die entstehenden Parallelstreifen bezeichnen wir durch Zahlen in der Weise, wie es die Figur zeigt. Einem Punkte y im 0ten Streifen entspricht der Punkt $y + 2k\pi$ im $2k^{\text{ten}}$ und der Punkt $-y + (2k+1)\pi$ im $(2k+1)^{\text{ten}}$ Streifen.

Die Riemann'sche Fläche, auf der wir uns die Variable x ausgebreitet denken, wird aus unendlich vielen Blättern bestehen, und zwar dürfen wir festsetzen, dass jedem Parallelstreifen in der y-Ebene ein Blatt der x-Fläche entspricht; in der That ist hierdurch jedem der unendlich vielen y-Werthe, die zu demselben x gehören, je ein Punkt auf der Riemannschen Fläche zugetheilt. Die *Grenzlinien* der Parallelstreifen, über die hinweg man aus einem Streifen in den andern gelangt, werden den *Verzweigungsschnitten* der Riemann'schen Fläche entsprechen, durch die ein Blatt mit einem andern

communicirt. *Wir finden daher die Verzweigung der Riemann-schen Fläche, indem wir die parcellirte y-Ebene durch $x = \sin y$ auf der unendlich vielfachen x-Fläche abbilden* (im Sinne von § 23, 3). Die Parallelen, welche in der y-Ebene die Grenzen der Parcellen bilden, zerfallen in zwei Gruppen; die einen gehen durch die Punkte $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, die andern durch die Punkte $\frac{\pi}{2} + (2k + 1)\pi$. Die sämmtlichen auf diesen Parallelen gelegenen Punkte werden durch die Ausdrücke

$$y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi + vi \quad \text{und} \quad y = \frac{\pi}{2} + (2k + 1)\pi + vi$$

dargestellt, in denen v reell ist. In der x-Ebene entsprechen den Punkten der ersten Liniengruppe die durch

$$x = \sin y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi + vi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + vi\right) = \cos vi$$
$$= \frac{e^v + e^{-v}}{2}$$

dargestellten Punkte, während den Punkten der zweiten Gruppe die Punkte

$$x = \sin y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + (2k + 1)\pi + vi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + vi\right)$$
$$= -\cos vi = -\frac{e^v + e^{-v}}{2}$$

zugehören. Lassen wir v alle reellen Werthe durchlaufen, so nimmt $\frac{e^v + e^{-v}}{2}$ alle reellen Werthe von 1 bis unendlich an, und zwar für $+v$ und $-v$ die gleichen. Die Verzweigungsschnitte, die wir in der x-Fläche anzubringen haben, laufen daher von $x = 1$ und $x = -1$ auf der Abscissenaxe nach rechts und links hin ins Unendliche. Auch die Zusammenheftung der einzelnen Blätter ergiebt sich unmittelbar. Lassen wir dem k^{ten} Parallelstreifen in der y-Ebene das k^{te} Blatt der x-Fläche entsprechen, so werden an dem ersten Verzweigungsschnitt jeweilig das $2k^{\text{te}}$ und das $(2k + 1)^{\text{te}}$, an dem zweiten Verzweigungsschnitt das $2k^{\text{te}}$ und das $(2k - 1)^{\text{te}}$ Blatt paarweise zusammenzuheften sein (in gleicher Weise wie bei der Riemann'schen Fläche für $y = \sqrt{x}$). Durch Umkreisung des Punktes $x = 1$ gelangt man daher aus dem

$2k^{\text{ten}}$ ins $(2k+1)^{\text{te}}$ Blatt und durch nochmalige Umkreisung zurück ins $2k^{\text{te}}$, während eine Umkreisung von $x = -1$ einen Übergang aus dem $2k^{\text{ten}}$ ins $(2k-1)^{\text{te}}$ Blatt nach sich zieht u. s. w.

Die Anordnung der Riemann'schen Fläche hätte noch in mannichfacher anderer Weise getroffen werden können; jedenfalls müssen jedoch die Punkte $x = 1$, $x = -1$ und $x = \infty$, welche nach Formel (8.) *Verzweigungspunkte* sind, die Endpunkte der Verzweigungsschnitte bilden. Jedem Arrangement der Riemann'schen Fläche entspricht eine bestimmte Parcellirung der y-Ebene; bei aller Willkürlichkeit werden die Grenzen der Parcellen durch die Punkte hindurchgehen müssen, welche jenen Verzweigungspunkten entsprechen, d. h. durch die Punkte

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, \quad x = \infty.$$

§ 42.

Productentwicklungen.

1. Wir kehren nun zu den additiv periodischen Functionen selbst zurück und stellen uns die Aufgabe, diejenigen unter ihnen, welche für endliche x verschwinden, in *unendliche Producte* zu verwandeln. Die Function $\sin x$ verschwindet für $x = k\pi$ und zwar jedesmal in der ersten Ordnung; denn aus der Reihenentwicklung für $\sin x$ ist ersichtlich, dass diese Function den Factor x nur *einmal* enthält, und das Gleiche gilt für die übrigen Nullpunkte, da $\sin x$ ungeändert bleibt, wenn man x durch $x + 2k\pi$ oder durch $\pi - x + 2k\pi$ ersetzt; $\sin x$ wird also das Product

$$x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\cdots$$

als Factor enthalten, wenn dasselbe convergirt. Dies ist bei geeigneter Ordnung in der That der Fall, z. B. bei der Anordnung

$$(1.)\qquad x\prod_{1}^{\infty}{}_k\left(1-\frac{x}{k\pi}\right)\left(1+\frac{x}{k\pi}\right) = x\prod_{1}^{\infty}{}_k\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right),$$

da die Reihe $\sum_{1}^{\infty}{}_k \frac{x^2}{k^2\pi^2}$ convergent ist.

Es fragt sich nun, ob zu (1.) noch ein nirgends Null werdender Factor tritt, und die Beantwortung dieser Frage macht Schwierigkeiten, sodass wir uns veranlasst sehen, zur wirklichen Entwicklung einen ganz anderen Weg einzuschlagen.

2. Nach § 39, 8 lässt sich $\sin nx$ für ungerade n als ganze Function n^{ten} Grades von $y = \sin x$ darstellen*), die wir mit $f_n(y)$ bezeichnen wollen. Beachten wir nun, dass $f_n(y)$ für $x = \frac{k\pi}{n}$, also für $y = \sin\frac{k\pi}{n}$ verschwindet, worin $k = -\frac{n-1}{2}, -\frac{n-3}{2}, \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots \frac{n-1}{2}$ zu nehmen ist (für andere k nimmt y wieder dieselben Werthe an, da $\sin(x + 2r\pi) = \sin x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$ ist), so können wir

$$\sin nx = C\sin x\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi}{n}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{2\pi}{n}}\right)\cdots\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}}\right)$$

setzen. Da

$$(2.)\qquad \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)_{x=0} = \left(\frac{nx\left(1 - \frac{n^2x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\right)}{x\left(1 - \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\right)}\right)_{x=0} = n$$

ist, so wird $C = n$, also

$$(3.)\qquad \sin nx = n\sin x\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi}{n}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{2\pi}{n}}\right)\cdots\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}}\right)$$

oder, wenn wir n ins Unendliche wachsen lassen und ω statt n, $\frac{x}{\omega}$ statt x setzen,

$$(4.)\qquad \sin x = \omega\sin\frac{x}{\omega}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{\omega}}{\sin^2\frac{\pi}{\omega}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{\omega}}{\sin^2\frac{2\pi}{\omega}}\right)\cdot\cdot\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{\omega}}{\sin^2\frac{(\omega-1)\pi}{2\omega}}\right).$$

Entsprechend (2.) ist aber

$$\frac{\sin^2\frac{x}{\omega}}{\sin^2\frac{k\pi}{\omega}} = \frac{x^2}{k^2\pi^2}$$

---

*) Die nur in geraden Potenzen auftretende Grösse $\cos x$ lässt sich durch $\sin x$ ersetzen.

und somit

$$\text{(5.)} \qquad \sin x = x\left(1-\frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots.$$

Dass dieser Grenzübergang vollkommen streng ist, lässt sich wie bei unendlichen Reihen (vgl. § 38, 1) darthun. (4.) und (5.) convergiren unbedingt nach § 11, 2; bei einer endlichen Anzahl von Factoren bringt der Grenzübergang keinen Fehler hervor, und die übrigbleibenden haben einen verschwindend geringen Einfluss.

3. Da $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, also $\cos x = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{\sin x}$ ist, so folgt

$$\text{(6.)} \qquad \cos x = \frac{\left(1-\frac{4x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots}{\left(1-\frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{4x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots}{\left(1-\frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots}$$

$$= \left(1-\frac{4x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots.$$

4. Setzt man in (5.) $x = \frac{\pi}{2}$, so folgt

$$1 = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{6^2}\right)\cdots$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\cdot\frac{(4-1)(4+1)}{4^2}\cdot\frac{(6-1)(6+1)}{6^2}\cdots$$

oder die bekannte Wallis'sche Formel

$$\text{(7.)} \qquad \frac{\pi}{2} = \frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{6^2}{5\cdot 7}\cdots.$$

§ 43.

Partialbruchreihen.

1. Um die gebrochnen trigonometrischen Functionen in Partialbruchreihen umzusetzen, können wir aus analogen Gründen wie bei der Productentwicklung nicht das Verfahren der unbestimmten Coefficienten anwenden, sondern müssen uns wieder eines Grenzübergangs bedienen. Nach § 39, 8

stellt sich für gerade n $\operatorname{tg} nx = \frac{\sin nx}{\cos nx}$ nach Division von Zähler und Nenner durch $\cos^n x$ als rationale Function n^{ten} Grades von $\operatorname{tg} x$ dar, die für $x = \frac{2k-1}{2n}\pi$, also

$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\frac{2k-1}{2n}\pi$, $k = -\frac{n}{2}+1, -\frac{n}{2}+2, \cdots -1, 0, 1, 2, \cdots \frac{n}{2}$, in der ersten Ordnung unendlich wird, da $\cos nx$ für diese Werthe in der ersten Ordnung verschwindet. Nach § 16, 7, 8 können wir daher setzen

$$\operatorname{tg} nx = \sum_{-\frac{n}{2}+1}^{+\frac{n}{2}}{}_k \frac{a_k}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\frac{2k-1}{2n}\pi},$$

oder

$$\operatorname{tg} x = \sum_{-\frac{n}{2}+1}^{+\frac{n}{2}}{}_k \frac{a_k}{\operatorname{tg}\frac{x}{n} - \operatorname{tg}\frac{2k-1}{2n}\pi}. \tag{1.}$$

Um a_k zu bestimmen, multipliciren wir beiderseits mit $\operatorname{tg}\frac{x}{n} - \operatorname{tg}\frac{2k-1}{2n}$ und setzen dann $\frac{x}{n} = \frac{2k-1}{2n}$, so dass rechts allein a_k stehen bleibt. Wir finden

$$a_k = \left[\operatorname{tg} x\left(\operatorname{tg}\frac{x}{n} - \operatorname{tg}\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right]_{x=\frac{2k-1}{2}}$$

$$= \left[\frac{\sin x}{\cos x}\,\frac{\sin\frac{2x-(2k-1)\pi}{2n}}{\cos\frac{x}{n}\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}\right]_{x=\frac{2k-1}{2}}$$

oder, wenn $\frac{2x-(2k-1)\pi}{2n} = y$ gesetzt wird, nach einfachen Umformungen

$$a_k = \left[\frac{-\cos ny}{\sin ny}\,\frac{\sin y}{\cos\left(y+\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}\right]_{y=0}$$

oder

$$a_k = -\frac{1}{n\cos^2\frac{2k-1}{2n}\pi}. \tag{2.}$$

Indem wir zur Grenze übergehen, schreiben wir

$$(3.)\qquad \operatorname{tg} x = -\sum_{-\frac{\omega}{2}+1}^{+\frac{\omega}{2}}{}^{k}\, \frac{\dfrac{1}{\omega\cos^2\dfrac{2k-1}{2\omega}\pi}}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{\omega}-\operatorname{tg}\dfrac{2k-1}{2\omega}\pi}$$

oder, da

$$\omega\operatorname{tg}\frac{x}{\omega} = \frac{\omega\sin\dfrac{x}{\omega}}{\cos\dfrac{x}{\omega}} = x,$$

$$\cos^2\frac{2k-1}{2\omega}\pi = 1 \text{ ist,}$$

$$(4.)\qquad \operatorname{tg} x = -\sum_{-\frac{\omega}{2}+1}^{+\frac{\omega}{2}}{}^{k}\, \frac{1}{x-\dfrac{2k-1}{2}\pi},$$

worin die Reihenfolge der Glieder durch die Bezeichnung bestimmt ist. Durch Zusammenfassen je zweier Glieder erhalten wir die für beliebige endliche x, ausser $x = \frac{2k-1}{2}\pi$, convergente Reihe

$$(5.)\quad \operatorname{tg} x = -\sum_{1}^{\infty}{}^{k}\, \frac{2x}{x^2-\dfrac{(2k-1)^2}{4}\pi^2} = \sum_{1}^{\infty}{}^{k}\, \frac{2x}{\dfrac{(2k-1)^2}{4}\pi^2-x^2}.$$

Die Richtigkeit des Grenzübergangs kann wieder wie in § 38, 1 erwiesen werden, da der Beweis der absoluten Convergenz von (5.) und der entsprechend umgeordneten Reihe (3.) nach § 5, 5 leicht ist.

2. Da $\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ ist, so finden wir

$$(6.)\qquad \operatorname{cotg} x = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}\, \frac{1}{x+k\pi} = \frac{1}{x} + 2\sum_{1}^{\infty}{}^{k}\, \frac{x}{x^2-k^2\pi^2}.$$

Aus der Identität

$$\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sin x\cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

oder

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

folgt weiter

$$(7.)\qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \sum_{-\omega}^{+\omega}{}_k \frac{(-1)^k}{x + k\pi} = \frac{1}{x} + 2\sum_{1}^{\infty}{}_k \frac{(-1)^k x}{x^2 - k^2\pi^2},$$

und da $\sec x = \frac{1}{\cos x} = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ist,

$$(8.)\qquad \sec x = \sum_{-\omega}^{+\omega}{}_k \frac{(-1)^{k+1}}{x - \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi} = \sum_{0}^{\infty}{}_k \frac{(-1)^{k+1}(2k+1)\pi}{x^2 - \left(\frac{2k+1}{2}\right)^2 \pi^2}.$$

§ 44.

Weitere Untersuchung der gebrochnen periodischen Functionen und daran sich anschliessende Resultate.

1. Die Functionen $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\sec x$ und $\operatorname{cosec} x$ sind als Quotienten zweier transcendenten ganzen Functionen in ihrem ganzen Verlaufe, mit Ausnahme von $x = \infty$ und der Nullwerthe des Nenners, analytische Functionen, müssen sich also überall ausser in den bezeichneten Punkten in Potenzreihen entwickeln lassen. Wir leiten nur die Reihe für $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{cotg} x$ in der Umgebung des Punktes $x = 0$ her. Da $\operatorname{tg} x$ eine ungerade Function ist, setzen wir

$$(1.)\qquad \operatorname{tg} x = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots$$

und benutzen zur Bestimmung der Coefficienten die Gleichung

$$\operatorname{tg} x \cos x = \sin x$$

oder

$$(a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots)\left(1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots\right)$$
$$= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots,$$

aus der wir durch Ausmultipliciren und Vergleichen der Coefficienten gleich hoher Potenzen finden:

$$(2.)\qquad \begin{cases} a_1 = 1, \\ -\frac{a_1}{2} + a_3 = -\frac{1}{6}, \\ \frac{a_1}{24} - \frac{a_3}{2} + a_5 = \frac{1}{120}, \\ -\frac{a_1}{720} + \frac{a_3}{24} - \frac{a_5}{2} + a_7 = -\frac{1}{5040} \end{cases}$$

u. s. w.

und allgemein

$$(3.)\quad a_n - \frac{a_{n-2}}{1\cdot 2} + \frac{a_{n-4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{a_{n-6}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n}.$$

Man sieht, wie man mit Hülfe der „*Recursionsformel*“ (3.) die Coefficienten der Reihe nach berechnen kann, und wir finden

$$a_1 = 1,$$
$$a_3 = \frac{1}{3},$$
$$a_5 = \frac{2}{15},$$
$$a_7 = \frac{17}{315},$$
$$\vdots$$

Setzt man

$$(4.)\quad \operatorname{tg} x = \frac{\tau_1 x}{1} + \frac{\tau_3 x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\tau_5 x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots,$$

also

$$\tau_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n\, a_n,$$

so ist

$$(5.)\quad \tau_1 = 1,\ \tau_3 = 2,\ \tau_5 = 16,\ \tau_7 = 272 \text{ u. s. w.},$$

und allgemein ist τ_n durch die Recursionsformel

$$\tau_n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\tau_{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\tau_{n-4} - \cdots = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

oder, wenn die abgekürzte Bezeichnung von § 25 benutzt wird,

$$(6.)\quad \tau_n - n_2\tau_{n-1} + n_4\tau_{n-4} - \cdots = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

zu berechnen. Die Reihe (4.) convergirt für $|x| < \frac{\pi}{2}$.

Ähnliche Ausdrücke erhält man für $x \operatorname{cotg} x$, $\sec x$ und $x \operatorname{cosec} x$.

2. Dieselben Potenzentwicklungen lassen sich aber auch aus den Formeln von § 43 in ganz anderer Form finden, was uns zu einigen interessanten Resultaten führt. Am bequemsten gehen wir hier von der Partialbruchreihe für $\operatorname{cotg} x$ aus.

Nach § 43, (6) ist

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - 2x \sum_{1}^{\infty} {}_k \frac{\left(\frac{1}{k\pi}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{k\pi}\right)^2};$$

entwickeln wir, was für $|x| < \pi$ möglich ist, die einzelnen Glieder der rechten Seite ausser $\frac{1}{x}$ nach Potenzen von $\left(\frac{x}{k\pi}\right)^2$ und ordnen die entstehende absolut convergente Doppelreihe nach Potenzen von x (§ 10), so erhalten wir

(7.) $$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{2S_1}{\pi^2} x - \frac{2S_2}{\pi^4} x^3 - \frac{2S_3}{\pi^6} x^5 - \cdots,$$

wobei zur Abkürzung

(8.) $$S_k = \frac{1}{1^{2k}} + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \cdots$$

gesetzt ist. Statt der S_k führt man gewöhnlich gewisse Grössen B_k ein, die man als *Bernoulli'sche Zahlen* bezeichnet und die mit S_k durch die Gleichung

(9.) $$S_k = \frac{2^{2k-1} B_k \pi^{2k}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2k)}$$

verbunden sind, so dass wir haben

(10.) $$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 B_1}{1 \cdot 2} x - \frac{2^4 B_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^3 - \cdots,$$
$$-\pi < x < +\pi.$$

Mittelst der Gleichung

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x - 2 \operatorname{cotg} 2x$$

finden wir hieraus

(11.) $$\operatorname{tg} x = \frac{2(2^2-1)S_1}{\pi^2} x + \frac{2(2^4-1)S_2}{\pi^4} x^3 + \frac{2(2^6-1)S_3}{\pi^6} x^5 + \cdots$$

oder

(12.) $$\operatorname{tg} x = \frac{2^2(2^2-1)B_1}{1 \cdot 2} x + \frac{2^4(2^4-1)B_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^3 + \frac{2^6(2^6-1)B_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^5 + \cdots,$$
$$-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}.$$

3. Vergleicht man nun die Reihen (4.) und (11.) oder (12.) mit einander, so ergiebt sich

$$\frac{2(2^{2k}-1)S_k}{\pi^{2k}} = \frac{\tau_{2k-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2k-1)}$$

oder

(13.) $$S_k = \frac{\tau_{2k-1}\,\pi^{2k}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2k-1)\cdot 2(2^{2k}-1)},$$

also ins Besondere

(14.) $$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}, \\ S_2 = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}, \\ S_3 = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{945} \end{cases}$$

u. s. w.

und

(14.) $$B_k = \frac{k\,\tau_{2k-1}}{2^{2k-1}(2^{2k}-1)}.$$

4. In engem Zusammenhange mit diesen Entwicklungen stehen diejenigen für $\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ und $\log\cos x$. Aus § 42, (5.) folgt nämlich

$$\log\frac{\sin x}{x} = \log\left(1 - \frac{x^2}{1^2\pi^2}\right) + \log\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) + \log\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) + \cdots,$$

also, wenn man für $|x| < \pi$ die einzelnen Glieder nach Potenzen von $\frac{x^2}{k^2\pi^2}$ entwickelt und die entstehende Doppelsumme nach Potenzen von x ordnet:

(15.) $$\log\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{S_1}{1\pi^2}x^2 - \frac{S_2}{2\pi^4}x^4 - \frac{S_3}{3\pi^6}x^6 - \cdots = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} - \cdots.$$

Ebenso haben wir

(15.) $$\log\cos x = \log\left(1 - \frac{4x^2}{1^2\pi^2}\right) + \log\left(1 - \frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right) + \cdots = -\frac{4T_1}{1\pi^2}x^2 - \frac{4^2T_2}{2\pi^4}x^4 - \frac{4^3T_3}{3\pi^6}x^6 - \cdots, \quad |x| < \frac{\pi}{2},$$

wenn

(16.) $$T_m = \frac{1}{1^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{5^{2m}} + \cdots$$

gesetzt wird.

Nun ist aber

$$S_m = \frac{1}{1^{2m}} + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \cdots = \frac{1}{1^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{5^{2m}} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{2^{2m}}\left(\frac{1}{1^{2m}} + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}}\right) + \cdots$$
$$= T_m + \frac{S_m}{2^{2m}},$$

also

$$T_m = \frac{2^{2m} - 1}{2^{2m}} S_m \tag{17.}$$

und somit

$$\log\cos x = -\frac{(2^2-1)S_1}{1\pi^2}x^2 - \frac{(2^4-1)S_2}{2\pi^4}x^4 - \frac{(2^6-1)S_3}{3\pi^6}x^6 - \cdots \tag{18.}$$
$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \cdots.$$

Ausserdem haben wir nach (17.)

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}, \\ T_2 = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96}, \\ T_3 = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{960} \end{cases} \tag{19.}$$

u. s. w.

§ 45.

Die allgemeine Potenz.

1. Bereits in der Elementarmathematik wird der Begriff der Potenz, der zunächst nur für ganze, positive Exponenten einen Sinn hat, derart erweitert, dass er auch für rationale, positive und negative Exponenten Gültigkeit erhält. Hierbei darf nicht ausser Acht gelassen werden, dass a^x für gebrochne x eine *mehrdeutige* Function ist; will man indessen, wie das schon bei der elementaren Logarithmentheorie nöthig wird, a^x als eine bestimmte Function von x ansehen, die auch für irrationale x nicht sinnlos wird, so sieht man sich veranlasst, jeweilig einen bestimmten der Werthe von a^x zu fixiren. Man pflegt nun bei positiven a für a^x immer den zugehörigen *positiven* Werth zu wählen, und es ist dann nicht schwer zu erkennen, dass für eine fortlaufende Reihe von

x-Werthen auch a^x eine fortlaufende Reihe von Werthen darstellt. Es ist nämlich $a = e^{\log a}$, wo wir unter $\log a$ den positiven Werth dieser Function verstehen wollen, und somit

$$(1.)\quad a^x = e^{\log a . x} = 1 + \frac{\log a \cdot x}{1} + \frac{\log^2 a \cdot x^2}{1 \cdot 2} + \frac{\log^3 a \cdot x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots,$$

und da die Gleichung (1.) jedenfalls für alle rationalen x richtig ist, so werden wir sie zur Definition der Potenz für irrationale x zweckmässig verwenden. a^x erscheint also für reelle a und x als eine *transcendente ganze* Function, somit auch als *analytische* Function. Wollen wir nun a^x auch für *complexe* x definiren, und stellen uns hierbei die beschränkende Bedingung, dass a^x überall ($x = \infty$ ausgenommen) den Charakter einer ganzen Function bewahren möge, so ist durch (1.) a^x für beliebige x bestimmt, da eine analytische Function, die auf einer Linie gegeben ist, sich nur in einer einzigen Weise fortsetzen lässt. Ist auch a complex, so tritt die Schwierigkeit ein, dass $\log a$ eine unendlich vieldeutige Grösse ist und dass die Fixirung eines ihrer Werthe etwas Willkürliches hat. Wir setzen daher nur fest, dass durch (1.) a^x für beliebige x und a definirt ist, wobei wir uns die specielle Wahl für $\log a$ vorbehalten.

2. Wir wollen nun zeigen, dass bei geeigneter Specialisirung dieser Definition der allgemeinen Potenz der binomische Satz seine Gültigkeit behält. Falls $|x| < 1$ ist und falls wir jetzt festsetzen, dass für $\log(1 + x)$ derjenige Werth zu nehmen ist, der ohne Umkreisung von $x = 1$ für $x = 0$ in 0 übergeht, so können wir in

$$(2.)\quad (1+x)^n = e^{n \log(1+x)} = 1 + \frac{n \log(1+x)}{1} + \frac{n^2 \log^2(1+x)}{1 \cdot 2} + \cdots$$

die einzelnen Glieder nach Potenzen von x entwickeln, indem wir

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots,$$

$$\log^2(1+x) = \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right)^2 = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 - \cdots$$

u. s. w.

setzen; hierbei ist ersichtlich, dass das $(k+1)^{\text{te}}$ Glied, das

n^k als Factor besitzt, keine niedrigere Potenz von x wie die k^{te} enthält. Ordnen wir nun die entstehende, unbedingt convergente Reihe nach Potenzen von x, so erhalten wir

$$(3.)\qquad (1+x)^n = 1 + f_1(n)x + f_2(n)x^2 + f_3(n)x^3 + \cdots,$$

worin die f_k ganze Functionen von n sind, die nach dem eben Bemerkten keine höhere Potenz wie die k^{te} enthalten werden. Da nun eine ganze Function k^{ten} Grades vollständig bestimmt ist, wenn man sie für mindestens $k+1$ Werthe ihres Argumentes kennt, und da für beliebige rationale, reelle n (also jedenfalls mehr wie k Werthe!) die $f_k(n)$ nach § 25 nichts Anderes sind wie die Binomialcoefficienten n_k, so schliessen wir, dass auch für beliebige complexe n

$$f_k(n) = n_k,$$

also

$$(4.)\qquad (1+x)^n = 1 + n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3 + \cdots$$

ist.

3. Die Entwicklung (4.) behält ihre Gültigkeit so lange, als die Reihe auf der rechten Seite convergirt, was jedenfalls für $|x| < 1$ der Fall ist (vgl. § 25, 3); für $|x| = 1$ wird eine besondere Betrachtung nöthig, die wir jetzt durchführen wollen. Setzen wir $n = r + si$, so ist

$$\left|\frac{n_{\omega+1}}{n_\omega}\right| = \left|\frac{n-\omega}{\omega+1}\right| = \left|\frac{r+si-\omega}{\omega+1}\right| = \frac{\sqrt{(r-\omega)^2+s^2}}{\omega+1}$$
$$= \frac{\omega\sqrt{1-\left(\frac{2r}{\omega}-\frac{r^2+s^2}{\omega^2}\right)}}{\omega+1}$$

oder, wenn wir den Zähler nach dem binomischen Satze entwickeln,

$$\left|\frac{n_{\omega+1}}{n_\omega}\right| = \frac{\omega\left(1-\frac{r}{\omega}+\frac{r^2+s^2}{2\omega^2}-\frac{r^2}{2\omega^2}+\cdots\right)}{\omega+1} = \frac{\omega-r+\frac{s^2}{2\omega}+\cdots}{\omega+1}.$$

Bedenkt man, dass die weiteren Glieder im Zähler gegen die aufgeschriebenen von unendlich geringem Einflusse sind, so erkennt man sofort, dass ein Zunehmen des absoluten Betrags der Glieder, also sicher Divergenz der Reihe stattfindet, wenn $r \leq -1$ ist (nur $r = -1$, $s = 0$ könnte hiernach fraglich sein; doch ist dieser Fall bereits früher erledigt

worden). Wenden wir das Kriterium von § 5, 5 an, so haben wir

$$\omega\left(1-\left|\frac{n_{\omega+1}}{n_\omega}\right|\right)=\omega\left(1-\frac{\omega-r+\frac{s^2}{2\omega}+\cdots}{\omega+1}\right)$$

$$=\omega\left(\frac{\omega+1-\omega+r-\frac{s^2}{2\omega}-\cdots}{\omega+1}\right)=\frac{\omega}{\omega+1}\left(1+r-\frac{s^2}{2\omega}-\cdots\right),$$

oder bei Vernachlässigung von Unendlichkleinem gegen Endliches

$$\omega\left(1-\left|\frac{n_{\omega+1}}{n_\omega}\right|\right)=1+r.$$

Ist nun $r>0$, so folgt hieraus, dass die Binomialreihe für $|x|=1$ *unbedingt* convergirt.

Um den noch übrigbleibenden Fall $-1<r\leqq 0$ zu erledigen, multipliciren wir den Ausdruck

$$p_\omega=1+n_1x+n_2x^2+\cdots+n_\omega x^\omega$$

mit $1+x$; es ist

$$p_\omega(1+x)=1+(1+n_1)x+(n_1+n_2)x^2+(n_2+n_3)x^3+\cdots$$
$$+(n_{\omega-1}+n_\omega)x^\omega+n_\omega x^{\omega+1}$$

oder, da nach § 25, (6.)

$$n_{k-1}+n_k=1_1n_{k-1}+1_0n_k=(n+1)_k$$

ist,

$$p_\omega(1+x)-n_\omega x^{\omega+1}=1+(n+1)_1x+(n+1)_2x^2+\cdots$$
$$+(n+1)_\omega x^\omega.$$

Da der reelle Theil von $n+1$ der Grösse $r+1>0$ gleich ist, so convergirt die rechte Seite dieses Ausdrucks für unendlich wachsende ω unbedingt. Ferner ist

$$|n_\omega|=\left|\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdots\frac{n-\omega+2}{\omega-1}\cdot\frac{n-\omega+1}{\omega}\right|$$

$$=\left|\frac{n}{1}\left(1-\frac{n+1}{2}\right)\left(1-\frac{n+1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{n+1}{\omega-1}\right)\left(1-\frac{n+1}{\omega}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{n}{1}\right|\cdot\left|1-\frac{n+1}{2}\right|\cdot\left|1-\frac{n+1}{3}\right|\cdots\left|1-\frac{n+1}{\omega-1}\right|\cdot\left|1-\frac{n+1}{\omega}\right|,$$

und da

$$\left|1-\frac{n+1}{\omega}\right|=\left|1-\frac{r+si+1}{\omega}\right|=\sqrt{\left(1-\frac{r+1}{\omega}\right)^2+\frac{s^2}{\omega^2}}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{2(r+1)}{\omega} + \frac{(r+1)^2 + s^2}{\omega^2}} = 1 - \frac{r+1}{\omega} + \frac{s^2}{\omega^2} + \cdots$$

$$\leqq 1 - \frac{r+1-\delta}{\omega}$$

ist, worin wir uns δ bei allen ins Unendliche wachsenden ω beliebig klein denken können, so erkennen wir, dass für $-1 < r \leqq 0$ das obige Product divergirt, da von einer gewissen Stelle ab

$$\left|1 - \frac{n+1}{\omega'}\right| \cdot \left|1 - \frac{n+1}{\omega'+1}\right| \cdots \left|1 - \frac{n+1}{\omega-1}\right| \cdot \left|1 - \frac{n+1}{\omega}\right|$$

$$\leqq \left(1 - \frac{r+1-\delta}{\omega'}\right)\left(1 - \frac{r+1-\delta}{\omega'+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{r+1-\delta}{\omega-1}\right)\left(1 - \frac{r+1-\delta}{\omega}\right)$$

ist und die Reihe

$$\frac{1}{\omega'} + \frac{1}{\omega'+1} + \cdots + \frac{1}{\omega-1} + \frac{1}{\omega}$$

als ein Theil der harmonischen Reihe divergirt. Da ferner in unserem Falle $1 - \frac{r+1-\delta}{\omega} < 1$ ist, so muss

$$|n_\omega| = 0$$

sein. Hiernach ist, wenn wir zur Grenze übergehen,

$$p_\omega(1+x) = 1 + (n+1)_1 x + (n+1)_2 x^2 + \cdots,$$

also $p_\omega(1+x)$ einer convergenten Reihe gleich. Wenn daher nicht $x = -1$ ist, wird sich p_ω auch für $|x| = 1$ einer bestimmten Reihe nähern, d. h. (4.) convergent sein. Dass für $x = -1$ in unserem Falle wirklich Divergenz eintritt, geht daraus hervor, dass sonst die Reihe der Grösse

$$\Big[(1+x)^n\Big]_{x=-1} = \Big[(1+x)^{r+si}\Big]_{x=-1}$$

$$= \Big[(1+x)^r e^{\log(1+x)si}\Big]_{x=-1}$$

gleich sein müsste, die gar keinen Sinn hat, weil $0^r = \infty$ und $\log 0$ unbestimmt ist.

Das Gesammtresultat lautet:

Die Binomialreihe

$$1 + n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3 + \cdots,$$

in der $n = r + si$ *ist, convergirt unbedingt für* $|x| < 1$; *ausserdem convergirt sie nur noch für* $r > 0$ *und* $|x| = 1$, *sowie für* $-1 < r \leqq 0$ *und* $|x| = 1$, *wenn im letzteren Falle* $x = -1$ *ausgenommen wird.*

§ 46.

Differentiation der wichtigsten additiv periodischen Functionen.

1. Es ist nach § 21, 2 für

$$y = e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1} + \frac{2x}{1 \cdot 2} + \frac{3x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots,$$

also

(1.) $$\frac{dy}{dx} = e^x.$$

2. Setzen wir $y = \log x$, so ist $x = e^y$, also

$$\frac{dx}{dy} = e^y = x$$

und somit

(2.) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Die unendliche Vieldeutigkeit des Logarithmus (wie auch der cyklometrischen Functionen) fällt nach der Differentiation weg, weil sich die verschiedenen Werthe desselben nur um Constanten unterscheiden, deren Differentialquotient Null ist.

3. Für

$$y = \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

haben wir (vgl. § 16, 5)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ie^{ix} + ie^{-ix}}{2i} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

also

(3.) $$\frac{dy}{dx} = \cos x;$$

ist aber

$$y = \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ie^{ix} - ie^{-ix}}{2} = -\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

oder

(4.) $$\frac{dy}{dx} = -\sin x.$$

Weiter ist für $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ nach § 16, 5

(5.) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

und für

$$y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}:$$

(6.) $$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

4. Ist $y = \arcsin x$, also $x = \sin y$, so haben wir

$$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

also

(7.) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

ist $y = \arccos x$, so ergiebt sich ebenso

(8.) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

haben wir $y = \operatorname{arctg} x$, also $x = \operatorname{tg} y$, so folgt

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

oder, da

$$1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

ist,

$$\frac{dx}{dy} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2,$$

somit

(9.) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2},$$

und ebenso für $y = \operatorname{arc\,cotg} x$:

(10.) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Bemerkenswerth ist bei den Differentialquotienten der einfachsten additiv periodischen Functionen, dass sie wieder ebensolche Functionen sind, während die Differentialquotienten der Umkehrungsfunctionen *algebraische* Functionen darstellen.

§ 47.

Nirgends verschwindende transcendente ganze Functionen; allgemeinste eindeutige additiv periodische Functionen.

1. In § 29, 7 gelangten wir zu der Erkenntniss, dass transcendente ganze Functionen denkbar sind, die für

kein endliches x verschwinden, und später lernten wir eine solche in e^x kennen. Es hat aber auch keine Schwierigkeit, einen allgemeinen Ausdruck für alle diese Functionen aufzustellen. Bezeichnet nämlich

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots$$

eine solche Function, so wird

$$f(x) = \log F(x) = \log(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots)$$
$$= \log A_0 + \log\left(1 + \frac{A_1}{A_0} x + \frac{A_2}{A_0} x^2 + \cdots\right)$$

sich in der Umgebung jedes Punktes, der kein Unstetigkeitspunkt des Logarithmus ist, in eine Potenzreihe entwickeln lassen (§ 26, 5 und § 40, 9). Bedenkt man nun, dass der Logarithmus nur für $x = 0$ und $x = \infty$ unstetig wird, $F(x)$ diese Werthe aber nur für $x = \infty$ annimmt, so sieht man ein, dass $\log F(x)$ in jedem im Endlichen gelegenen Punkte den Charakter einer ganzen Function trägt, mithin eine *transcendente ganze* Function ist; ein Übergang zwischen den verschiedenen Werthen des Logarithmus wird nur im Unendlichen, nicht durch irgend welchen Umlauf im Endlichen stattfinden können. Wir können demnach

$$f(x) = \log F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

setzen, worin die rechtsstehende Reihe für beliebige endliche x convergirt, und haben also

$$(1.) \qquad F(x) = e^{\log F(x)} = e^{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots}.$$

Jede transcendente ganze Function, welche für kein endliches x verschwindet, lässt sich als eine Exponentialfunction darstellen, deren Argument eine ganze transcendente Function ist, und umgekehrt.

2. In derselben Weise finden wir, dass eine nirgends im Endlichen verschwindende transcendente ganze Function im *weiteren* Sinne:

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots$$
$$+ \frac{A_{-1}}{x} + \frac{A_{-2}}{x^2} + \cdots$$

sich in der Form

$$e^{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + \frac{a_{-1}}{x} + \frac{a_{-2}}{x^2} + \cdots}$$

darstellen lässt, wo der Exponent eine transcendente ganze Function im weiteren Sinne ist.

3. Wir wollen bei dieser Gelegenheit auch feststellen, welches *die allgemeinste eindeutige Function mit der additiven Periode m ist.* Haben wir für die eindeutige Function $F(x)$:

$$F(x+m) = F(x)$$

und setzen wir $x = \frac{m}{2\pi i}\log y$, so ist $f(y) = F\left(\frac{m}{2\pi i}\log y\right)$ eine eindeutige Function von y, weil die sämmtlichen Werthe von $\log y$ um $2k\pi i$, also diejenigen von $\frac{m}{2\pi i}\log y$ um km differiren, so dass $F(x)$ für sie den gleichen Werth annimmt. Da nun $y = e^{\frac{2\pi i x}{m}}$ ist, so folgt

$$F(x) = f\left(e^{\frac{2\pi i x}{m}}\right).$$

Ist umgekehrt $f(x)$ eine beliebige eindeutige Function, so hat selbstverständlich $f\left(e^{\frac{2\pi i x}{m}}\right)$ die additive Periode m. *Man erhält also die allgemeinste eindeutige Function mit der additiven Periode m, wenn man in der allgemeinsten eindeutigen Function* $e^{\frac{2\pi i x}{m}}$ *als Argument einsetzt* *).

§ 48.

Entwicklung transcendenter ganzer Functionen in unendliche Producte.

1. Wir sind jetzt im Stande, eine wesentliche Lücke auszufüllen, die in der Theorie der transcendenten ganzen Functionen bis jetzt geblieben ist. In § 29, 10 konnten wir noch nicht nachweisen, dass jede transcendente ganze Function, welche in unendlich vielen Punkten verschwindet, sich — von einem nirgends verschwindenden Factor abgesehen — in ein unendliches Product von geeigneter Form entwickeln lässt. Jetzt wird uns dies gelingen mit Hülfe des fundamentalen Satzes von Herrn Weierstrass (in der in § 31, 2 citirten Abhandlung):

Ist

$$a_1, a_2, a_3, \cdots a_n \cdots$$

---

*) Ist $F(x)$ eine *analytische* Function, so ist auch $f(x)$ eine solche, und umgekehrt.

eine Folge von Grössen derart, dass

$$|a_{k+1}| \geqq |a_k|$$

und

$$a_\omega = \infty$$

ist), so lässt sich immer ein convergentes Product*

$$(1.)\quad \left(1-\frac{x}{a_1}\right)\varphi_1(x)\cdot\left(1-\frac{x}{a_2}\right)\varphi_2(x)\cdot\left(1-\frac{x}{a_3}\right)\varphi_3(x)\cdots$$

bilden, in dem die $\varphi_k(x)$ geeignet gewählte, nirgends im Endlichen verschwindende, transcendente ganze Functionen sind.

Beweis: Sind die Grössen

$$a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, \cdots$$

so beschaffen, dass

$$(2.)\quad \left|\frac{1}{a_1}\right| + \left|\frac{1}{a_2}\right| + \left|\frac{1}{a_3}\right| + \cdots + \left|\frac{1}{a_n}\right| + \cdots$$

eine convergente Reihe bildet, so ist nach § 11, 2

$$(3.)\quad \left(1-\frac{x}{a_1}\right)\left(1-\frac{x}{a_2}\right)\left(1-\frac{x}{a_3}\right)\cdots$$

ein unbedingt convergentes Product. Trifft diese Voraussetzung nicht zu, so setzen wir

$$\varepsilon_n(x) = \frac{x}{a_n} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{a_n^2} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{a_n^3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\frac{x^{n-1}}{a_n^{n-1}}$$

und behaupten, dass das Product

$$(4.)\quad \left(1-\frac{x}{a_1}\right)e^{\varepsilon_1(x)}\left(1-\frac{x}{a_2}\right)e^{\varepsilon_2(x)}\cdots\left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{\varepsilon_n(x)}\cdots$$

unbedingt convergirt. Es ist nämlich

$$\left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{\varepsilon_n(x)} = \left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{-\log\left(1-\frac{x}{a_n}\right)-\frac{1}{n}\frac{x^n}{a_n^n}-\frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{a_n^{n+1}}-\cdots}$$

$$= \left(1-\frac{x}{a_n}\right)\left(1-\frac{x}{a_n}\right)^{-1}e^{-\frac{1}{n}\frac{x^n}{a_n^n}-\frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{a_n^{n+1}}-\cdots}$$

$$= 1 - \frac{1}{n}\frac{x^n}{a_n^n} - \frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{a_n^{n+1}} - \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{n}\frac{x^n}{a_n^n}\left[1+\delta_n(x)\right],$$

*) In der letzten Bedingung ist implicite enthalten, dass nicht unendlich viele $|a_k|$ unter einer endlichen Grenze liegen dürfen.

worin $\delta_n(x)$ eine durchaus convergente Potenzreihe bezeichnet, die kein von x freies Glied besitzt, also mit x verschwindet und für endliche x mit wachsenden n unter jede Grenze abnimmt. Liegen nun die absoluten Beträge sämmtlicher $1+\delta_n(x)$ für alle $|x|$, die eine beliebig gross vorgegebene Grenze nicht überschreiten, unter der Grösse Δ, so convergirt

$$\sum_1^\infty {}_n \frac{1}{n}\left|\frac{x^n}{a_n{}^n}\right| \Delta,$$

da $\left|\frac{x}{a_n}\right|$ für hinlänglich grosse n kleiner wie p, $p<1$, also

$$\sum_1^\infty {}_n \frac{1}{n}\left|\frac{x^n}{a_n{}^n}\right| \Delta < \Delta \sum_1^\infty {}_n \frac{1}{n} p^n$$

ist. Hieraus folgt aber weiter die Convergenz von

$$\sum_1^\infty {}_n \frac{1}{n}\left|\frac{x}{a_n}\right|^n |1+\delta_n(x)|$$

und somit auch diejenige von (4.)

2. Zusatz: *Die Producte* (3.) *und* (4.) *sind transcendente ganze Functionen, d. h. sie geben ausmultiplicirt Potenzreihen, die für jedes endliche x convergiren.*

Beweis: Die einzelnen Factoren dieser Producte stellen transcendente ganze Functionen dar, welche convergiren, wenn man auch ihre sämmtlichen Glieder durch deren absolute Beträge ersetzt, und das gesammte unendliche Product convergirt ebenfalls noch bei dieser Umformung. Multiplicirt man nun beliebig viele, für jedes endliche x convergente Potenzreihen von der Form

$$1+a_1x+a_2x^2+\cdots, \tag{5.}$$

in denen die a_k und x positive Grössen bedeuten, miteinander, so erhält man wieder eine ebensolche Potenzreihe, die sich bei unendlich vielen Factoren derselben Grenze nähert, wie das Product. Würde bei diesem Prozess (auf das fragliche Product angewandt) ein Coefficient der Reihe ins Unendliche wachsen, so wäre dies mit der ganzen Reihe, also auch mit dem Product in demselben Stadium der Fall. Man erkennt, dass ein convergentes Product aus Factoren der Form (5.) eine stets convergente Potenzreihe liefert. Lassen wir aber an Stelle von a_k und x Grössen treten, welche mit ihnen

den gleichen absoluten Betrag besitzen, so kann die Convergenz hierdurch nur vermehrt werden. Hieraus geht die Richtigkeit des Zusatzes hervor.

3. Wird eine transcendente ganze Function $f(x)$ in einer unendlichen Reihe von Punkten $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, \cdots$, von denen auch mehrere zusammenfallen können, in der ersten Ordnung Null, so genügen dieselben nach § 29, 9 bei geeigneter Ordnung den Bedingungen

$$|a_{k+1}| \geqq |a_k|, \quad a_\omega = \infty.$$

Wir können daher nach dem Vorigen eine transcendente ganze Function $F(x)$ in Gestalt eines unendlichen Productes bilden, welche dieselben Nullpunkte hat. $\frac{f(x)}{F(x)} = \varphi(x)$ wird daher eine nirgends Null werdende, transcendente ganze Function (eventuell auch eine Constante) sein, da es als Quotient zweier transcendenten ganzen Functionen überall ausser in seinen Unstetigkeitspunkten, die aber hier ausser $x = \infty$ nicht vorhanden sind, den Charakter einer ganzen Function besitzt. Es ist somit

$$f(x) = F(x)\varphi(x),$$

d. h. $f(x)$ *lässt sich nach Absonderung eines nirgends im Endlichen verschwindenden Factors in ein unendliches Product der eben beschriebenen Arten verwandeln.*

4. *Jede eindeutige Function $f(x)$, welche in unendlich vielen, eventuell theilweise zusammenfallenden Punkten $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, \cdots$ von der ersten Ordnung unendlich und im Punkte $x = \infty$ wesentlich unstetig wird, sonst aber überall den Charakter einer ganzen Function besitzt, ist eine* ***transcendente rationale Function.*** Denn die Punkte $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, \cdots$ werden bei geeigneter Anordnung wieder nach § 24, 4 die Bedingungen

$$|a_{k+1}| \geqq |a_k|, \quad a_\omega = \infty$$

befriedigen, sodass wir eine transcendente ganze Function $F(x)$ bilden können, welche in den Punkten a_k verschwindet; alsdann ist $f(x)F(x) = \varphi(x)$ eine transcendente ganze Function, also $f(x) = \frac{\varphi(x)}{F(x)}$ eine transcendente rationale Function.

5. Haben wir eine doppelte Reihe von Punkten

$$a_1, a_2, \cdots a_n, \cdots,$$
$$b_1, b_2, \cdots b_n, \cdots,$$

welche den Bedingungen

$$|a_{k+1}| \geqq |b_k|, \; a_\omega = \infty,$$
$$|b_{k+1}| \leqq |b_k|, \; b_\omega = 0$$

genügen, so wird sich genau wie oben ein unbedingt convergentes Product

$$\left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\varphi_1(x) \cdot \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)\varphi_2(x) \cdots \left(1 - \frac{x}{a_n}\right)\varphi_n(x) \cdots$$

$$\cdot \left(1 - \frac{b_1}{x}\right)\varphi_{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{b_2}{x}\right)\varphi_{-2}\left(\frac{1}{x}\right) \cdots \left(1 - \frac{b_n}{x}\right)\varphi_{-n}\left(\frac{1}{x}\right) \cdots$$

bilden lassen, welches eine transcendente ganze Function im weiteren Sinne darstellt. Wir brauchen eben nur die beiden Theile des Productes nach denselben Vorschriften wie oben herzustellen. Hieraus schliessen wir, *dass sich jede transcendente ganze Function im weiteren Sinne, von einem für kein von* 0 *und* ∞ *verschiedenes* x *verschwindenden Factor abgesehen, in ein unendliches Product obiger Art verwandeln lässt, wobei eine endliche Zahl von Factoren des Typus* $\left(1 - \frac{x}{a_k}\right)\varphi_k(x)$ *in den Typus* $\left(1 - \frac{b_k}{x}\right)\varphi_{-k}\left(\frac{1}{x}\right)$ *umgeformt werden kann, und umgekehrt.*

Weiter schliessen wir, *dass jede eindeutige Function, die in unendlich vielen Punkten von endlicher Ordnung unendlich und für* $x = 0$ *und* $x = \infty$ *wesentlich unstetig wird, sonst aber überall den Charakter einer ganzen Function besitzt, eine transcendente rationale Function im weiteren Sinne ist.*

6. In ähnlicher Weise liesse sich die Möglichkeit darthun, jede transcendente rationale Function im engeren oder weiteren Sinne in eine Partialbruchreihe zu verwandeln, deren Summanden die Form

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)^k} + \varphi(x) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{x}\right)^k} + \varphi(x)$$

haben, wo $\varphi(x)$ eine Function bezeichnet, die für kein endliches (eventuell auch von Null verschiedenes) x Null wird. Wir verzichten jedoch auf den Beweis dieses Satzes, da wir von demselben keinen Gebrauch zu machen haben werden.



Sechster Abschnitt.

Die Functionen mit multiplicatorischer Periode.

§ 49.

Construction der eindeutigen, multiplicatorisch periodischen Functionen mit zwei wesentlichen Discontinuitätspunkten.

1. In §34, 12 haben wir bewiesen, dass jede eindeutige analytische Function mit multiplicatorischer Periode zwei wesentliche Discontinuitätspunkte, nämlich $x = 0$ und $x = \infty$ besitzt und dass sie deren nicht mehr haben kann, wenn sie nicht unendlich viele besitzen soll. Nach § 48, 5 muss sie sich also, wenn wir vorläufig nur zwei Discontinuitätspunkte zulassen, als *transcendente ganze oder rationale Function im weiteren Sinne* darstellen. Wir lösen nun die ganz allgemeine Aufgabe: *Sämmtliche transcendente ganzen oder rationalen Functionen $f(x)$ im weiteren Sinne aufzusuchen, welche der Gleichung*

$$(1.)\qquad f(px) = f(x), \quad |p| < 1,$$

genügen.

2. Setzen wir zuerst

$$(2.)\qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + \frac{a_{-1}}{x} + \frac{a_{-2}}{x^2} + \frac{a_{-3}}{x^3} + \cdots,$$

so ist

$$f(px) = a_0 + a_1 px + a_2 p^2 x^2 + a_3 p^3 x^3 + \cdots + \frac{a_{-1}}{px} + \frac{a_{-2}}{p^2 x^2} + \frac{a_{-3}}{p^3 x^3} + \cdots,$$

also wegen (1.)

$$a_0 = a_0,$$

$$a_k = p^k a_k,$$

somit

$$a_k = 0.$$

Es existirt demnach *keine transcendente ganze Function im weiteren Sinne,* welche die Gleichung (1.) befriedigt. Wir

können daher auch sagen, dass es keine Function $f(x)$ der fraglichen Art giebt, welche ausser in $x = 0$ und $x = \infty$ nirgends *unendlich* wird, da sie sich sonst in der Form (2.) darstellen lassen müsste. Allein es giebt auch kein $f(x)$, welches ausser in $x = 0$ und $x = \infty$ nirgends *Null* wird, da sonst sein reciproker Werth nirgends unendlich würde.

3. Wenn also $f(x)$ existirt, so muss es eine transcendente *rationale* Function im weiteren Sinne sein, die in gewissen, im Endlichen gelegenen Punkten Null und unendlich wird. Ist aber a ein Nullpunkt oder Unendlichkeitspunkt von $f(x)$, so sind auch wegen (1.)

$$ap,\ ap^2,\ ap^3,\ \cdots,\ \frac{a}{p},\ \frac{a}{p^2},\ \cdots$$

solche. Jedenfalls werden nach § 29, 9 nicht unendlich viele, durch Periodicität nicht correspondirende und im Endlichen liegende Punkte a vorhanden sein können. Sind nun $a_1, a_2, \ldots a_m$ die Nullpunkte, $b_1, b_2, \ldots b_n$ die Unendlichkeitspunkte von $f(x)$, die durch Periodicität nicht verbunden sind (so dass nicht $a_r = p^k a_s$ u. s. w. ist), so wird $f(x)$, von einem nirgends ausser in $x = 0$ und $x = \infty$ Null werdenden Factor $\varphi(x)$ und einer Potenz x^r abgesehen, im Zähler und Nenner nur Factoren von der Form*)

$$\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{px}{a}\right)\left(1 - \frac{p^2x}{a}\right)\left(1 - \frac{p^3x}{a}\right)\cdots$$
$$\cdot\left(1 - \frac{ap}{x}\right)\left(1 - \frac{ap^2}{x}\right)\left(1 - \frac{ap^3}{x}\right)\cdots$$

enthalten. Setzen wir

$$\varepsilon(p, x) = (1 + x)(1 + px)(1 + p^2x)\cdots$$
$$\cdot\left(1 + \frac{p}{x}\right)\left(1 + \frac{p^2}{x}\right)\left(1 + \frac{p^3}{x}\right)\cdots,$$

so ist

$$\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{px}{a}\right)\left(1 - \frac{p^2x}{a}\right)\cdots$$
$$\cdot\left(1 - \frac{ap}{x}\right)\left(1 - \frac{ap^2}{x}\right)\left(1 - \frac{ap^3}{x}\right)\cdots = \varepsilon\left(p, -\frac{x}{a}\right),$$

---

*) Man sieht sofort, dass das folgende Product für beliebige von Null, unendlich und ap^k verschiedene x convergirt, so dass ihm keine andere Form gegeben zu werden braucht.

und $f(x)$ wird die Form

$$(3.)\quad f(x) = \varphi(x) x^r \frac{\varepsilon\left(p, -\frac{x}{a_1}\right) \varepsilon\left(p, -\frac{x}{a_2}\right) \cdots \varepsilon\left(p, -\frac{x}{a_m}\right)}{\varepsilon\left(p, -\frac{x}{b_1}\right) . \varepsilon\left(p, -\frac{x}{b_2}\right) \cdots \varepsilon\left(p, -\frac{x}{b_n}\right)}$$

besitzen müssen.

Nehmen wir nun vorläufig an, dass $\varphi(x)$ eine Constante C sei, so wird, da

$$\begin{aligned} \varepsilon(p, px) &= (1 + px)(1 + p^2 x)(1 + p^3 x) \cdots \\ &\quad \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{p}{x}\right)\left(1 + \frac{p^2}{x}\right) \cdots \\ &= \frac{1}{x}(1 + x)(1 + px)(1 + p^2 x)(1 + p^3 x) \cdots \\ &\quad \cdot \left(1 + \frac{p}{x}\right)\left(1 + \frac{p^2}{x}\right) \cdots \end{aligned}$$

oder

$$(4.)\quad \varepsilon(p, p\,x) = \frac{1}{x}\,\varepsilon(p, x)$$

ist,

$$\begin{aligned} f(px) &= C p^r x^r \\ &\cdot \frac{x^n (-1)^m a_1 a_2 a_3 \cdots a_m\, \varepsilon\left(p, -\frac{x}{a_1}\right) \varepsilon\left(p, -\frac{x}{a_2}\right) \cdots \varepsilon\left(p, -\frac{x}{a_m}\right)}{x^m (-1)^n b_1 b_2 b_3 \cdots b_n\, \varepsilon\left(p, -\frac{x}{b_1}\right) \varepsilon\left(p, -\frac{x}{b_2}\right) \cdots \varepsilon\left(p, -\frac{x}{b_n}\right)} \\ &= C p^r \frac{a_1 a_2 a_3 \cdots a_m}{b_1 b_2 b_3 \cdots b_n} (-1)^{m-n} x^{r+n-m} \\ &\cdot \frac{\varepsilon\left(p, -\frac{x}{a_1}\right) \varepsilon\left(p, -\frac{x}{a_2}\right) \cdots \varepsilon\left(p, -\frac{x}{a_m}\right)}{\varepsilon\left(p, -\frac{x}{b_1}\right) \varepsilon\left(p, -\frac{x}{b_2}\right) \cdots \varepsilon\left(p, -\frac{x}{b_n}\right)} \end{aligned}$$

sein. Soll dieser Ausdruck mit $f(x)$ übereinstimmen, so müssen die folgenden Bedingungen befriedigt sein:

$$(5.)\quad \text{a.}\qquad m = n,$$

$$\text{b.}\qquad p^r \frac{a_1 a_2 a_3 \cdots a_m}{b_1 b_2 b_3 \cdots b_n} = 1,$$

so dass

$$(6.)\quad f(x) = C x^r \frac{\varepsilon\left(p, -\frac{x}{a_1}\right) \varepsilon\left(p, -\frac{x}{a_2}\right) \cdots \varepsilon\left(p, -\frac{x}{a_n}\right)}{\varepsilon\left(p, -\frac{x}{b_1}\right) \varepsilon\left(p, -\frac{x}{b_2}\right) \cdots \varepsilon\left(p, -\frac{x}{b_n}\right)}$$

und

$$(7.)\qquad b_1 b_2 b_3 \cdots b_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n p^r$$

ist. Weiter ist ersichtlich, dass nicht $n = 1$ sein kann, da sonst nach (5.) $b_1 = a_1 p^r$, also

$$\varepsilon\left(p, -\frac{x}{b_1}\right) = \varepsilon\left(p, -\frac{x}{a_1 p^r}\right)$$

oder nach wiederholter Anwendung von (4.)

$$\varepsilon\left(p, -\frac{x}{b_1}\right) = cx^r \varepsilon\left(p, -\frac{x}{a_1}\right)$$

sein müsste, wodurch $f(x)$ zu einer Constanten würde. Übrigens lässt sich bei geeigneter Umformung der $\varepsilon\left(p, -\frac{x}{a}\right)$ mit Hülfe von (4.) der Factor x^r leicht vermeiden.

4. Es fragt sich nun noch, ob nicht $f(x)$ einen Factor $\varphi(x)$ besitzen kann, welcher ausser für $x = 0$ und $x = \infty$ nirgends Null und unendlich wird. Wäre ein solcher möglich, hätte also $f(x)$ die Form (3.), für die wir kurz

$$(8.)\qquad f(x) = \varphi(x)\psi(x)$$

schreiben, so müsste wegen (4.) $\psi(x)$ einer Gleichung

$$\psi(px) = cx^k \psi(x)$$

(k positiv oder negativ), also $\varphi(x)$ wegen (8.) und (1.) einer Gleichung

$$\varphi(px) = \frac{1}{cx^k}\varphi(x)$$

genügen. Nun befriedigt aber

$$\psi_1(x) = \varepsilon\left(p, \frac{x}{\alpha_1}\right)\varepsilon\left(p, \frac{x}{\alpha_2}\right)\cdots\varepsilon\left(p, \frac{x}{\alpha_k}\right),$$

worin die α so gewählt sein mögen, dass

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k = \frac{1}{c}$$

ist, die Gleichung

$$\psi_1(px) = \frac{1}{cx^k}\psi_1(x),$$

so dass

$$f_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{\varphi(x)}$$

der Gleichung

$$f_1(px) = f_1(x)$$

genügte; $f_1(x)$ wäre also eine multiplicatorisch periodische Function, welche für kein von Null oder unendlich verschiedenes x unendlich wird, und eine solche ist nicht möglich. Wir ersehen hieraus, dass $\varphi(x)$ nur eine Constante sein kann, so dass (6.) die allgemeinste Form einer eindeutigen, multiplicatorisch periodischen Function mit zwei wesentlichen Discontinuitätspunkten ist.

5. Aus (5.) geht hervor, dass $f(x)$ in ebensovielen nicht äquivalenten (d. h. durch Periodicität nicht verbundenen) Punkten Null wie unendlich wird. Es ist aber auch leicht zu erkennen, *dass es überhaupt jeden beliebigen Werth c gleich oft annimmt.* Denn wird $f(x)$ in n nicht äquivalenten Punkten unendlich, so ist das Gleiche mit der ebenfalls periodischen Function $f(x) - c$ der Fall; die letztere wird daher auch $n$mal Null, also $f(x)$ $n$mal der Grösse c gleich. Sind $c_1, c_2, \ldots c_n$ n solche nicht äquivalente x-Werthe, für die $f(x) = c$ wird, so muss nach derselben Betrachtung

$$b_1 b_2 \cdots b_n = c_1 c_2 \cdots c_n p^s$$

sein; s wird je nach der Wahl der c_k verschieden sein. Wir sagen von einer multiplicatorisch periodischen Function, welche jeden Werth $n$mal annimmt, *sie sei von der n^{ten} Ordnung.*

6. Wir fassen die Ergebnisse unserer Untersuchung in folgende Sätze zusammen.

a. *Es giebt keine eindeutige, analytische Function $f(x)$ mit zwei wesentlichen Discontinuitätspunkten, welche für kein von $x = 0$ und $x = \infty$ verschiedenes x Null oder unendlich wird.*

b. *Jede Function $f(x)$ nimmt jeden Werth für die gleiche Zahl nicht äquivalenter Punkte an.*

c. *Es giebt keine Function $f(x)$, welche, von der Periodicität abgesehen, jeden Werth nur einmal annimmt (es giebt keine multiplicatorisch periodische Function erster Ordnung).*

d. *Bezeichnet p die multiplicatorische Periode von $f(x)$ und sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ zwei Reihen nicht äquivalenter Punkte, für die $f(x)$ zwei Werthe A und B annimmt, so ist*

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n = \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n p^s,$$

worin die ganze, positive oder negative Zahl s von der speciellen Wahl der α_k und β_k, die ja eine unendlich mannichfache sein kann, abhängt.

e. *Zähler und Nenner von $f(x)$ setzen sich aus einer gleichen Zahl von Factoren zusammen, die alle die Form $\varepsilon\left(p, -\frac{x}{a}\right)$ haben.*

7. Stellt man nach § 37, 3 die Eintheilung der Ebene der complexen Zahl her, welche der Periode $y = px$ entspricht, so wird $f(x)$ innerhalb eines Kreisrings jeden Werth $n$mal, und zwar mindestens zweimal, annehmen. Wir finden daher keine Function $f(x)$, die e^x analog ist, deren Umkehrung also, von der Periodicität abgesehen, *eindeutig* ist; die Theorie der multiplicatorisch periodischen Functionen hat schon aus diesem Grunde einen ganz anderen Charakter, wie diejenige der additiv periodischen Transcendenten.

Wir werden uns in der Folge zuerst mit der Function $\varepsilon(p, x)$, auf die wir die multiplicatorisch periodischen Functionen zurückgeführt haben, und mit verwandten Gebilden beschäftigen, um nachher erst auf die periodischen Functionen selbst zurückzukommen.

§ 50.

Die Function $\eta(p, x)$.

1. An Stelle der Function $\varepsilon(p, x)$ führen wir zuerst eine mehr symmetrisch gebaute ein, die den Functionen mit der multiplicatorischen Periode p^2 entspricht; wir setzen

$$(1.)\quad \varepsilon_1(p, x) = \varepsilon(p^2, px) = (1 + px)(1 + p^3x)(1 + p^5x)\ldots \left(1 + \frac{p}{x}\right)\left(1 + \frac{p^3}{x}\right)\left(1 + \frac{p^5}{x}\right)\cdots$$

und haben die Functionalgleichung

$$(2.)\qquad \varepsilon_1(p, p^2x) = \frac{1}{px}\,\varepsilon_1(p, x).$$

2. Um für $\varepsilon_1(p, x)$ eine unendliche Reihe herzuleiten, gehen wir von dem endlichen Ausdrucke

$$\varphi_n(x) = (1 + x)(1 + px)(1 + p^2x)\cdots(1 + p^{n-1}x)$$

aus, für den wir supponiren

$$\varphi_n(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Da

$$\varphi_n(px) = (1 + px)(1 + p^2 x) \cdots (1 + p^n x) = \frac{1 + p^n x}{1 + x} \varphi_n(x)$$

ist, so haben wir die Gleichung

$$(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n)(1 + p^n x)$$
$$= (1 + a_1 px + a_2 p^2 x^2 + \cdots + a_n p^n x^n)(1 + x)$$

identisch zu befriedigen. Nach Ausmultipliciren der Klammern giebt die Coefficientenvergleichung

$$p^n + a_1 = 1 + a_1 p,$$
$$a_1 p^n + a_2 = a_1 p + a_2 p^2,$$
$$a_2 p^n + a_3 = a_2 p + a_3 p^3 \text{ u. s. w.},$$

also

$$a_1 = \frac{1 - p^n}{1 - p},$$

$$a_2 = p \frac{(1 - p^n)(1 - p^{n-1})}{(1 - p)(1 - p^2)},$$

$$a_3 = p^3 \frac{(1 - p^n)(1 - p^{n-1})(1 - p^{n-2})}{(1 - p)(1 - p^2)(1 - p^3)}$$

u. s. w.,

$$a_k = p^{1+2+3+\cdots+(k-1)} \frac{(1 - p^n)(1 - p^{n-1}) \cdots (1 - p^{n-k+1})}{(1 - p)(1 - p^2) \cdots (1 - p^k)}$$
$$= p^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{(1 - p^n)(1 - p^{n-1}) \cdots (1 - p^{n-k+1})}{(1 - p)(1 - p^2) \cdots (1 - p^k)}.$$

Setzen wir in der Gleichung

$$(1 + x)(1 + px)(1 + px^2) \cdots (1 + p^{n-1} x)$$
$$= 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

an Stelle von p, n und x resp. $p^2, 2n$ und $\frac{x}{p^{2n-1}}$, so wird daraus

$$\left(1 + \frac{x}{p^{2n-1}}\right)\left(1 + \frac{x}{p^{2n-3}}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{p^3}\right)\left(1 + \frac{x}{p}\right)$$
$$\cdot (1 + px)(1 + p^3 x) \cdots (1 + p^{2n-3} x)(1 + p^{2n-1} x)$$
$$= 1 + a_1 \frac{x}{p^{2n-1}} + a_2 \frac{x^2}{p^{2(2n-1)}} + \cdots + a_{2n} \frac{x^{2n}}{p^{2n(2n-1)}}$$

und nach beiderseitiger Multiplication mit

$$\frac{p^{1+3+5+\cdots+(2n-1)}}{x^n} = \frac{p^{n^2}}{x^n}:$$

$$(1+px)(1+p^3x)\cdots(1+p^{2n-3}x)(1+p^{2n-1}x)$$
$$\cdot\left(1+\frac{p}{x}\right)\left(1+\frac{p^3}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{p^{2n-3}}{x}\right)\left(1+\frac{p^{2n-1}}{x}\right)$$
$$= \frac{a_n}{p^{n(2n-1)-n^2}} + \frac{a_{n+1}}{p^{(n+1)(2n-1)-n^2}}x + \frac{a_{n+2}}{p^{(n+2)(2n-1)-n^2}}x^2 + \cdots$$
$$+ \frac{a_{2n}}{p^{2n(2n-1)-n^2}}x^n$$
$$+ \frac{a_{n-1}}{p^{(n-1)(2n-1)-n^2}}\frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{p^{(n-2)(2n-1)-n^2}}\frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{p^{-n^2}}\frac{1}{x^n},$$

worin jetzt

$$a_{n+k} = p^{(n+k)(n+k-1)}\frac{(1-p^{4n})(1-p^{4n-2})\cdots(1-p^{4n-2n-2k+2})}{(1-p^2)(1-p^4)\cdots(1-p^{2n+2k})}$$
$$= p^{(n+k)(n+k-1)}\frac{(1-p^{2n-2k+2})(1-p^{2n-2k+4})\cdots(1-p^{4n-2})(1-p^{4n})}{(1-p^2)(1-p^4)\cdots(1-p^{2n+2k})}$$

zu setzen ist. Gehen wir zur Grenze $n=\infty$ über, so wird

$$\frac{a_{n+k}}{p^{(n+k)(2n-1)-n^2}} = \frac{p^{k^2}}{(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots};$$

denn es leuchtet ein, dass ein Product von der Form

$$(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots$$

für $|p|<1$ convergirt, da

$$|p^2|+|p^4|+|p^6|+\cdots$$

convergent ist, und hieraus folgt zugleich, dass der Zähler von a_{n+k} der Einheit gleich wird. Wir erhalten die fundamentale Formel ($|p|) < 1$, $0<|x|<\infty$)

$$(3.)\quad \varepsilon_1(p,x) = (1+px)(1+p^3x)(1+p^5x)\cdots$$
$$\cdot\left(1+\frac{p}{x}\right)\left(1+\frac{p^3}{x}\right)\left(1+\frac{p^5}{x}\right)\cdots$$
$$= \frac{1}{(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots}$$
$$\cdot\left[1+p\left(x+\frac{1}{x}\right)+p^4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+p^9\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\cdots\right].$$

3. An Stelle von $\varepsilon_1(x)$ führen wir nun abermals eine neue Transcendente ein, die wir dann den weiteren Untersuchungen zu Grunde legen; wir setzen

$$(4.)\quad \eta(p, x) = (1 - p^2)(1 - p^4)(1 - p^6)\cdots \varepsilon_1(p, x)$$

und haben somit

$$(5.)\quad \eta(p,x) = (1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots(1+px)(1+p^3x)(1+p^5x)\cdots \cdot\left(1+\frac{p}{x}\right)\left(1+\frac{p^3}{x}\right)\left(1+\frac{p^5}{x}\right)\cdots$$

und

$$(6.)\quad \eta(p,x) = 1+p\left(x+\frac{1}{x}\right)+p^4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+p^9\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\cdots$$
$$= 1 + \sum_{1}^{\infty}{}^{n}\, p^{n^2}\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n}\, p^{n^2} x^n.$$

Die Functionalgleichung für $\eta(p, x)$ lautet:

$$(7.)\quad \eta(p, p^2x) = \frac{1}{px}\, \eta(p, x);$$

ausserdem haben wir

$$(8.)\quad \eta\left(p, \frac{1}{x}\right) = \eta(p, x).$$

$\eta(p, x)$ ist wie die vorhergehenden Transcendenten $\varepsilon(p, x)$ und $\varepsilon_1(p, x)$ keine multiplicatorisch periodische Function, sondern gehört zu einer Gruppe von Transcendenten, die wir erst später um ihrer selbst willen einführen werden; vorläufig erscheint $\eta(p, x)$ nur als *Hülfsfunction*, die zum Aufbau der multiplicatorisch periodischen Functionen nothwendig ist.

4. Durch Specialisirung erhalten wir*)

$$(9.)\quad \eta(p,1) = (1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots[(1+p)(1+p^3)(1+p^5)\cdots]^2$$
$$= 1 + 2p + 2p^4 + 2p^9 + \cdots,$$

$$(10.)\quad \eta(p,-1) = (1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots[(1-p)(1-p^3)(1-p^5)\cdots]^2$$
$$= 1 - 2p + 2p^4 - 2p^9 + \cdots.$$

Bei (10.) können wir noch eine Umformung ausführen, die in der Folge öfters gebraucht wird; es ist nämlich

---

*) Für $\eta(p, 1)$ schreiben wir in der Folge öfters η, wenn eine Bezeichnung von p überflüssig ist.

$$(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots=(1-p)(1-p^2)(1-p^3)\cdots$$
$$\cdot(1+p)(1+p^2)(1+p^3)\cdots=(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots$$
$$\cdot(1-p)(1-p^3)(1-p^5)\cdots(1+p)(1+p^2)(1+p^3)\cdots,$$

also

$$1=(1-p)(1-p^3)(1-p^5)\cdots(1+p)(1+p^2)(1+p^3)\cdots$$

oder

$$(11.)\quad (1-p)(1-p^3)(1-p^5)\cdots=\frac{1}{(1+p)(1+p^2)(1+p^3)\cdots}.$$

Hiernach wird

$$\eta(p,-1)=\frac{(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots}{[(1+p)(1+p^2)(1+p^3)\cdots]^2}$$
$$=\frac{(1-p)(1-p^2)(1-p^3)\cdots(1+p)(1+p^2)(1+p^3)\cdots}{[(1+p)(1+p^2)(1+p^3)\cdots]^2}$$

oder

$$(12.)\qquad \eta(p,-1)=\frac{(1-p)(1-p^2)(1-p^3)\cdots}{(1+p)(1+p^2)(1+p^3)\cdots}.$$

Weiter ist

$$(13.)\quad \eta(p,\pm i)=(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots$$
$$\cdot(1+pi)(1+p^3i)(1+p^5i)\cdots(1-pi)(1-p^3i)(1-p^5i)\cdots$$
$$=(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots(1+p^2)(1+p^6)(1+p^{10})\cdots$$
$$=1-2p^4+2p^{16}-2p^{36}+\cdots,$$

$$(14.)\quad \eta(p,p)=(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots(1+p^2)(1+p^4)(1+p^6)\cdots$$
$$\cdot 2(1+p^2)(1+p^4)(1+p^6)\cdots$$
$$=2(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots[(1+p^2)(1+p^4)(1+p^6)\cdots]^2,$$

$$(15.)\quad \eta(p,-p)=0.$$

§ 51.

Die Transformation von $\eta(p,x)$.

1. Es ist

$$\eta(p^2,-x^2)=(1-p^4)(1-p^8)(1-p^{12})\cdots$$
$$\cdot(1-p^2x^2)(1-p^6x^2)(1-p^{10}x^2)\cdots\left(1-\frac{p^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{p^6}{x^2}\right)\left(1-\frac{p^{10}}{x^2}\right)\cdots$$
$$=(1-p^4)(1-p^8)(1-p^{12})\cdots(1+px)(1+p^3x)(1+p^5x)\cdots$$
$$\cdot(1-px)(1-p^3x)(1-p^5x)\cdots\left(1+\frac{p}{x}\right)\left(1+\frac{p^3}{x}\right)\left(1+\frac{p^5}{x}\right)\cdots$$
$$\cdot\left(1-\frac{p}{x}\right)\left(1-\frac{p^3}{x}\right)\left(1-\frac{p^5}{x}\right)\cdots$$

oder

$$(1.)\quad \eta(p^2, -x^2) = \frac{(1-p^4)(1-p^8)(1-p^{12})\cdots}{[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots]^2}\eta(p,x)\eta(p,-x)$$

$$= \frac{(1+p^2)(1+p^4)(1+p^6)\cdots}{(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots}\eta(p,x)\eta(p,-x)$$

$$= \frac{1}{\eta(p^2,-1)}\;\eta(p,x)\eta(p,-x),$$

woraus weiter durch Einsetzen von ix für x folgt:

$$(2.)\quad \eta(p^2, x^2) = \frac{(1+p^2)(1+p^4)(1+p^6)\cdots}{(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots}\eta(p,ix)\eta(p,-ix)$$

$$= \frac{1}{\eta(p^2,-1)}\;\eta(p,ix)\eta(p,-ix).$$

2. Bezeichnet α eine primitive n^{te} Einheitswurzel, n eine *ungerade* Zahl, so ist

$$1 + r^n = (1+r)(1+\alpha r)(1+\alpha^2 r)\cdots(1+\alpha^{n-1}r),$$

und durch Anwendung dieser Formel auf die einzelnen Factoren von $\eta(p^n, x^n)$ folgt leicht:

$$(3.)\qquad \eta(p^n, x^n) = \frac{(1-p^{2n})(1-p^{4n})(1-p^{6n})\cdots}{[(1+p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots]^n}$$

$$\cdot\,\eta(p,x)\eta(p,\alpha x)\eta(p,\alpha^2 x)\cdots\eta(p,\alpha^{n-1}x).$$

3. Ferner ist, wenn der einmal gewählte Werth für $p^{\frac{1}{2}}$ während der ganzen Rechnung beibehalten wird,

$$\eta(p^{\frac{1}{2}},x) = (1-p)(1-p^2)(1-p^3)\cdots(1+p^{\frac{1}{2}}x)(1+p^{\frac{3}{2}}x)(1+p^{\frac{5}{2}}x)\cdots$$

$$\cdot\left(1+\frac{p^{\frac{1}{2}}}{x}\right)\left(1+\frac{p^{\frac{3}{2}}}{x}\right)\left(1+\frac{p^{\frac{5}{2}}}{x}\right)\cdots$$

$$= (1-p)(1-p^2)(1-p^3)\cdots(1+p^{\frac{1}{2}}x)(1+p^{\frac{5}{2}}x)(1+p^{\frac{9}{2}}x)\cdots$$

$$\cdot\,(1+p^{\frac{3}{2}})(1+p^{\frac{7}{2}}x)(1+p^{\frac{11}{2}}x)\cdots$$

$$\cdot\left(1+\frac{p^{\frac{1}{2}}}{x}\right)\left(1+\frac{p^{\frac{5}{2}}}{x}\right)\left(1+\frac{p^{\frac{9}{2}}}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{p^{\frac{3}{2}}}{x}\right)\left(1+\frac{p^{\frac{7}{2}}}{x}\right)\left(1+\frac{p^{\frac{11}{2}}}{x}\right)\cdots$$

$$= (1-p)(1-p^2)(1-p^3)\cdots\left(1+p\frac{x}{p^{\frac{1}{2}}}\right)\left(1+p^3\frac{x}{p^{\frac{1}{2}}}\right)\left(1+p^5\frac{x}{p^{\frac{1}{2}}}\right)\cdots$$

$$\cdot\,(1+pp^{\frac{1}{2}}x)(1+p^3p^{\frac{1}{2}}x)(1+p^5p^{\frac{1}{2}}x)\cdots$$

$$\cdot\left(1+\frac{p}{p^{\frac{1}{2}}x}\right)\left(1+\frac{p^3}{p^{\frac{1}{2}}x}\right)\left(1+\frac{p^5}{p^{\frac{1}{2}}x}\right)\cdots$$

$$\cdot\left(1+\frac{pp^{\frac{1}{2}}}{x}\right)\left(1+\frac{p^3p^{\frac{1}{2}}}{x}\right)\left(1+\frac{p^5p^{\frac{1}{2}}}{x}\right)\cdots$$

$$= \frac{(1-p)(1-p^2)(1-p^3)\cdots}{[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots]^2}\,\eta\left(p, \frac{x}{p^{\frac{1}{2}}}\right)\eta(p, p^{\frac{1}{2}}x)$$

oder, da nach § 50, (14.)

$$\eta(p^{\frac{1}{2}}, p^{\frac{1}{2}}) = 2(1-p)(1-p^2)(1-p^3)\cdots[(1+p)(1+p^2)(1+p^3)\cdots]^2$$

$$= \frac{2[(1-p)(1-p^2)(1-p^3)\cdots]^2[(1+p)(1+p^2)(1+p^3)\cdots]^2}{(1-p)(1-p^2)(1-p^3)\cdots}$$

$$= \frac{2[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots]^2}{(1-p)(1-p^2)(1-p^3)\cdots}$$

ist,

$$\text{(4.)}\qquad \eta(p^{\frac{1}{2}}, x) = \frac{2}{\eta(p^{\frac{1}{2}}, p^{\frac{1}{2}})}\,\eta\left(p, \frac{x}{p^{\frac{1}{2}}}\right)\eta(p, p^{\frac{1}{2}}x).$$

4. Für ungerade n haben wir, wenn wir wieder für $p^{\frac{1}{n}}$ *einen* der n Werthe beliebig wählen und dann durch die ganze Rechnung beibehalten, so dass $p^{\frac{k}{n}} = \left(p^{\frac{1}{n}}\right)^k$ ist, und wenn wir gleich in geeigneter Weise umordnen:

$$\eta\left(p^{\frac{1}{n}}, x\right) = \left(1-p^{\frac{2}{n}}\right)\left(1-p^{\frac{4}{n}}\right)\left(1-p^{\frac{6}{n}}\right)\cdots$$
$$\cdot\left(1+p^{\frac{1}{n}}x\right)\left(1+p^{\frac{2n+1}{n}}x\right)\left(1+p^{\frac{4n+1}{n}}x\right)\cdots$$
$$\cdot\left(1+\frac{p^{\frac{2n-1}{n}}}{x}\right)\left(1+\frac{p^{\frac{4n-1}{n}}}{x}\right)\cdots$$
$$\cdot\left(1+p^{\frac{3}{n}}x\right)\left(1+p^{\frac{2n+3}{n}}x\right)\left(1+p^{\frac{4n+3}{n}}x\right)\cdots$$
$$\cdot\left(1+\frac{p^{\frac{2n-3}{n}}}{x}\right)\left(1+\frac{p^{\frac{4n-3}{n}}}{x}\right)\cdots$$
$$\cdots$$
$$\cdot\left(1+p^{\frac{2n-1}{n}}x\right)\left(1+p^{\frac{4n-1}{n}}x\right)\left(1+p^{\frac{6n-1}{n}}x\right)\cdots$$
$$\cdot\left(1+\frac{p^{\frac{1}{n}}}{x}\right)\left(1+\frac{p^{\frac{2n+1}{n}}}{x}\right)\cdots$$

oder

$$\text{(5.)}\qquad \eta\left(p^{\frac{1}{n}}, x\right)$$
$$= \frac{\left(1-p^{\frac{2}{n}}\right)\left(1-p^{\frac{4}{n}}\right)\left(1-p^{\frac{6}{n}}\right)\cdots}{[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots]^n}\,\eta\left(p, \frac{x}{p^{\frac{n-1}{n}}}\right)\eta\left(p, \frac{x}{p^{\frac{n-3}{n}}}\right)\cdots$$
$$\cdot\,\eta\left(p, \frac{x}{p^{\frac{2}{n}}}\right)\eta(p, x)\,\eta\left(p, p^{\frac{2}{n}}x\right)\eta\left(p, p^{\frac{4}{n}}x\right)\cdots\eta\left(p, p^{\frac{n-1}{n}}x\right).$$

Die vorstehenden Formeln, die durch Combination von (3.), resp. (5.) mit (2.), resp. (4.) sich auf beliebige gerade n ausdehnen lassen, erlauben es uns, *sowohl* $\eta(p^n, x^n)$ *als auch* $\eta\left(p^{\frac{1}{n}}, x\right)$ *durch ein Product von n Grössen* $\eta(p, ax)$ *auszudrücken.* Man bezeichnet diese Umwandlungen als die *Transformation* der Function $\eta(p, x)$.

§ 52.

Das Multiplicationstheorem für $\eta(p, x)$.

1. Wenn auch $\eta(p, x)$ als nichtperiodische Function kein Functionaltheorem im Sinne von § 33 besitzen kann, so lässt sich doch für dasselbe ein complicirteres Theorem ähnlicher Art erweisen.

Es ist

$$\eta(p, x)\eta(p, y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^m p^{m^2} x^m \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^n p^{n^2} y^n$$

oder, wenn wir die Multiplication gliedweise ausführen,

$$\eta(p, x)\eta(p, y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^m \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^n p^{m^2+n^2} x^m y^n$$

und ebenso

$$\eta(p, -x)\eta(p, -y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^m \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^n (-1)^{m+n} p^{m^2+n^2} x^m y^n.$$

Addiren wir die beiden letzten Gleichungen, so heben sich rechts alle Glieder heraus, in denen $m + n$ ungerade ist, während die übrigen doppelt auftreten; wir erhalten also

$$\frac{\eta(p, x)\eta(p, y) + \eta(p, -x)\eta(p, -y)}{2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^m \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^n p^{m^2+n^2} x^m y^n,$$

wo jetzt die Summation über solche Combinationen von m und n auszudehnen ist, für die $m + n$ *gerade* wird. Setzen wir nun

$$m + n = 2r,$$
$$m - n = 2s,$$

also

$$m = r + s, \quad n = r - s, \quad m^2 + n^2 = 2(r^2 + s^2),$$

so erhalten wir offenbar die sämmtlichen geeigneten m und n, wenn wir r und s *alle* ganzzahligen Werthe durchlaufen lassen. Daher haben wir

$$\frac{\eta(p,x)\eta(p,y)+\eta(p,-x)\eta(p,-y)}{2}=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s\, p^{2(r^2+s^2)}x^{r+s}y^{r-s}$$

$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s\, p^{2(r^2+s^2)}(xy)^r\left(\frac{x}{y}\right)^s$$

$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r\, p^{2r^2}(xy)^r\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s\, p^{2s^2}\left(\frac{x}{y}\right)^r$$

$$=\eta(p^2,xy)\eta\left(p^2,\frac{x}{y}\right)$$

oder

$$(1.)\quad \eta(p^2,xy)\eta\left(p^2,\frac{x}{y}\right)=\frac{\eta(p,x)\eta(p,y)+\eta(p,-x)\eta(p,-y)}{2}.$$

Diese Gleichung, aus der wir später eine sehr grosse Anzahl anderer herleiten werden, empfiehlt sich vor den übrigen verwandten durch ihre Einfachheit und Symmetrie als *Normalform* des Multiplicationstheorems für $\eta(p,x)$.

2. Setzen wir in (1.) p^2x statt x, so folgt daraus nach § 50, (7.)

$$(2.)\quad px\eta(p^2,p^2xy)\eta\left(p^2,p^2\frac{x}{y}\right)=\frac{\eta(p,x)\eta(p,y)-\eta(p,-x)\eta(p,-y)}{2}.$$

Substituiren wir ferner in (1.) und (2.) $x=uv$, $y=\frac{u}{v}$, so erhalten wir

$$(3.)\quad \eta(p^2,u^2)\eta(p^2,v^2)=\frac{\eta(p,uv)\eta\left(p,\frac{u}{v}\right)+\eta(p,-uv)\eta\left(p,-\frac{u}{v}\right)}{2}$$

und

$$(4.)\quad puv\eta(p^2,p^2u^2)\eta(p^2,p^2v^2)$$
$$=\frac{\eta(p,uv)\eta\left(p,\frac{u}{v}\right)-\eta(p,-uv)\eta\left(p,-\frac{u}{v}\right)}{2}.$$

Durch Addition und Subtraction von (3.) und (4.) finden wir schliesslich

$$(5.)\quad \eta(p,uv)\eta\left(p,\frac{u}{v}\right)$$
$$=\eta(p^2,u^2)\eta(p^2,v^2)+puv\eta(p^2,p^2u^2)\eta(p^2,p^2v^2)$$

und

(6.) $$\eta(p, -uv)\eta\left(p, -\frac{u}{v}\right)$$
$$= \eta(p^2, u^2)\eta(p^2, v^2) - puv\eta(p^2, p^2u^2)\eta(p^2, p^2v^2).$$

Weitere Umformungen dieser Gleichungen nehmen wir später vor.

§ 53.

Die vier η-Functionen.

1. Ausser der Function $\eta(p, x)$ wollen wir noch vier andere Transcendenten einführen, die sich zur ersteren in einer Hinsicht ähnlich verhalten wie $\sin x$ und $\cos x$ zu e^x, aber doch wieder einen ganz anderen Charakter tragen. Wir setzen*)

(1.) $$\begin{cases} \eta_0(p, x) = \dfrac{\eta(p^{\frac{1}{4}}, ix) + \eta(p^{\frac{1}{4}}, -ix)}{2}, \\[2ex] \eta_1(p, x) = -\dfrac{\eta(p^{\frac{1}{4}}, ix) - \eta(p^{\frac{1}{4}}, -ix)}{2}, \\[2ex] \eta_2(p, x) = \dfrac{\eta(p^{\frac{1}{4}}, x) - \eta(p^{\frac{1}{4}}, -x)}{2}, \\[2ex] \eta_3(p, x) = \dfrac{\eta(p^{\frac{1}{4}}, x) + \eta(p^{\frac{1}{4}}, -x)}{2}. \end{cases}$$

Diese Functionen sind in Bezug auf p zum Theil *vierdeutig*, und wir setzen ein für alle mal fest, dass in ein und derselben Rechnung bei sämmtlichen vorkommenden $\eta_\alpha(p, x)$ für $p^{\frac{1}{4}}$ der gleiche Werth gewählt werden soll; bei den multiplicatorisch periodischen Functionen, die wir aus den $\eta_\alpha(p, x)$ bilden werden, hebt sich die Mehrdeutigkeit heraus.

2. Die Reihenentwicklungen für die eingeführten Functionen lauten, wie aus § 50, (6.) folgt,

---

*) Die Bezeichnungsweise für diese Functionen ist ganz analog zu der für die analogen Thetafunctionen bei *Königsberger*, *„Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen“* gebrauchten gewählt, obwohl sie der hier gegebenen Einführung nicht entspricht.

$$
(2.)\quad \begin{cases}
\eta_0(p,x) = 1 + \sum\limits_1^{\infty} {}^n (-1)^n p^{n^2}\left(x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}\right) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} {}^n (-1)^n p^{n^2} x^{2n}, \\
\eta_1(p,x) = -i \sum\limits_0^{\infty} {}^n (-1)^n p^{\frac{(2n+1)^2}{4}} \left(x^{2n+1} - \frac{1}{x^{2n+1}}\right) \\
\qquad = -i \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} {}^n (-1)^n p^{\frac{(2n+1)^2}{4}} x^{2n+1}, \\
\eta_2(p,x) = \sum\limits_0^{\infty} {}^n p^{\frac{(2n+1)^2}{4}} \left(x^{2n+1} + \frac{1}{x^{2n+1}}\right) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} {}^n p^{\frac{(2n+1)^2}{4}} x^{2n+1}, \\
\eta_3(p,x) = 1 + \sum\limits_1^{\infty} {}^n p^{n^2} \left(x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}\right) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} {}^n p^{n^2} x^{2n}.
\end{cases}
$$

3. Vergleicht man diese Reihen mit § 50, (6.), so erkennt man leicht, dass

$$
(3.)\quad \begin{cases}
\eta_0(p, x) = \eta(p, -x^2), \\
\eta_1(p, x) = -ixp^{\frac{1}{4}}\eta(p, -px^2), \\
\eta_2(p, x) = xp^{\frac{1}{4}}\eta(p, px^2), \\
\eta_3(p, x) = \eta(p, x^2)
\end{cases}
$$

ist, eine Darstellungsform, die für die Folge die wichtigere sein wird. Wir haben mithin die Productentwicklungen

$$
(4.)\quad \begin{cases}
\eta_0(p,x) = \prod\limits_1^{\infty} {}^n (1 - p^{2n}) \prod\limits_0^{\infty} {}^n (1 - p^{2n+1}x^2)\left(1 - \frac{p^{2n+1}}{x^2}\right), \\
\eta_1(p,x) = \frac{ip^{\frac{1}{4}}}{x} \prod\limits_1^{\infty} {}^n (1 - p^{2n})\cdot(1 - x^2) \prod\limits_1^{\infty} {}^n 1 - p^{2n}x^2)\left(1 - \frac{p^{2n}}{x^2}\right), \\
\eta_2(p,x) = \frac{p^{\frac{1}{4}}}{x} \prod\limits_1^{\infty} {}^n (1 - p^{2n})\cdot(1 + x^2) \prod\limits_1^{\infty} {}^n (1 + p^{2n}x^2)\left(1 + \frac{p^{2n}}{x^2}\right), \\
\eta_3(p,x) = \prod\limits_1^{\infty} {}^n (1 - p^{2n}) \prod\limits_0^{\infty} {}^n (1 + p^{2n+1}x^2)\left(1 + \frac{p^{2n+1}}{x^2}\right).
\end{cases}
$$

Wir stellen nun eine Reihe von Formeln zusammen, die sich unmittelbar aus den Definitionen der $\eta_\alpha(p, x)$ und den Eigenschaften von $\eta(p, x)$ ergeben.

4. Aus § 50, (7.) folgt

$$(5.)\quad \begin{cases} \eta_0(p, px) = -\dfrac{1}{px^2}\eta_0(p, x), \\ \eta_1(p, px) = -\dfrac{1}{px^2}\eta_1(p, x), \\ \eta_2(p, px) = \dfrac{1}{px^2}\eta_2(p, x), \\ \eta_3(p, px) = \dfrac{1}{px^2}\eta_3(p, x). \end{cases}$$

5. Indem wir, wenn es nicht nöthig ist den „*Parameter*" p zu markiren, $\eta_\alpha = \eta_\alpha(p, 1)$ setzen, haben wir

$$(6.)\quad \eta_0 = (1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\left[(1-p)(1-p^3)(1-p^5)\cdots\right]^2$$

oder mit Hülfe von § 50, (11.)

$$(7.)\quad \eta_0 = \frac{(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots}{[(1+p)(1+p^2)(1+p^3)\cdots]^2}$$

$$= \frac{(1-p)(1-p^2)(1-p^3)\cdots(1+p)(1+p^2)(1+p^3)\cdots}{[(1+p)(1+p^2)(1+p^3)\cdots]^2}$$

$$= \frac{(1-p)(1-p^2)(1-p^3)\cdots}{(1+p)(1+p^2)(1+p^3)\cdots},$$

$$(8.)\quad \eta_1 = 0,$$

$$(9.)\quad \eta_2 = 2p^{\frac{1}{4}}(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\left[(1+p^2)(1+p^4)(1+p^6)\cdots\right]^2$$

$$= 2p^{\frac{1}{4}}\frac{(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots}{[(1-p^2)(1-p^6)(1-p^{10})\cdots]^2}$$

$$= 2p^{\frac{1}{4}}\frac{(1-p^4)(1-p^8)(1-p^{12})\cdots}{(1-p^2)(1-p^6)(1-p^{10})\cdots},$$

$$(10.)\quad \eta_3 = \eta = (1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\left[(1+p)(1+p^3)(1+p^5)\cdots\right]^2,$$

wozu wir noch beifügen

$$(11.)\quad \eta_0\eta_2\eta_3$$

$$= \frac{2p^{\frac{1}{4}}\left[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\right]^3\left[(1+p^2)(1+p^4)(1+p^6)\cdots\right]^2\left[(1+p)(1+p^3)(1+p^5)\cdots\right]^2}{[(1+p)(1+p^2)(1+p^3)\cdots]^2}$$

$$= 2p^{\frac{1}{4}}[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots]^3.$$

Ferner ist

$$(12.)\quad \begin{cases} \eta_0 = 1 - 2p + 2p^4 - 2p^9 + \cdots, \\ \eta_2 = 2p^{\frac{1}{4}} + 2p^{\frac{9}{4}} + 2p^{\frac{25}{4}} + \cdots, \\ \eta_3 = 1 + 2p + 2p^4 + 2p^9 + \cdots. \end{cases}$$

6. Weiter ist

$$
(13.) \quad \begin{cases}
\eta_0(p, -x) = \eta_0(p, x), \\
\eta_1(p, -x) = -\eta_1(p, x), \\
\eta_2(p, -x) = -\eta_2(p, x), \\
\eta_3(p, -x) = \eta_3(p, x);
\end{cases}
$$

$$
(14.) \quad \begin{cases}
\eta_0(p, ix) = \eta_3(p, x), \\
\eta_1(p, ix) = \eta_2(p, x), \\
\eta_2(p, ix) = -\eta_1(p, x), \\
\eta_3(p, ix) = \eta_0(p, x);
\end{cases}
$$

$$
(15.) \quad \begin{cases}
\eta_0\left(p, p^{\frac{1}{2}}x\right) = \dfrac{i}{p^{\frac{1}{4}}x}\,\eta_1(p, x), \\[2ex]
\eta_1\left(p, p^{\frac{1}{2}}x\right) = \dfrac{i}{p^{\frac{1}{4}}x}\,\eta_0(p, x), \\[2ex]
\eta_2\left(p, p^{\frac{1}{2}}x\right) = \dfrac{1}{p^{\frac{1}{4}}x}\,\eta_3(p, x), \\[2ex]
\eta_3\left(p, p^{\frac{1}{2}}x\right) = \dfrac{1}{p^{\frac{1}{4}}x}\,\eta_2(p, x).
\end{cases}
$$

Ins Besondere ist

$$
(16.) \quad \begin{cases}
\eta_0(p, -1) = \eta_0, & \eta_1(p, -1) = 0, \\
\eta_2(p, -1) = -\eta_2, & \eta_3(p, -1) = \eta_3;
\end{cases}
$$

$$
(17.) \quad \begin{cases}
\eta_0(p, i) = \eta_3 = \eta, & \eta_1(p, i) = \eta_2, \\
\eta_2(p, i) = -\eta_1 = 0, & \eta_3(p, i) = \eta_0;
\end{cases}
$$

$$
(18.) \quad \begin{cases}
\eta_0(p, -i) = \eta_3 = \eta, & \eta_1(p, -i) = -\eta_2, \\
\eta_2(p, -i) = 0, & \eta_3(p, -i) = \eta_0;
\end{cases}
$$

$$
(19.) \quad \begin{cases}
\eta_0\left(p, p^{\frac{1}{2}}\right) = 0, & \eta_1\left(p, p^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{i}{p^{\frac{1}{4}}}\,\eta_0, \\[2ex]
\eta_2\left(p, p^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{p^{\frac{1}{4}}}\,\eta_3, & \eta_3\left(p, p^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{p^{\frac{1}{4}}}\,\eta_2;
\end{cases}
$$

$$
(20.) \quad \begin{cases}
\eta_0\left(p, -p^{\frac{1}{2}}\right) = 0, & \eta_1\left(p, -p^{\frac{1}{2}}\right) = -\dfrac{i}{p^{\frac{1}{4}}}\,\eta_0, \\[2ex]
\eta_2\left(p, -p^{\frac{1}{2}}\right) = -\dfrac{1}{p^{\frac{1}{4}}}\,\eta_3, & \eta_3\left(p, -p^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{p^{\frac{1}{4}}}\,\eta_2.
\end{cases}
$$

Ferner bemerken wir noch

$$(21.)\quad \begin{cases} \eta_0(-p,x) = \eta_3(p,x), & \eta_1(-p,x) = (-1)^{\frac{1}{4}}\eta_1(p,x), \\ \eta_2(-p,x) = (-1)^{\frac{1}{4}}\eta_2(p,x), & \eta_3(-p,x) = \eta_0(p,x), \end{cases}$$

worin allerdings $(-1)^{\frac{1}{4}}$ keine eindeutig bestimmte Grösse ist, wie dies der Vierdeutigkeit von $\eta_1(p,x)$ und $\eta_2(p,x)$ in Bezug auf p entspricht.

§ 54.

Die Multiplicationstheoreme der vier η-Functionen.

1. Aus den Formeln von §§ 51 und 52 erhalten wir eine grosse Anzahl von Multiplicationstheoremen für die vier η-Functionen; zur Abkürzung bezeichnen wir in der Folge

$$\eta_\alpha \eta_\beta \eta_\gamma(p, xy)\eta_\delta\left(p, \frac{x}{y}\right) \quad \text{mit} \quad [\alpha\beta\gamma\delta]$$

und

$$\eta_\alpha(p,x)\eta_\beta(p,x)\eta_\gamma(p,y)\eta_\delta(p,y) \quad \text{mit} \quad (\alpha\beta\gamma\delta).$$

Zunächst folgt aus § 52, (1.)

$$\eta(p,xy)\eta\left(p,\frac{x}{y}\right) = \frac{\eta(p^{\frac{1}{2}},x)\eta(p^{\frac{1}{2}},y) + \eta(p^{\frac{1}{2}},-x)\eta(p^{\frac{1}{2}},-y)}{2}$$

oder mit Hülfe von § 51, (4.)

$$\eta(p,xy)\eta\left(p,\frac{x}{y}\right) = \frac{2}{\eta^2(p^{\frac{1}{2}},p^{\frac{1}{2}})}\Big[\eta\left(p,\frac{x}{p^{\frac{1}{2}}}\right)\eta(p,p^{\frac{1}{2}}x)\eta\left(p,\frac{y}{p^{\frac{1}{2}}}\right)\eta(p,p^{\frac{1}{2}}y)$$
$$+\eta\left(p,-\frac{x}{p^{\frac{1}{2}}}\right)\eta(p,-p^{\frac{1}{2}}x)\eta\left(p,-\frac{y}{p^{\frac{1}{2}}}\right)\eta(p,-p^{\frac{1}{2}}y)\Big]$$

oder, wenn wir $p^{\frac{1}{2}}x^2$ statt x, $p^{\frac{1}{2}}y^2$ statt y setzen,

$$\eta(p,px^2y^2)\eta\left(p,\frac{x^2}{y^2}\right) = \frac{2}{\eta(p^{\frac{1}{2}},p^{\frac{1}{2}})}\Big[\eta(p,x^2)\eta(p,px^2)\eta(p,y^2)\eta(p,py^2)$$
$$+\eta(p,-x^2)\eta(p,-px^2)\eta(p,-y^2)\eta(p,-py^2)\Big]$$

und schliesslich, wenn wir beachten, dass

$$(1.)\quad \eta_2\eta_3 = 2p^{\frac{1}{4}}\left[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\right]^2$$
$$\cdot\left[(1+p^2)(1+p^4)(1+p^6)\cdots\right]^2\left[(1+p)(1+p^3)(1+p^5)\cdots\right]^2$$
$$= 2p^{\frac{1}{4}}\left[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\right]^2\left[(1+p)(1+p^2)(1+p^3)\cdots\right]^2$$

$$=2p^{\frac{1}{4}}\Big[(1-p)(1-p^2)(1-p^3)\cdots\Big]^2\Big[(1+p)(1+p^2)(1+p^3)\cdots\Big]^4$$
$$=\frac{p^{\frac{1}{4}}\eta^2(p^{\frac{1}{2}},p^{\frac{1}{2}})}{2}$$

ist,

$$[2323]=(2323)-(0101).$$

Setzen wir ix statt x, dann $p^{\frac{1}{2}}x$ statt x, endlich $ip^{\frac{1}{2}}x$ statt x, so erhalten wir hieraus

$$[2310]=(0123)+(2301)$$
$$[2332]=(2323)+(0101)$$
$$[2301]=(0123)-(2301).$$

Setzen wir ferner $-p$ statt p, so folgt aus § 53, (21.)

$$[2020]=(2020)-(3131)$$
$$[2013]=(3120)+(2031)$$
$$[2002]=(2020)+(3131)$$
$$[2031]=(3120)-(2031).$$

2. Durch Multiplication von (1.) und (2.) in § 52 mit einander erhalten wir

$$4px\eta(p^2,xy)\eta(p^2,p^2xy)\eta\Big(p^2,\frac{x}{y}\Big)\eta\Big(p^2,p^2\frac{x}{y}\Big)$$
$$=\eta^2(p,x)\eta^2(p,y)-\eta^2(p,-x)\eta^2(p,-y)$$

oder, wenn $\frac{x}{p}$ an Stelle von x gesetzt wird,

$$4x\eta\Big(p^2,\frac{xy}{p}\Big)\eta(p^2,pxy)\eta\Big(p^2,\frac{x}{py}\Big)\eta\Big(p^2,\frac{px}{y}\Big)$$
$$=\eta^2\Big(p,\frac{x}{p}\Big)\eta^2(p,y)-\eta^2\Big(p,-\frac{x}{y}\Big)\eta^2(p,-y)$$

oder nach § 51, (4.), wenn vorher x^2 statt x, y^2 statt y gesetzt wird,

$$x^2\eta^2(p,p)\eta(p,x^2y^2)\eta\Big(p,\frac{x^2}{y^2}\Big)$$
$$=\eta^2\Big(p,\frac{x^2}{p}\Big)\eta^2(p,y^2)-\eta^2\Big(p,-\frac{x^2}{p}\Big)\eta^2(p,-y^2)$$

und schliesslich nach einfacher Umformung der rechten Seite

$$[2233]=(2233)+(1100).$$

Ersetzen wir der Reihe nach x durch ix, $p^{\frac{1}{2}}x$, $ip^{\frac{1}{2}}x$, so folgt weiter

$$[2200] = (1133) + (2200)$$
$$[2222] = (3333) - (0000)$$
$$[2211] = (0033) - (3300).$$

Vertauschen wir in den beiden ersten Gleichungen x und y, so erhalten wir

$$[2233] = (3322) + (0011)$$
$$[2200] = (3311) + (0022),$$

und durch Einsetzen von $p^{\frac{1}{2}}y$, resp. $ip^{\frac{1}{2}}y$ statt y in der ersten Gleichung und nachfolgende Vertauschung von x und y

$$[2222] = (2222) - (1111)$$
$$[2211] = (1122) - (2211).$$

Durch Ersetzung von p durch $-p$ folgt hieraus nichts Neues.

3. Eine dritte Serie von Gleichungen geht aus der Formel (5.) in § 52 hervor, die wir unter Änderung der Bezeichnung nach § 51, (2.) in

$$\eta^2(p^2, -1)\eta(p, xy)\eta\left(p, \frac{x}{y}\right)$$
$$= \eta(p, ix)\eta(p, -ix)\eta(p, iy)\eta(p, -iy)$$
$$+ pxy\eta(p, ipx)\eta(p, -ipx)\eta(p, ipy)\eta(p, -ipy)$$

transformiren. Hierin setzen wir ix^2 und iy^2 statt x und y und gelangen durch die Bemerkung, dass

$$(2.) \qquad \eta_0\eta_3 = \left[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\right]^2$$
$$\cdot\left[(1-p^2)(1-p^6)(1-p^{10})\cdots\right]^2$$
$$= \left[(1-p^4)(1-p^8)(1-p^{12})\cdots\right]^2$$
$$\cdot\left[(1-p^2)(1-p^6)(1-p^{10})\cdots\right]^4$$
$$= \eta^2(p^2, -1)$$

ist, zu der Formel

$$[0303] = (0303) + (1212),$$

aus der durch Ersetzen von x durch ix, $p^{\frac{1}{2}}x$, $ip^{\frac{1}{2}}x$ die weiteren

$$[0330] = (0303) - (1212)$$
$$[0312] = (1203) + (0312)$$
$$[0321] = (1203) - (0312)$$

folgen.

4. Eine vierte und letzte Serie von Formeln erhalten wir durch Multiplication von (5.) und (6.) in § 52, wobei wir die Gleichung

$$\eta(p, xy)\eta(p, -xy)\eta\left(p, \frac{x}{y}\right)\eta\left(p, -\frac{x}{y}\right)$$
$$= \eta^2(p^2, x^2)\eta^2(p^2, y^2) - p^2x^2y^2\eta^2(p^2, p^2x^2)\eta^2(p^2, p^2y^2),$$

oder

$$\eta^2(p^2, -1)\eta(p^2, -x^2y^2)\eta\left(p^2, -\frac{x^2}{y^2}\right)$$
$$= \eta^2(p^2, x^2)\eta^2(p^2, y^2) - p^2x^2y^2\eta^2(p^2, p^2x^2)\eta^2(p^2, p^2y^2)$$

finden, aus der durch Einsetzen von p für p^2 folgt

$$[0000] = (3333) - (2222).$$

Hierin ersetzen wir x durch ix, $p^{\frac{1}{2}}x$, $ip^{\frac{1}{2}}x$ und finden

$$[0033] = (0033) - (1122)$$
$$[0011] = (3322) - (2233)$$
$$[0022] = (0022) - (1133);$$

ferner erhalten wir durch Vertauschung von x und y in der zweiten und vierten Gleichung

$$[0033] = (3300) - (2211)$$
$$[0022] = (2200) - (3311),$$

und durch Einsetzen von iy statt y in denselben Gleichungen:

$$[0000] = (0000) - (1111)$$
$$[0011] = (1100) - (0011).$$

Hieran reihen sich noch acht Formeln an, die durch Ersetzen von p durch $-p$ aus den acht letzten hervorgehen:

$$[3333] = (0000) + (2222)$$
$$[3300] = (3300) + (1122)$$
$$[3311] = (0022) - (2200)$$
$$[3322] = (3322) - (1100)$$
$$[3300] = (0033) + (2211)$$
$$[3322] = (2233) - (0011)$$
$$[3333] = (3333) + (1111)$$
$$[3311] = (1133) - (3311).$$

5. Setzen wir $x = y = 1$, so erhalten wir aus sämmt-

lichen Formeln wegen des Verschwindens von η_1 nur ein einziges Resultat, nämlich (z. B. aus [3333] = (0000) + (2222))

$$\eta_3^4 = \eta_0^4 + \eta_2^4 \tag{3.}$$

oder

$$\left(\frac{\eta_0}{\eta_3}\right)^4 + \left(\frac{\eta_2}{\eta_3}\right)^4 = 1. \tag{4.}$$

Wir setzen in der Folge

$$\left(\frac{\eta_2}{\eta_3}\right)^2 = \varkappa, \quad \left(\frac{\eta_0}{\eta_3}\right)^2 = \varkappa_1 \tag{5.}$$

und bezeichnen $\varkappa$ als *Modul*, $\varkappa_1$ als *complementären Modul*; aus (4.) wird dann

$$\varkappa^2 + \varkappa_1^2 = 1. \tag{6.}$$

6. Nehmen wir nur $y = 1$, so erhalten wir vier Gleichungen; z. B. aus

[2200] = (1133) + (2200),
[3300] = (3300) + (1122),
[0000] = (3333) — (2222),
[0011] = (3322) — (2233)

folgen die Relationen

$$\left\{\begin{aligned} \eta_2^2\eta_0^2(p,x) &= \eta_3^2\eta_1^2(p,x) + \eta_0^2\eta_2^2(p,x), \\ \eta_3^2\eta_0^2(p,x) &= \eta_0^2\eta_3^2(p,x) + \eta_2^2\eta_1^2(p,x), \\ \eta_0^2\eta_0^2(p,x) &= \eta_3^2\eta_3^2(p,x) - \eta_2^2\eta_2^2(p,x), \\ \eta_0^2\eta_1^2(p,x) &= \eta_2^2\eta_3^2(p,x) - \eta_3^2\eta_2^2(p,x), \end{aligned}\right. \tag{7.}$$

deren beide letzten nur Transformationen der beiden ersten sind, die wir in die Form

$$\frac{\eta_1^2(p,x)}{\eta_0^2(p,x)} + \varkappa_1^2\frac{\eta_2^2(p,x)}{\eta_0^2(p,x)} = \varkappa^2 \tag{8.}$$

und

$$\varkappa^2\frac{\eta_1^2(p,x)}{\eta_0^2(p,x)} + \varkappa_1^2\frac{\eta_3^2(p,x)}{\eta_0^2(p,x)} = 1 \tag{9.}$$

bringen.

§ 55.

Die Transformation der vier η-Functionen.

1. Nach Aufstellung der Multiplicationstheoreme der vier η-Functionen ist es ein Leichtes, auch die Transformations-

formeln von § 51 auf letztere zu übertragen. Wir haben

(1.) $$\eta_0(p^2, x^2) = \eta(p^2, -x^4) = \frac{1}{\eta(p^2, -1)}\eta(p, x^2)\eta(p, -x^2)$$
$$= \frac{1}{\eta_0(p^2, 1)}\eta_0(p, x)\eta_3(p, x) = \frac{\eta_0(p^2, 1)}{\eta_0\eta_3}\eta_0(p, x)\eta_3(p, x);^{*)}$$

(2.) $$\eta_1(p^2, x^2) = \frac{1}{\eta_0(p^2, 1)}\eta_1(p, x)\eta_2(p, x)$$
$$= \frac{\eta_0(p^2, 1)}{\eta_0\eta_3}\eta_1(p, x)\eta_2(p, x),$$
$$\eta_2(p^2, x^2) = p^{\frac{1}{2}}x^2\eta(p^2, p^2x^4)$$
$$= \frac{p^{\frac{1}{2}}x^2}{\eta(p^2, -1)}\eta(p, ipx^2)\eta(p, -ipx^2)$$
$$= \frac{1}{\eta_0(p^2, 1)}\eta_2(p, \alpha x)\eta_2\left(p\frac{x}{\alpha}\right),$$

wenn $\alpha = e^{\frac{\pi i}{4}}$, also $\alpha^2 = i$ ist; diese Gleichung geht nach der Formel [2222] = (3333) — (0000) unter Berücksichtigung, dass

(3.) $$\eta_3(p, \alpha) = \eta(p, i) \text{ und } \eta_0(p, \alpha) = \eta(p, -i)$$
$$= \eta\left(p, \frac{1}{i}\right) = \eta(p, i)$$

und weiter

(4.) $$\eta(p, i) = (1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots$$
$$\cdot(1+pi)(1+p^3i)\cdots(1-pi)(1-p^3i)\cdots$$
$$= (1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots(1+p^2)(1+p^6)(1+p^{10})\cdots$$
$$= (1-p^4)(1-p^8)(1-p^{12})\cdots(1-p^2)(1-p^6)(1-p^{10})\cdots$$
$$\cdot(1+p^2)(1+p^6)(1+p^{10})\cdots$$
$$= (1-p^4)(1-p^8)(1-p^{12})\cdots(1-p^4)(1-p^{12})(1-p^{20})\cdots$$
$$= (1-p^8)(1-p^{16})(1-p^{24})\cdots\left[(1-p^4)(1-p^{12})(1-p^{20})\cdots\right]^2$$
$$= \eta(p^4, -1),$$

also nach § 54, (2.)

(5.) $$\eta^2(p, i) = \eta_0(p^2, 1)\eta_3(p^2, 1)$$

ist, in

---

*) Es ist nämlich $\eta_0(p^2, 1) = \eta(p^2, -1)$ und nach § 54, (2.) $\eta_0{}^2(p^2, 1) = \eta_0\eta_3$, also $\frac{1}{\eta(p^2, -1)} = \frac{1}{\eta_0(p^2, 1)} = \frac{\eta_0(p^2, 1)}{\eta_0\eta_3}$.

$$(6.)\qquad \eta_2(p^2, x^2) = \frac{\eta_3(p^2, 1)}{\eta_2{}^2}\left[\eta_3{}^2(p, x) - \eta_0{}^2(p, x)\right]$$

über. Ferner ist

$$\eta_3(p^2, x^2) = \eta(p^2, x^4) = \frac{1}{\eta(p^2, -1)}\eta(p, ix^2)\eta(p, -ix^2)$$
$$= \frac{1}{\eta_0(p^2, 1)}\eta_3(p, \alpha x)\eta_3\left(p, \frac{x}{\alpha}\right)$$

oder mit Hülfe von

$$[2233] = (2233) + (1100):$$

$$(7.)\qquad \eta_3(p^2, x^2) = \frac{\eta_3(p^2, 1)}{\eta_2{}^2}\left[\eta_2{}^2(p, x) + \eta_1{}^2(p, x)\right].$$

2. Für ungerade n ist weiter, wenn jetzt wieder α eine primitive n^{te} Einheitswurzel bedeutet,

$$\eta_0(p^n, x^n) = \eta(p^n, -x^{2n})$$
$$= \frac{(1-p^{2n})(1-p^{4n})(1-p^{6n})\cdots}{\left[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\right]^n}$$
$$\cdot\,\eta(p, -x^2)\eta(p, -\alpha x^2)\eta(p, -\alpha^2 x^2)\cdots\eta(p, -\alpha^{n-1}x^2)$$

oder, da $\alpha = \alpha^{n+1}$, $\alpha^3 = \alpha^{n+3}$ u. s. w. ist,

$$(8.)\qquad \eta_0(p^n, x^n) = \frac{(1-p^{2n})(1-p^{4n})(1-p^{6n})\cdots}{\left[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\right]^n}$$
$$\cdot\,\eta(p, -x^2)\eta(p, -\alpha^2 x^2)\eta(p, -\alpha^4 x^2)\cdots\eta(p, -\alpha^{2n-2}x^2)$$
$$= \frac{(1-p^{2n})(1-p^{4n})(1-p^{6n})\cdots}{\left[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\right]^n}$$
$$\cdot\,\eta_0(p, x)\eta_0(p, \alpha x)\eta_0(p, \alpha^2 x)\cdots\eta_0(p, \alpha^{n-1}x)$$
$$= \frac{(1-p^{2n})(1-p^{4n})(1-p^{6n})\cdots}{\left[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\right]^n}$$
$$\cdot\,\eta_0(p, x)\eta_0(p, \alpha x)\eta_0\left(p, \frac{x}{\alpha}\right)\eta_0(p, \alpha^2 x)\eta_0\left(p, \frac{x}{\alpha^2}\right)\cdots$$
$$\cdot\,\eta_0\left(p, \alpha^{\frac{n-1}{2}}\right)\eta_0\left(p, \frac{x}{\alpha^{\frac{n-1}{2}}}\right),$$

oder nach Anwendung von

$$[0000] = (0000) - (1111)$$

auf je zwei Factoren:

$$(9.)\quad \eta_0(p^n, x^n) = \frac{(1-p^{2n})(1-p^{4n})(1-p^{6n})\cdots}{\left[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\right]^n}\cdot\frac{1}{\eta_0^{\,n-1}}$$

$$\cdot\,\eta_0(p,x)\left[\eta_0^2(p,x)\eta_0^2(p,\alpha)-\eta_1^2(p,x)\eta_1^2(p,\alpha)\right]$$

$$\cdot\left[\eta_0^2(p,x)\eta_0^2(p,\alpha^2)-\eta_1^2(p,x)\eta_1^2(p,\alpha^2)\right]$$

$$\cdots\left[\eta_0^2(p,x)\eta_0^2\left(p,\alpha^{\frac{n-1}{2}}\right)-\eta_1^2(p,x)\eta_1^2\left(p,\alpha^{\frac{n-1}{2}}\right)\right].$$

Ohne Schwierigkeit erhält man hieraus, wenn man x durch $p^{\frac{1}{2}}x$, $ip^{\frac{1}{2}}x$, ix ersetzt,

$$(10.)\quad \eta_1(p^n, x^n) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{(1-p^{2n})(1-p^{4n})(1-p^{6n})\cdots}{\left[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\right]^n}$$

$$\cdot\,\eta_1(p,x)\eta_1(p,\alpha x)\eta_1(p,\alpha^2 x)\cdots\eta_1(p,\alpha^{n-1}x)$$

$$= \frac{(1-p^{2n})(1-p^{4n})(1-p^{6n})\cdots}{\left[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\right]^n}\cdot\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\eta_0^{\,n-1}}$$

$$\cdot\,\eta_1(p,x)\left[\eta_1^2(p,x)\eta_0^2(p,\alpha)-\eta_0^2(p,x)\eta_1^2(p,\alpha)\right]$$

$$\cdot\left[\eta_1^2(p,x)\eta_0^2(p,\alpha^2)-\eta_0^2(p,x)\eta_1^2(p,\alpha^2)\right]$$

$$\cdots\left[\eta_1^2(p,x)\eta_0^2\left(p,\alpha^{\frac{n-1}{2}}\right)-\eta_0^2(p,x)\eta_1^2\left(p,\alpha^{\frac{n-1}{2}}\right)\right],$$

$$(11.)\quad \eta_2(p^n, x^n) = \frac{(1-p^{2n})(1-p^{4n})(1-p^{6n})\cdots}{\left[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\right]^n}$$

$$\cdot\,\eta_2(p,x)\eta_2(p,\alpha x)\eta_2(p,\alpha^2 x)\cdots\eta_2(p,\alpha^{n-1}x)$$

$$= \frac{(1-p^{2n})(1-p^{4n})(1-p^{6n})\cdots}{\left[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\right]^n}\cdot\frac{1}{\eta_0^{\,n-1}}$$

$$\cdot\,\eta_2(p,x)\left[\eta_2^2(p,x)\eta_0^2(p,\alpha)-\eta_3^2(p,x)\eta_1^2(p,\alpha)\right]$$

$$\cdot\left[\eta_2^2(p,x)\eta_0^2(p,\alpha^2)-\eta_3^2(p,x)\eta_1^2(p,\alpha^2)\right]$$

$$\cdots\left[\eta_2^2(p,x)\eta_0^2\left(p,\alpha^{\frac{n-1}{2}}\right)-\eta_3^2(p,x)\eta_1^2\left(p,\alpha^{\frac{n-1}{2}}\right)\right],$$

$$(12.)\quad \eta_3(p^n, x^n) = \frac{(1-p^{2n})(1-p^{4n})(1-p^{6n})\cdots}{\left[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\right]^n}$$

$$\cdot\,\eta_3(p,x)\eta_3(p,\alpha x)\eta_3(p,\alpha^2 x)\cdots\eta_3(p,\alpha^{n-1}x)$$

$$= \frac{(1-p^{2n})(1-p^{4n})(1-p^{6n})\cdots}{\left[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\right]^n}\cdot\frac{1}{\eta_0^{\,n-1}}$$

$$\cdot\,\eta_3(p,x)\left[\eta_3^2(p,x)\eta_0^2(p,\alpha)-\eta_2^2(p,x)\eta_1^2(p,\alpha)\right]$$

$$\cdot\left[\eta_3^2(p,x)\eta_0^2(p,\alpha^2)-\eta_2^2(p,x)\eta_1^2(p,\alpha^2)\right]$$

$$\cdots\left[\eta_3^2(p,x)\eta_0^2\left(p,\alpha^{\frac{n-1}{2}}\right)-\eta_2^2(p,x)\eta_1^2\left(p,\alpha^{\frac{n-1}{2}}\right)\right].$$

3. Es ist weiter

$$\eta_0(p^{\frac{1}{2}},x)=\eta(p^{\frac{1}{2}},-x^2)=\frac{2}{\eta(p^{\frac{1}{2}},p^{\frac{1}{2}})}\,\eta\left(p,-\frac{x^2}{p^{\frac{1}{2}}}\right)\eta(p,-p^{\frac{1}{2}}x^2)$$

$$=\frac{2}{p(p^{\frac{1}{2}},p^{\frac{1}{2}})}\,\eta_0\left(p,\frac{x}{p^{\frac{1}{4}}}\right)\eta_0(p,p^{\frac{1}{4}}x),$$

oder mit Hülfe von

$$[0000]=(3333)-(2222)$$

und unter Berücksichtigung, dass

$$\eta_2\left(p,p^{\frac{1}{4}}\right)=\eta_3\left(p,p^{\frac{1}{4}}\right) \tag{13.}$$

ist,

$$\eta_0\left(p^{\frac{1}{2}},x\right)=\frac{2\eta_2^2\left(p,p^{\frac{1}{4}}\right)}{\eta\left(p^{\frac{1}{2}},p^{\frac{1}{2}}\right)\eta_0^2}\left[\eta_3^2(p,x)-\eta_2^2(p,x)\right]$$

oder, da

$$\frac{2\eta_2^2\left(p,p^{\frac{1}{4}}\right)}{\eta\left(p^{\frac{1}{2}},p^{\frac{1}{2}}\right)} \tag{14.}$$

$$=\frac{\left[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\right]^2\left[\left(1+p^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+p^{\frac{3}{2}}\right)\left(1+p^{\frac{5}{2}}\right)\cdots\right]^2}{(1-p)(1-p^2)(1-p^3)\cdots\quad\left[(1+p)(1+p^2)(1+p^3)\cdots\right]^2}$$

$$=\frac{\left[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\right]^2\left[\left(1+p^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+p^{\frac{3}{2}}\right)\left(1+p^{\frac{5}{2}}\right)\cdots\right]^2(1-p)(1-p^2)(1-p^3)\cdots}{\left[(1-p)(1-p^2)(1-p^3)\cdots\right]^2\left[(1+p)(1+p^2)(1+p^3)\cdots\right]^2}$$

$$=(1-p)(1-p^2)(1-p^3)\cdots\left[\left(1+p^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+p^{\frac{3}{2}}\right)\left(1+p^{\frac{5}{2}}\right)\cdots\right]^2$$

$$=\eta_3\left(p^{\frac{1}{2}},1\right)$$

ist,

$$\eta_0\left(p^{\frac{1}{2}},x\right)=\frac{\eta_3\left(p^{\frac{1}{2}},1\right)}{\eta_0^2}\left[\eta_3^2(p,x)-\eta_2^2(p,x)\right]; \tag{15.}$$

ferner ist (die Umformung der Constanten bei (16.) und (17.)

kann direct oder einfacher durch Einsetzen von $x = 1$ in (17.) verificirt werden)

(16.) $$\eta_1\left(p^{\frac{1}{2}}, x\right) = -\, i x p^{\frac{1}{8}} \eta\left(p^{\frac{1}{2}}, -p^{\frac{1}{2}} x^2\right)$$

$$= \frac{-2 i x p^{\frac{1}{8}}}{\eta\left(p^{\frac{1}{2}}, p^{\frac{1}{2}}\right)} \eta(p, -x^2)\eta(p, -px^2) = \frac{2}{p^{\frac{1}{8}}\eta\left(p^{\frac{1}{2}}, p^{\frac{1}{2}}\right)} \eta_0(p, x)\eta_1(p, x)$$

$$= \frac{\eta_2\left(p^{\frac{1}{2}}, 1\right)}{\eta_2\, \eta_3} \eta_0(p, x)\eta_1(p, x),$$

(17.) $$\eta_2\left(p^{\frac{1}{2}}, x\right) = p^{\frac{1}{8}} x\, \eta\left(p^{\frac{1}{2}}, p^{\frac{1}{2}} x^2\right) = \frac{2 p^{\frac{1}{8}} x}{\eta\left(p^{\frac{1}{2}}, p^{\frac{1}{2}}\right)} \eta(p, x^2)\eta(p, px^2)$$

$$= \frac{2}{p^{\frac{1}{8}}\eta\left(p^{\frac{1}{2}}, p^{\frac{1}{2}}\right)} \eta_2(p, x)\eta_3(p, x) = \frac{\eta_2\left(p^{\frac{1}{2}}, 1\right)}{\eta_2\, \eta_3} \eta_2(p, x)\eta_3(p, x);$$

aus (15.) folgt durch Einsetzen von ix an Stelle von x

(18.) $$\eta_3\left(p^{\frac{1}{2}}, x\right) = \frac{\eta_3\left(p^{\frac{1}{2}}, 1\right)}{\eta_0^{\,2}} \left[\eta_0^{\,2}(p, x) - \eta_1^{\,2}(p, x)\right].$$

4. Für ungerade n ist

(19.) $$\eta_0\left(p^{\frac{1}{n}}, x\right) = \eta\left(p^{\frac{1}{n}}, -x^2\right)$$

$$= \frac{\left(1 - p^{\frac{2}{n}}\right)\left(1 - p^{\frac{4}{n}}\right)\left(1 - p^{\frac{6}{n}}\right)\cdots}{\left[(1 - p^2)(1 - p^4)(1 - p^6)\cdots\right]^n} \eta_0\left(p, \frac{x}{p^{\frac{n-1}{2n}}}\right)\eta_0\left(p, \frac{x}{p^{\frac{n-3}{2n}}}\right)\cdots$$

$$\eta_0\left(p, \frac{x}{p^{\frac{1}{n}}}\right) \eta_0(p, x)\, \eta_0\left(p, p^{\frac{1}{n}} x\right)\eta_0\left(p, p^{\frac{2}{n}} x\right) \cdots \eta_0\left(p, p^{\frac{n-1}{2n}} x\right),$$

oder mit Hülfe von

$$[0000] = (0000) - (1111)$$

(20.) $$\eta_0\left(p^{\frac{1}{n}}, x\right) = \frac{\left(1 - p^{\frac{2}{n}}\right)\left(1 - p^{\frac{4}{n}}\right)\left(1 - p^{\frac{6}{n}}\right)\cdots}{\left[(1 - p^2)(1 - p^4)(1 - p^6)\cdots\right]^n} \cdot \frac{1}{\eta_0^{\,n-1}}$$

$$\cdot\, \eta_0(p, x)\left[\eta_0^{\,2}(p, x)\eta_0^{\,2}\left(p, p^{\frac{1}{n}}\right) - \eta_1^{\,2}(p, x)\eta_1^{\,2}\left(p, p^{\frac{1}{n}}\right)\right]$$

$$\cdot \left[\eta_0^{\,2}(p, x)\eta_0^{\,2}\left(p, p^{\frac{2}{n}}\right) - \eta_1^{\,2}(p, x)\eta_1^{\,2}\left(p, p^{\frac{2}{n}}\right)\right]$$

$$\cdots \left[\eta_0^{\,2}(p, x)\eta_0^{\,2}\left(p, p^{\frac{n-1}{2n}}\right) - \eta_1^{\,2}(p, x)\eta_1^{\,2}\left(p, p^{\frac{n-1}{2n}}\right)\right],$$

und hieraus ähnlich wie unter (2.)

$$(21.)\quad \eta_1\left(p^{\frac{1}{n}}, x\right) = \frac{\left(1-p^{\frac{2}{n}}\right)\left(1-p^{\frac{4}{n}}\right)\left(1-p^{\frac{6}{n}}\right)\cdots}{\left[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\right]^n}$$

$$\eta_1\left(p, \frac{x}{p^{\frac{n-1}{2n}}}\right)\eta_1\left(p, \frac{x}{p^{\frac{n-3}{2n}}}\right)\cdots\eta_1\left(p, \frac{x}{p^{\frac{1}{n}}}\right)\eta_1(p, x)$$

$$\cdot\,\eta_1\left(p, p^{\frac{1}{n}}x\right)\eta_1\left(p, p^{\frac{2}{n}}x\right)\cdots\eta_1\left(p, p^{\frac{n-1}{2n}}x\right)$$

$$= \frac{\left(1-p^{\frac{2}{n}}\right)\left(1-p^{\frac{4}{n}}\right)\left(1-p^{\frac{6}{n}}\right)\cdots}{\left[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\right]^n}\cdot\frac{1}{\eta_0^{\,n-1}}$$

$$\cdot\,\eta_1(p, x)\left[\eta_1^2(p, x)\eta_0^2\left(p, p^{\frac{1}{n}}\right) - \eta_0^2(p, x)\eta_1^2\left(p, p^{\frac{1}{n}}\right)\right]$$

$$\cdot\left[\eta_1^2(p, x)\eta_0^2\left(p, p^{\frac{2}{n}}\right) - \eta_0^2(p, x)\eta_1^2\left(p, p^{\frac{2}{n}}\right)\right]$$

$$\cdots\left[\eta_1^2(p, x)\eta_0^2\left(p, p^{\frac{n-1}{2n}}\right) - \eta_0^2(p, x)\eta_1^2\left(p, p^{\frac{n-1}{2n}}\right)\right],$$

$$(22.)\quad \eta_2\left(p^{\frac{1}{n}}, x\right) = \frac{\left(1-p^{\frac{2}{n}}\right)\left(1-p^{\frac{4}{n}}\right)\left(1-p^{\frac{6}{n}}\right)\cdots}{\left[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\right]^n}$$

$$\cdot\,\eta_2\left(p, \frac{x}{p^{\frac{n-1}{2n}}}\right)\eta_2\left(p, \frac{x}{p^{\frac{n-3}{2n}}}\right)\cdots\eta_2\left(p, \frac{x}{p^{\frac{1}{n}}}\right)\eta_2(p, x)$$

$$\cdot\,\eta_2\left(p, p^{\frac{1}{n}}x\right)\eta_2\left(p, p^{\frac{2}{n}}x\right)\cdots\eta_2\left(p, p^{\frac{n-1}{2n}}x\right)$$

$$= \frac{\left(1-p^{\frac{2}{n}}\right)\left(1-p^{\frac{4}{n}}\right)\left(1-p^{\frac{6}{n}}\right)\cdots}{\left[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\right]^n}\cdot\frac{1}{\eta_0^{\,n-1}}$$

$$\cdot\,\eta_2(p, x)\left[\eta_2^2(p, x)\eta_0^2\left(p, p^{\frac{1}{n}}\right) - \eta_3^2(p, x)\eta_1^2\left(p, p^{\frac{1}{n}}\right)\right]$$

$$\cdot\left[\eta_2^2(p, x)\eta_0^2\left(p, p^{\frac{2}{n}}\right) - \eta_3^2(p, x)\eta_1^2\left(p, p^{\frac{2}{n}}\right)\right]$$

$$\cdots\left[\eta_2^2(p, x)\eta_0^2\left(p, p^{\frac{n-1}{2n}}\right) - \eta_3^2(p, x)\eta_1^2\left(p, p^{\frac{n-1}{2n}}\right)\right],$$

$$(23.)\quad \eta_3\left(p^{\frac{1}{n}}, x\right) = \frac{\left(1-p^{\frac{2}{n}}\right)\left(1-p^{\frac{4}{n}}\right)\left(1-p^{\frac{6}{n}}\right)\cdots}{\left[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\right]^n}$$

$$\cdot\,\eta_3\left(p, \frac{x}{p^{\frac{n-1}{2n}}}\right)\eta_3\left(p, \frac{x}{p^{\frac{n-3}{2n}}}\right)\cdots\eta_3\left(p, \frac{x}{p^{\frac{1}{n}}}\right)\eta_3(p,x)$$

$$\cdot\,\eta_3\left(p, p^{\frac{1}{n}}x\right)\eta_3\left(p, p^{\frac{2}{n}}x\right)\cdots\eta_3\left(p, p^{\frac{n-1}{2n}}x\right)$$

$$= \frac{\left(1-p^{\frac{2}{n}}\right)\left(1-p^{\frac{4}{n}}\right)\left(1-p^{\frac{6}{n}}\right)\cdots}{\left[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\right]^n}\cdot\frac{1}{\eta_0^{\,n-1}}$$

$$\cdot\,\eta_3(p,x)\left[\eta_3^2(p,x)\eta_0^2\left(p,p^{\frac{1}{n}}\right)-\eta_2^2(p,x)\eta_1^2\left(p,p^{\frac{1}{n}}\right)\right]$$

$$\cdot\left[\eta_3^2(p,x)\eta_0^2\left(p,p^{\frac{2}{n}}\right)-\eta_2^2(p,x)\eta_1^2\left(p,p^{\frac{2}{n}}\right)\right]$$

$$\cdots\left[\eta_3^2(p,x)\eta_0^2\left(p,p^{\frac{n-1}{2n}}\right)-\eta_2^2(p,x)\eta_1^2\left(p,p^{\frac{n-1}{2n}}\right)\right].$$

Man bemerkt die grösste Ähnlichkeit zwischen den Formeln für $\eta_2(p^n, x^n)$ und $\eta_2\left(p^{\frac{1}{n}}, x\right)$.

§ 56.

Die multiplicatorisch periodischen Functionen.

1. Nachdem wir die vorbereitenden Untersuchungen über die η-Functionen beendet haben, kehren wir zu den multiplicatorisch periodischen Functionen (mit zwei wesentlichen Discontinuitätspunkten) selbst zurück. Wir sahen bereits in § 49, dass es deren keine giebt, die für keine nicht äquivalente Werthe denselben Werth annehmen; es ist daher das Nächstliegende, dass wir uns zu den *multiplicatorisch periodischen Functionen zweiter Ordnung*, die in jedem Periodicitätskreisring jeden Werth zweimal annehmen, wenden. Wir wissen aus § 49, dass dieselben die Form

$$(1.)\quad f(x) = C\frac{\eta\left(p^{\frac{1}{2}}, ax\right)\eta\left(p^{\frac{1}{2}}, bx\right)}{\eta\left(p^{\frac{1}{2}}, cx\right)\eta\left(p^{\frac{1}{2}}, dx\right)}$$

haben müssen, wobei

(2.) $$ab = cd$$
ist. Es ist nun nicht allein
$$f(px) = f(x),$$
sondern auch
$$f\left(\frac{1}{abx}\right) = C\frac{\eta\left(p^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{bx}\right)\eta\left(p^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{ax}\right)}{\eta\left(p^{\frac{1}{2}}, \frac{c}{abx}\right)\eta\left(p^{\frac{1}{2}}, \frac{d}{abx}\right)}$$
$$= C\frac{\eta\left(p^{\frac{1}{2}}, bx\right)\eta\left(p^{\frac{1}{2}}, ax\right)}{\eta\left(p^{\frac{1}{2}}, \frac{ab}{c}x\right)\eta\left(p^{\frac{1}{2}}, \frac{ab}{d}x\right)}$$
oder mit Hülfe von (2.)

(3.) $$f\left(\frac{1}{abx}\right) = f(x),$$
sodass $f(x)$ noch eine zweite lineare Periode

(4.) $$y = \frac{1}{abx}$$
besitzt. Um nun eine Art Normalform für $f(x)$ aufzustellen, können wir diese zweite Periode möglichst einfach nehmen, wobei freilich immer noch der Willkürlichkeit ein ziemlicher Spielraum gelassen ist. Wir wählen für (4.)

(5.) $$y = -\frac{1}{x},$$
d. h. $a = -\frac{1}{b}$, also $d = -\frac{1}{c}$, und weiter
$$a = -1, \; c = -p^{\frac{1}{2}}.$$
So gelangen wir zu
$$f(x) = C\frac{\eta\left(p^{\frac{1}{2}}, -x\right)\eta\left(p^{\frac{1}{2}}, x\right)}{\eta\left(p^{\frac{1}{2}}, -p^{\frac{1}{2}}x\right)\eta\left(p^{\frac{1}{2}}, \frac{x}{p^{\frac{1}{2}}}\right)}$$
oder, wie leicht zu sehen, zu
$$f(x) = C_1\frac{\eta_1(p, x)}{\eta_0(p, x)}.$$

Über die noch willkürliche Constante C_1 wollen wir so verfügen, dass $f(i) = 1$ wird*), d. h. wir nehmen $C_1 = \frac{\eta_3}{\eta_2} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$

*) Ein tiefer liegender Grund für diese Constantenbestimmung wird sich erst später (§ 81) ergeben.

(wo das Vorzeichen von $\sqrt{\varkappa}$ durch diese Gleichung eindeutig bestimmt ist) und schreiben

$$(6.)\qquad S(p,x) = \frac{\eta_3}{\eta_2}\frac{\eta_1(p,x)}{\eta_0(p,x)} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\frac{\eta_1(p,x)}{\eta_0(p,x)}.$$

2. Die gefundene Transcendente genügt, wie aus den Formeln für die $\eta_\alpha(p,x)$ hervorgeht, den Gleichungen

$$(7.)\qquad S(p,px) = S(p,x),$$

$$(8.)\qquad S(p,-x) = -S(p,x),$$

$$(9.)\qquad S\left(p,\frac{1}{x}\right) = -S(p,x),$$

$$(10.)\qquad S\left(p,-\frac{1}{x}\right) = S(p,x);$$

ferner ist

$$(11.)\qquad \begin{cases} S(p,\pm 1) = 0,\ S\left(p,\pm p^{\frac{1}{2}}\right) = \infty, \\ S(p,i) = 1,\ S(p,-i) = -1, \\ S\left(p,ip^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\eta_3{}^2}{\eta_2{}^2} = \frac{1}{\varkappa},\ S\left(p,-ip^{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{\varkappa}. \end{cases}$$

3. Mit der Function $S(p,x)$ stehen zwei andere Transcendenten in engem Zusammenhange, die allerdings nicht die Periode $y=px$, sondern nur $y=p^2x$ besitzen:

$$(12.)\qquad C(p,x) = \frac{\eta_0}{\eta_2}\frac{\eta_2(p,x)}{\eta_0(p,x)} = \sqrt{\frac{\varkappa_1}{\varkappa}}\,\frac{\eta_2(p,x)}{\eta_0(p,x)}$$

und

$$(13.)\qquad D(p,x) = \frac{\eta_0}{\eta_3}\frac{\eta_3(p,x)}{\eta_0(p,x)} = \sqrt{\varkappa_1}\,\frac{\eta_3(p,x)}{\eta_0(p,x)}.$$

Aus § 54, (8.) und (9.) wird nämlich

$$(14.)\qquad S^2(p,x) + C^2(p,x) = 1$$

und

$$(15.)\qquad \varkappa^2 S^2(p,x) + D^2(p,x) = 1,$$

woraus weiter

$$(16.)\qquad D^2(p,x) - \varkappa^2 C^2(p,x) = \varkappa_1{}^2$$

folgt. $C(p,x)$ steht zu $S(p,x)$ in einem ähnlichen Verhältnisse, wie $\cos x$ zu $\sin x$, während es zu $D(p,x)$ unter den trigonometrischen Functionen kein Analogon giebt. Trotz der irrationalen Relationen

$$C(p,x) = \sqrt{1 - S^2(p,x)}$$

und

$$D(p, x) = \sqrt{1 - \varkappa^2 S^2(p, x)}$$

sind natürlich $C(p, x)$ und $D(p, x)$ *eindeutige* Functionen von x. Weiter bemerkt man, dass die eingeführten drei Transcendenten auch in Bezug auf p eindeutig sind, weil sich der in $\eta_1(p, x)$ und $\eta_2(p, x)$ enthaltene Factor $p^{\frac{1}{4}}$ heraushebt.

4. $C(p, x)$ und $D(p, x)$ genügen den Gleichungen:

$$(17.) \quad \begin{cases} C(p, -x) = -C(p, x), \\ C\left(p, \frac{1}{x}\right) = C(p, x), \\ C(p, px) = -C(p, x), \\ C(p, -px) = C(p, x); \end{cases}$$

$$(18.) \quad \begin{cases} C(p, 1) = 1, \; C(p, -1) = -1, \; C(p, \pm i) = 0, \\ C\left(p, \pm p^{\frac{1}{2}}\right) = \infty, \; C\left(p, \pm ip^{\frac{1}{2}}\right) = \mp i \frac{\eta_0^2}{\eta_2^2} = \mp i \frac{\varkappa_1}{\varkappa}; \end{cases}$$

$$(19.) \quad \begin{cases} D(p, -x) = D(p, x), \\ D\left(p, \frac{1}{x}\right) = D(p, x), \\ D(p, px) = -D(p, x); \end{cases}$$

$$(20.) \quad \begin{cases} D(p, \pm 1) = 1, \; D(p, \pm i) = \varkappa_1, \\ D\left(p, \pm p^{\frac{1}{2}}\right) = \infty, \; D\left(p, \pm ip^{\frac{1}{2}}\right) = 0. \end{cases}$$

$C(p, x)$ und $D(p, x)$ sind multiplicatorisch periodische Functionen *vierter* Ordnung mit der Periode $y = p^2 x$, die für folgende nicht äquivalente Werthe des Arguments den gleichen Werth annehmen:

$$C(p, x) \text{ für } x, \frac{1}{x}, -px, -\frac{1}{px};$$

$$D(p, x) \text{ für } x, -x, \frac{1}{x}, -\frac{1}{x}.$$

§ 57.

Die Multiplicationstheoreme.

1. Die Multiplicationstheoreme für $S(p, x)$, $C(p, x)$, $D(p, x)$ ergeben sich aus den für die η-Functionen herge-

leiteten. Dividirt man die Gleichung

$$[2310] = (1023) + (2310)$$

durch

$$[0000] = (0000) - (1111),$$

so erhält man

$$(1.)\quad S(p, xy) = \frac{S(p, x)C(p, y)D(p, y) + S(p, y)C(p, x)D(p, x)}{1 - \varkappa^2 S^2(p, x)\, S^2(p, y)}.$$

Ebenso findet man durch Division von

$$[0220] = (0202) - (1313)$$

durch

$$[0000] = (0000) - (1111),$$

resp. von

$$[0330] = (0303) - (2121)$$

durch

$$[0000] = (0000) - (1111):$$

$$(2.)\quad C(p, xy) = \frac{C(p, x)\, C(p, y) - S(p, x)\, D(p, x)\, S(p, y)\, D(p, y)}{1 - \varkappa^2\, S^2(p, x)\, S^2(p, y)}$$

und

$$(3.)\quad D(p, xy) = \frac{D(p, x)\, D(p, y) - \varkappa^2 S(p, x) C(p, x) S(p, y) C(p, y)}{1 - \varkappa^2\, S^2(p, x)\, S^2(p, y)}.$$

Es ist natürlich möglich, die rechten Seiten dieser Gleichungen durch eine einzige der drei Transcendenten auszudrücken, und zwar ohne andere Irrationalitäten wie Quadratwurzeln einzuführen, die als Radicanden einen Ausdruck vierten Grades besitzen; die gewählte Form hat indessen den Vorzug vollständig eindeutig zu sein.

2. Aus den Formeln (1.), (2.), (3.) lässt sich durch Specialisirung und Umformung eine grosse Anzahl anderer herleiten, von denen wir einige der wichtigsten hier zusammenstellen. Es ist

$$S(p, ix) = \frac{S(p, x)\, C(p, i)\, D(p, i) + S(p, i)\, C(p, x)\, D(p, x)}{1 - \varkappa^2\, S^2(p, x)\, S^2(p, i)} = \frac{C(p, x)\, D(p, x)}{1 - \varkappa^2\, S^2(p, x)}$$

oder

$$(4.)\quad \begin{cases} S(p, ix) = \dfrac{C(p, x)}{D(p, x)}, \text{ und ebenso} \\ C(p, ix) = -\varkappa_1 \dfrac{S(p, x)}{D(p, x)}, \\ D(p, ix) = \dfrac{\varkappa_1}{D(p, x)}; \end{cases}$$

$$(5.)\quad \begin{cases} S\left(p, p^{\frac{1}{2}}x\right) = \dfrac{1}{\varkappa S(p, x)}, \\ C\left(p, p^{\frac{1}{2}}x\right) = -i\dfrac{D(p, x)}{\varkappa S(p, x)}, \\ D\left(p, p^{\frac{1}{2}}x\right) = -i\dfrac{C(p, x)}{S(p, x)}; \end{cases}$$

$$(6.)\quad \begin{cases} S\left(p, ip^{\frac{1}{2}}x\right) = \dfrac{D(p, x)}{\varkappa C(p, x)}, \\ C\left(p, ip^{\frac{1}{2}}x\right) = -\dfrac{i\varkappa_1}{\varkappa C(p, x)}, \\ D\left(p, ip^{\frac{1}{2}}x\right) = \dfrac{i\varkappa_1 S(p, x)}{C(p, x)}. \end{cases}$$

3. Weitere Formeln sind:

$$(7.)\quad \begin{cases} S\left(p, \dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{S(p, x)C(p, y)D(p, y) - S(p, y)C(p, x)D(p, x)}{1 - \varkappa^2 S^2(p, x)S^2(p, y)}, \\ C\left(p, \dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{C(p, x)C(p, y) + S(p, x)D(p, x)S(p, y)D(p, y)}{1 - \varkappa^2 S^2(p, x)S^2(p, y)}, \\ D\left(p, \dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{D(p, x)D(p, y) + \varkappa^2 S(p, x)C(p, x)S(p, y)C(p, y)}{1 - \varkappa^2 S^2(p, x)S^2(p, y)}; \end{cases}$$

$$(8.)\quad \begin{cases} S(p, xy) + S\left(p, \dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{2S(p, x)C(p, y)D(p, y)}{1 - \varkappa^2 S^2(p, x)S^2(p, y)}, \\ C(p, xy) + C\left(p, \dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{2C(p, x)C(p, y)}{1 - \varkappa^2 S^2(p, x)S^2(p, y)}, \\ D(p, xy) + D\left(p, \dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{2D(p, x)D(p, y)}{1 - \varkappa^2 S^2(p, x)S^2(p, y)}; \end{cases}$$

$$(9.)\quad \begin{cases} S(p, xy) - S\left(p, \dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{2C(p, x)D(p, x)S(p, y)}{1 - \varkappa^2 S^2(p, x)S^2(p, y)}, \\ C(p, xy) - C\left(p, \dfrac{x}{y}\right) = -\dfrac{2S(p, x)D(p, x)S(p, y)D(p, y)}{1 - \varkappa^2 S^2(p, x)S^2(p, y)}, \\ D(p, xy) - D\left(p, \dfrac{x}{y}\right) = -\dfrac{2\varkappa^2 S(p, x)C(p, x)S(p, y)C(p, y)}{1 - \varkappa^2 S^2(p, x)S^2(p, y)}; \end{cases}$$

$$(10.)\quad \begin{cases} S(p, xy)S\left(p, \dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{S^2(p, x) - S^2(p, y)}{1 - \varkappa^2 S^2(p, x)S^2(p, y)}, \\ C(p, xy)C\left(p, \dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{C^2(p, x) + C^2(p, y)}{1 - \varkappa^2 S^2(p, x)S^2(p, y)} - 1, \\ D(p, xy)D\left(y, \dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{D^2(p, x) + D^2(p, y)}{1 - \varkappa^2 S^2(p, x)S^2(p, y)} - 1. \end{cases}$$

§ 58.

Die Umkehrung von $S(p, x)$.

Bezeichnen wir mit $\arg S(p, x)$ (spr.: *Argument* $S(p,x)$) die Umkehrung von $S(p, x)$, so dass also

$$(1.) \qquad S\big(p, \arg S(p, x)\big) = x$$

ist, und entsprechend die Umkehrungen der beiden andern Transcendenten, so sind $\arg S(p, x)$ u. s. w. unendlich vieldeutige, übrigens, einzelne Punkte (vgl. § 60) ausgenommen, analytische Functionen. Ist ins Besondere y ein Werth von $\arg S(p, x)$, so stellen sich *sämmtliche* Werthe dieser Function durch

$$(2.) \qquad y, py, p^2y, p^3y, \dots \frac{y}{p}, \frac{y}{p^2}, \dots; -\frac{1}{y}, -\frac{1}{py}, -\frac{1}{p^2y}, \dots \frac{p}{y}, -\frac{p^2}{y} \dots$$

dar; denn es ist $S(p, p^k y) = S(p, y)$ und $S\left(p, -\frac{1}{y}\right) = S(p, y)$, während für kein von den Grössen (2.) verschiedenes y_1 $S(p, y_1) = S(p, y)$ sein kann, da $S(p, y)$ eine multiplicatorisch periodische Function *zweiter* Ordnung ist.

Ähnliches gilt für $\arg C(p, x)$ und $\arg D(p, x)$.

Die Riemann'sche Fläche für $y = \arg S(p, x)$ stellen wir weiter unten her.

§ 59.

Darstellung der eindeutigen multiplicatorisch periodischen Functionen durch $S(p, x)$.

1. Durch die Untersuchungen der vorhergehenden Paragraphen sind wir in den Stand gesetzt, sämmtliche eindeutige multiplicatorisch periodische Functionen $F(x)$ durch *eine* derselben, z. B. $S(p, x)$ auszudrücken; nur den letzteren Specialfall wollen wir in der Folge ins Auge fassen. Ist

$$F(px) = F(x),$$

so ist $f(x) \doteq F(y) = F[\arg S(p, x)]$ eine *zweideutige* (im speciellen Falle auch eindeutige) Function von x; denn die Werthe von $y = \arg S(p, x)$, die nur um einen Factor p^k verschieden sind, liefern in $F(y)$ eingesetzt den gleichen

Werth, während $F\left(-\frac{1}{y}\right)$ im Allgemeinen von $F(y)$ verschieden ist. $F(y)+F\left(-\frac{1}{y}\right)$ und $F(y)\,F\left(-\frac{1}{y}\right)$ sind daher eindeutige Functionen von x, und $F(x)=f[(S(p,x)]$ *lässt sich demnach als Wurzel einer quadratischen Gleichung darstellen, deren Coefficienten ganze Functionen von* $S(p,x)$ *sind.*

2. Nachdem wir so die Möglichkeit erkannt haben, *jede* eindeutige, multiplicatorisch periodische Function $F(x)$ *zweideutig* durch $S(p,x)$ auszudrücken, wollen wir diese Darstellung für den Fall, dass $F(x)$ nur zwei wesentliche Unstetigkeitspunkte besitzt, also auch nur in einer endlichen Zahl von nicht äquivalenten Punkten Null und unendlich wird, etwas weiter ausführen*); wir werden sehen, dass sich in diesem Falle die Darstellung immer auf *algebraischem* Wege bewerkstelligen lässt.

Zunächst ist es leicht, jede eindeutige multiplicatorisch periodische Transcendente *zweiter Ordnung* durch $S(p,x)$ auszudrücken. Wird nämlich $F(x)$ in den Punkten a und b Null, in c und $d=\frac{ab}{c}$ unendlich, so wollen wir $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ so bestimmen, dass das Gleiche mit

$$f(x)=\frac{S(p,\alpha x)-S(p,\beta)}{S(p,\gamma x)-S(p,\delta)}$$

der Fall ist. Zu diesem Zwecke muss

$$\alpha a=\beta \text{ und } \alpha b=-\frac{1}{\beta},$$

also

$$\alpha=\sqrt{-\frac{1}{ab}},\ \beta=\sqrt{-\frac{a}{b}}$$

gemacht werden. Ferner nehmen wir $\gamma=\alpha$, damit $f(x)$ nicht unendlich oder Null wird, wenn $S(p,\alpha x)$ oder $S(p,\gamma x)$ unendlich wird, und haben dann noch $\gamma c=\alpha c=\delta$, also

$$\delta=c\sqrt{-\frac{1}{ab}}$$

zu setzen; der andere Unendlichkeitspunkt ergiebt sich von

*) Wir folgen hierbei im Wesentlichen der Darstellung in dem Königsberger'schen Lehrbuche, pag. 350 ff.

selbst als übereinstimmend. Da nun $f(x)$ mit $F(x)$ die Periode $y = px$, sowie die Null- und Unendlichkeitspunkte gemeinsam hat, so wird es mit ihm bis auf einen constanten Factor übereinstimmen, der sich leicht durch Einsetzung eines constanten Werthes für x bestimmt. Mittelst des Multiplicationstheorems für $S(p,x)$ lässt sich dann $f(x)$ weiter so umwandeln, *dass es eine rationale Function von* $S(p,x)$ *und* $C(p,x)D(p,x) = \sqrt{(1-S^2(p,x))(1-\varkappa^2 S^2(p,x))}$ *wird.*

3. Wir wollen nun weiter zeigen, dass sich ein $F(x)$ von der n^{ten} Ordnung als ein Product von $n-1$ eindeutigen multiplicatorisch periodischen Functionen zweiter Ordnung darstellen lässt, so dass die gesammte Umformung auf den vorigen Fall zurückgeführt wird. Seien nämlich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Nullpunkte, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ die Unendlichkeitspunkte von $F(x)$, sodass $a_1 a_2 \ldots a_n = b_1 b_2 \ldots b_n$ ist, so bilden wir nach der vorigen Nummer die $(n-1)$ eindeutigen Functionen $S_1(x), S_2(x) \ldots S_{n-1}(x)$, welche die gleiche Periode wie $F(x)$ besitzen und resp. in den Punkten

$$a_1, a_2; \frac{a_1 a_2}{b_1}, a_3; \quad \frac{a_1 a_2 a_3}{b_1 b_2}, a_4; \ldots; \quad \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}{b_1 b_2 \cdots b_{n-2}}, a_n$$

verschwinden und in

$$b_1, \frac{a_1 a_2}{b_1}; b_2, \frac{a_1 a_2 a_3}{b_1 b_2}; b_3, \frac{a_1 a_2 a_3 a_4}{b_1 b_2 b_3}; \ldots; b_{n-1}, \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{b_1 b_2 \cdots b_{n-1}} = b_n$$

unendlich werden. Das Product $S_1(x) S_2(x) \ldots S_{n-1}(x)$ wird dann in denselben Punkten Null und unendlich wie $F(x)$, da sich alle übrigen Null- und Unendlichkeitsstellen herausheben. Es folgt also:

Jede eindeutige Function n^{ter} Ordnung mit der multiplicatorischen Periode p lässt sich als rationale Function von $S(p,x)$ und $C(p,x)D(p,x) = \sqrt{(1-S^2(p,x))(1-\varkappa^2 S^2(p,x))}$ darstellen.

4. Da sich sämmtliche geraden Potenzen von $C(p,x)D(p,x)$ rational durch $S(p,x)$ ausdrücken, kann man diese Darstellung für $F(x)$ in die Form

$$F(x) = \frac{f_1(S(p,x)) + f_2(S(p,x))\,C(p,x)\,D(p,x)}{f_3(S(p,x)) + f_4(S(p,x))\,C(p,x)\,D(p,x)}$$

bringen, worin die f_α *ganze* Functionen sind, oder weiter

durch Multiplication von Zähler und Nenner mit

$$f_3(S(p,x)) - f_4(S(p,x))\,C(p,x)\,D(p,x)$$

in die Form

$$F(x) = F_1(S(p,x)) + F_2(S(p,x))\,C(p,x)\,D(p,x),$$

worin F_1 und F_2 *rationale* Functionen bezeichnen.

§ 60.

Partialbruchreihen und Potenzreihen; Discussion der multiplicatorisch periodischen Functionen.

1. Um für $S(p,x)$ eine Entwicklung nach Partialbrüchen herzustellen, setzen wir den Unendlichkeitswerthen von $S(p,x)$ entsprechend

$$S(p,x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n A_n x^n + \sum_0^\infty{}_n \frac{B_{2n+1}}{1 - p^{\frac{2n+1}{2}}x} + \sum_0^\infty{}_n \frac{B_{-(2n+1)}}{1 - \frac{p^{\frac{2n+1}{2}}}{x}}$$

$$+ \sum_0^\infty{}_n \frac{C_{2n+1}}{1 + p^{\frac{2n+1}{2}}x} + \sum_0^\infty{}_n \frac{C_{-(2n+1)}}{1 + \frac{p^{\frac{2n+1}{2}}}{x}}$$

und versuchen es, ob sich die A, B und C derart wählen lassen, dass die Reihe convergirt und zugleich den Relationen genügt, die $S(p,x)$ bestimmen; gelingt dies — was freilich nicht a priori sicher ist —, so haben wir eine Partialbruchreihe für $S(p,x)$ gefunden.

Beachten wir die Gleichungen

$$S(p,-x) = -S(p,x)$$

und

$$S\left(p, \frac{1}{x}\right) = -S(p,x),$$

so erkennen wir, dass

$$A_{2n} = 0,\ A_{-(2n+1)} = -A_{2n+1},$$
$$C_{2n+1} = -B_{2n+1},\ C_{-(2n+1)} = -B_{-(2n+1)},$$
$$B_{-(2n+1)} = -B_{2n+1},\ C_{-(2n+1)} = -C_{2n+1}$$

sein muss, dass also die supponirte Reihe unter Zusammenfassung je zweier Glieder, da

$$\frac{1}{1-p^{\frac{2n+1}{2}}x} - \frac{1}{1+p^{\frac{2n+1}{2}}x} = \frac{2p^{\frac{2n+1}{2}}x}{1-p^{2n+1}x^2} \quad \text{u. s. w.}$$

ist, die Gestalt annimmt:

$$S(p,x) = \sum_0^{\infty}{}_n A_{2n+1}\left(x^{2n+1} - \frac{1}{x^{2n+1}}\right)$$
$$+ \sum_0^{\infty}{}_n a^{2n+1}\left(\frac{x}{1-p^{2n+1}x^2} - \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{p^{2n+1}}{x^2}}\right).$$

Wegen $S(p, px) = S(p, x)$ muss diese Reihe mit der folgenden übereinstimmen:

$$S(p, px) = \sum_0^{\infty}{}_n A_{2n+1}\left(p^{2n+1}x^{2n+1} - \frac{1}{p^{2n+1}x^{2n+1}}\right)$$
$$+ a_1\left(\frac{px}{1-p^3x^2} + \frac{x}{1-px^2}\right) + \sum_1^{\infty}{}_n a_{2n+1}\left(\frac{px}{1-p^{2n+3}x^2} - \frac{\frac{1}{px}}{1-\frac{p^{2n-1}}{x^2}}\right).$$

Die Coefficientenvergleichung liefert

$$A_{2n+1} = 0 \text{ und } a_{2n-1}\,p = a_{2n+1},$$

somit, wenn wir $a_1 = c$ setzen,

$$a_{2n+1} = cp^n,$$

und die Reihe lautet:

$$(1.) \qquad S(p,x) = c\sum_0^{\infty}{}_n p^n\left(\frac{x}{1-p^{2n+1}x^2} - \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{p^{2n+1}}{x^2}}\right)$$

und convergirt nach dem Cauchy'schen Kriterium für beliebige endliche x, die von Null und p^{2n+1} verschieden sind.

Die Constante c bestimmen wir am bequemsten dadurch, dass wir beide Seiten von (1.) mit $1 - px^2$ multipliciren und dann $x = p^{-\frac{1}{2}}$ setzen; wir erhalten

$$-\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}\frac{\eta_3}{\eta_2}\left[\frac{(1-p)(1-p^3)(1-p^5)\cdots}{(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots}\right]^2 = \frac{c}{p^{\frac{1}{2}}}.$$

Nun ist aber nach § 54, (1.)

$$\eta_2\,\eta_3 = 2p^{\frac{1}{4}}\left[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\right]^2$$
$$\cdot\left[(1+p)(1+p^2)(1+p^3)\cdots\right]^2$$

oder mit Hülfe von § 50, (11.)

$$\eta_2\,\eta_3 = 2p^{\frac{1}{4}}\left[\frac{(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots}{(1-p)(1-p^3)(1-p^5)\cdots}\right]^2,$$

und somit

$$c = -\frac{2ip^{\frac{1}{2}}}{\eta_2^{\,2}}.$$

Wir haben also

$$(2.)\quad S(p,x) = -\frac{2ip^{\frac{1}{2}}}{\eta_2^{\,2}}\sum_0^{\infty}{}_n\, p^n\left(\frac{x}{1-p^{2n+1}x^2} - \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{p^{2n+1}}{x^2}}\right)$$

$$= -\frac{2i}{\eta_2^{\,2}}\sum_0^{\infty}{}_n\, p^{\frac{2n+1}{2}}\left(\frac{x}{1-p^{2n+1}x^2} - \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{p^{2n+1}}{x^2}}\right)$$

$$= -\frac{2i}{\eta_2^{\,2}}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\,\frac{p^{\frac{2n+1}{2}}x}{1-p^{2n+1}x^2},$$

oder nach Zusammenziehung je zweier Glieder

$$(3.)\quad S(p,x) = -\frac{2i}{\eta_2^{\,2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)\sum_0^{\infty}{}_n\, p^{\frac{2n+1}{2}}\frac{1+p^{2n+1}}{1-p^{2n+1}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+p^{4n+2}}.$$

Wenn wir die einzelnen Glieder von (2.) nach Potenzen von x entwickeln, so erhalten wir

$$S(p,x) = -\frac{2ip^{\frac{1}{2}}}{\eta_2^{\,2}}\left\{\begin{array}{l} \quad x + px^3 + p^2x^5 + p^3x^7 + \cdots \\ + px + p^4x^3 + p^7x^5 + p^{10}x^7 + \cdots \\ + p^2x + p^7x^3 + p^{12}x^5 + p^{17}x^7 + \cdots \\ + \cdots \\ - \frac{1}{x} - \frac{p}{x^3} - \frac{p^2}{x^5} - \frac{p^3}{x^7} - \cdots \\ - \frac{p}{x} - \frac{p^4}{x^3} - \frac{p^7}{x^5} - \frac{p^{10}}{x^7} - \cdots \\ - \cdots, \end{array}\right.$$

oder durch Summirung der Verticalreihen

$$(4.)\quad S(p,x) = -\frac{2ip^{\frac{1}{2}}}{\eta_2^{\,2}}\left[\frac{1}{1-p}\left(x-\frac{1}{x}\right) + \frac{p}{1-p^3}\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right) + \frac{p^2}{1-p^5}\left(x^5-\frac{1}{x^5}\right) + \cdots\right]$$

$$= -\frac{2ip^{\frac{1}{2}}}{\eta_2^2}\sum_0^\infty{}_n \frac{p^n}{1-p^{2n+1}}\left(x^{2n+1}-\frac{1}{x^{2n+1}}\right)$$

$$= -\frac{2i}{\eta_2^2}\sum_0^\infty{}_n \frac{p^{\frac{2n+1}{2}}}{1-p^{2n+1}}\left(x^{2n+1}-\frac{1}{x^{2n+1}}\right)$$

$$= -\frac{2i}{\eta_2^2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \frac{p^{\frac{2n+1}{2}}x^{2n+1}}{1-p^{2n+1}},$$

$$|p^{\frac{1}{2}}| < |x| < |p^{-\frac{1}{2}}|.$$

2. In ganz analoger Weise entwickeln wir $C(p, x)$, indem wir die Relationen

$$C(p, -x) = -C(p, x),$$
$$C\left(p, \frac{1}{x}\right) = C(p, x),$$
$$C(p, px) = -C(p, x)$$

benutzen, und erhalten

$$(5.)\quad C(p, x) = c\sum_0^\infty{}_n (-1)^n p^n \left(\frac{x}{1-\frac{p^{2n+1}}{x^2}}+\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{p^{2n+1}}{x^2}}\right)$$

oder

$$(6.)\quad C(p, x) = c\left(x+\frac{1}{x}\right)\sum_0^\infty{}_n \frac{(-1)^n p^n (1-p^{2n+1})}{1-p^{2n+1}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+p^{4n+2}}.$$

Setzen wir in (6.) $x = 1$, so wird

$$C(p, 1) = 1 = 2c\sum_0^\infty{}_n \frac{(-1)^n p^n}{1-p^{2n+1}},$$

während aus (4.) durch Substitution von i für x folgt

$$(7.)\quad S(p, i) = 1 = \frac{4p^{\frac{1}{2}}}{\eta_2^2}\sum_0^\infty{}_n \frac{(-1)^n p^n}{1-p^{2n+1}};$$

wir erhalten demnach

$$c = \frac{2p^{\frac{1}{2}}}{\eta_2^2},$$

also

$$(8.)\quad C(p, x) = \frac{2p^{\frac{1}{2}}}{\eta_2^2}\sum_0^\infty{}_n (-1)^n p^n \left[\frac{x}{1-\frac{p^{2n+1}}{x^2}}+\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{p^{2n+1}}{x^2}}\right]$$

$$=\frac{2}{\eta_2^2}\sum_0^\infty{}^n(-1)^n p^{\frac{2n+1}{2}}\left[\frac{x}{1-p^{2n+1}x^2}+\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{p^{2n+1}}{x^2}}\right]$$

$$=\frac{2}{\eta_2^2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^n(-1)^n\frac{p^{\frac{2n+1}{2}}x}{1-p^{2n+1}x^2}$$

oder

$$(9.)\quad C(p,x)=\frac{2}{\eta_2^2}\sum_0^\infty{}^n(-1)^n\frac{p^{\frac{2n+1}{2}}(1-p^{2n+1})}{1-p^{2n+1}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+p^{4n+2}}.$$

Die Entwicklung nach Potenzen von x lautet:

$$(10.)\quad C(p,x)=\frac{2}{\eta_2^2}\sum_0^\infty{}^n\frac{p^{\frac{2n+1}{2}}}{1+p^{2n+1}}\left(x^{2n+1}+\frac{1}{x^{2n+1}}\right)$$

$$=\frac{2}{\eta_2^2}\sum_0^{+\infty}{}^n\frac{p^{\frac{2n+1}{2}}x^{2n+1}}{1+p^{2n+1}},$$

$$\left|p^{\frac{1}{2}}\right|<|x|<\left|p^{-\frac{1}{2}}\right|.$$

3. Wegen der Gleichungen

$$D(p,-x)=D(p,x)$$

und

$$D\left(p,\frac{1}{x}\right)=D(p,x)$$

setzen wir sogleich

$$D(p,x)=\sum_0^\infty{}^n A_{2n}\left(x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}\right)$$

$$+\sum_0^\infty{}^n a_{2n+1}\left(\frac{1}{1-p^{2n+1}x^2}+\frac{1}{1-\frac{p^{2n+1}}{x^2}}\right),$$

womit wir

$$D(p,px)=-D(p,x)=a_1+\sum_0^\infty{}^n A_{2n}\left(p^{2n}x^{2n}+\frac{1}{p^{2n}x^{2n}}\right)$$

$$+a_1\left(\frac{1}{1-p^3x^2}-\frac{1}{1-px^2}\right)$$

$$+\sum_1^\infty{}^n a_{2n+1}\left(\frac{1}{1-p^{2n+3}x^2}+\frac{1}{1-\frac{p^{2n-1}}{x^2}}\right)$$

zusammenstellen. Es folgt

$$-2A_0 = 2A_0 + a_1, \text{ also } A_0 = -\frac{a_1}{4} = -\frac{c}{4};\ A_{2n} = 0,$$

$a_{2n+1} = (-1)^n c$, so dass die Entwicklung lauten müsste

$$D(p,x) = c\left\{\frac{1}{2} + \sum_0^\infty {}^n (-1)^n \left(\frac{1}{1-p^{2n+1}x^2} + \frac{1}{1-\frac{p^{2n+1}}{x_2}}\right)\right\}.$$

Dies ist jedoch eine divergente Reihe und ein erstes Beispiel dafür, dass nicht jeder Quotient zweier durchaus convergenten Producte in eine Partialbruchreihe der gewöhnlichen Form verwandelt werden kann. Dagegen dürfen wir setzen:

$$(11.)\quad D(p,x) = a + c\sum_0^\infty {}^n (-1)^n \left[\left(\frac{1}{1-p^{2n+1}x^2} - \frac{1}{1-p^{2n+1}}\right) + \left(\frac{1}{1-\frac{p^{2n+1}}{x_2}} - \frac{1}{1-p^{2n+1}}\right)\right]$$

$$= a + cf(x);$$

denn es ist leicht einzusehen, dass diese Reihe unbedingt convergirt und dass sie die Unendlichkeitspunkte mit $D(p,x)$ gemeinsam hat, und man überzeugt sich ohne Schwierigkeit, dass sie bei geeigneter Wahl von a und c den Functionalgleichungen genügt, welche $D(p,x)$ bis auf eine multiplicatorische Constante bestimmen. Zur Berechnung der Constanten setzen wir übrigens in (11.) $x = 1$ und erhalten $a = 1$; ferner setzen wir $x = i$ und finden

$$D(p,i) = \frac{\eta_0^2}{\eta_3^2} = 1 - 4c\sum_0^\infty {}^n \frac{(-1)^n p^{2n+1}}{1-p^{4n+2}}$$

oder nach (7.)

$$\frac{\eta_0^2}{\eta_3^2} = 1 - c\eta_2^2(p^2, 1),$$

also

$$c = \frac{\eta_3^2 - \eta_0^2}{\eta_3^2\eta_2^2(p^2,1)} = \frac{(\eta_3+\eta_0)(\eta_3-\eta_0)}{\eta_3^2\eta_2^2(p^2,1)}$$

$$= 4\frac{\eta_3(p^4,1)\eta_2(p^4,1)}{\eta_3^2\eta_2^2(p^2,1)} = \frac{2}{\eta_3^2},$$

wie aus den Reihenentwicklungen für η_3 und η_0 und § 54,

(1.) folgt*). Wir haben also endlich

$$(12.)\ D(p,x)=1+\frac{2}{\eta_3^2}\sum_0^{\infty}{}_n(-1)^n\left[\left(\frac{1}{1-p^{2n+1}x^2}-\frac{1}{1-p^{2n+1}}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{1-\frac{p^{2n+1}}{x^2}}-\frac{1}{1-p^{2n+1}}\right)\right]$$

oder

$$(13.)\ D(p,x)=1+\frac{2}{\eta_3^2}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\sum_n^{\infty}\frac{(-1)^n p^{2n+1}\frac{1+p^{2n+1}}{1-p^{2n+1}}}{1-p^{2n+1}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+p^{4n+2}}.$$

Die Entwicklung von (12.) nach Potenzen von x giebt

$$D(p,x)=1+\frac{2}{\eta_3^2}\left\{\sum_1^{\infty}{}_n\frac{p^n}{1+p^{2n}}\left(x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}\right)-2\sum_0^{\infty}{}_n\frac{(-1)^n p^{2n+1}}{1-p^{2n+1}}\right\}$$
$$=c+\frac{2}{\eta_3^2}\sum_1^{\infty}{}_n\frac{p^n}{1+p^{2n}}\left(x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}\right).$$

Zur Umformung des für c gefundenen Ausdrucks benutzen wir die aus § 57, (6.) folgende Relation

$$\frac{\eta_2^2}{\eta_3^2}\cdot S(p,p^{\frac{1}{2}}ix)\,C(p,x)=D(p,x)$$

oder

$$\frac{4p^{\frac{3}{2}}}{\eta_2^2\eta_3^2}\sum_0^{\infty}{}_n\frac{(-1)^n p^{2n}}{1-p^{2n+1}}\left(x^{2n+1}+\frac{1}{p^{2n+1}x^{2n+1}}\right)$$
$$\cdot\sum_0^{\infty}{}_n\frac{p^n}{1+p^{2n+1}}\left(x^{2n+1}+\frac{1}{x^{2n+1}}\right)$$
$$=c+\frac{2}{\eta_3^2}\sum_0^{\infty}{}_n\frac{p^n}{1+p^{2n}}\left(x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}\right).$$

Führen wir die Multiplication aus, soweit dies nöthig ist, um das constante Glied zu erhalten, so folgt nach einiger

---

*) Es ist nämlich:

$$\eta_3+\eta_0=2+4p^4+4p^{16}+4p^{36}+\cdots=2\eta_3(p^4,1),$$
$$\eta_3-\eta_0=4p+4p^9+4p^{25}+\cdots=2\eta_2(p^4,1),$$

und nach § 54, (1.)

$$\eta_2(p^4,1)\eta_3(p^4,1)=\frac{p\eta^2(p^2,p^2)}{2}=\frac{\eta_2^2(p^2,1)}{2}.$$

Umformung mit Beachtung von (7.)

$$c = \frac{4p^{\frac{3}{2}}}{\eta_2^2\eta_3^2}\sum_0^\infty{}_n \frac{(-1)^n p^n}{1-p^{2n+1}} = \frac{4p^{\frac{1}{2}}}{\eta_2^2\eta_3^2}\cdot\frac{\eta_2^2}{4p^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\eta_3^2},$$

also unter der gleichen Convergenzbedingung wie bei (10.):

$$(14.)\quad D(p,x) = \frac{1}{\eta_3^2}\left\{1 + 2\sum_1^\infty{}_n \frac{p^n}{1+p^{2n}}\left(x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}\right)\right\}.$$

4. Leicht sind auch die folgenden Reihen zu erhalten:

$$(15.)\quad \frac{1}{S(p,x)} = -\frac{2i}{\eta_3^2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \frac{p^n x}{1-p^{2n}x^2}$$

$$= -\frac{2i}{\eta_3^2}\left[\sum_0^{+\infty}{}_n \frac{p^n x}{1-p^{2n}x^2} - \sum_1^\infty{}_n \frac{\frac{p^n}{x}}{1-\frac{p^{2n}}{x^2}}\right]$$

$$= -\frac{2i}{\eta_3^2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \frac{p^n x}{1-p^{2n}x^2}$$

$$= -\frac{2i}{\eta_3^2}\left[\frac{x}{1-x^2} + \left(x - \frac{1}{x}\right)\sum_1^\infty{}_n \frac{p^n(1+p^n)}{1-p^{2n}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+p^{4n}}\right]$$

und für $|p| < |x| < 1$:

$$(16.)\quad \frac{1}{S(p,x)} = -\frac{2i}{\eta_3^2}\left[\frac{x}{1-x^2} + \sum_0^\infty{}_n \frac{p^{2n+1}\left(x^{2n+1} - \frac{1}{x^{2n+1}}\right)}{1-p^{2n+1}}\right].$$

5. An die Reihenentwicklungen für die Functionen $S(p,x)$, $C(p,x)$ und $D(p,x)$ wollen wir eine kurze Discussion des Verlaufs dieser Transcendenten anschliessen, uns jedoch hierbei auf *reelle* p beschränken, da im Allgemeinen die Sache zu complicirt wird. Setzen wir $x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, so lassen sich nach § 57, (1.), (2.) und (3.) $S(p,x)$, $C(p,x)$ und $D(p,x)$ durch $S(p,r)$, $C(p,r)$, $D(p,r)$ und $S(p,\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $C(p,\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $D(p,\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ausdrücken, so dass es genügt, die drei Functionen für reelle positive und für solche Argumente zu untersuchen, deren absoluter Betrag die Einheit ist.

Für reelle x ist $S(p,x)$ rein imaginär, während $C(p,x)$ und $D(p,x)$ alsdann reell sind, wie aus den verschiedenen Entwicklungen unmittelbar ersichtlich ist. Für $x = 1$ wird

$S(p,x)$ gleich Null; nimmt x von $x=1$ ausgehend ab, so folgt aus (4.), dass $\frac{S(p,x)}{i}$ ins Positive wächst, um schliesslich für $x=p^{\frac{1}{2}}$ unendlich zu werden. Dass bei diesem Verlauf ein beständiges Wachsthum stattfindet, geht daraus hervor, dass hierbei keine zwei x-Werthe auftreten, die durch eine der Gleichungen

$$x' = p^k x \quad \text{oder} \quad x' = -\frac{1}{p^k x}$$

verbunden sind und somit gleiche Werthe von $S(p,x)$ liefern. Lassen wir x über 1 hinaus wachsen, so wird $\frac{S(p,x)}{i}$ negativ, um für $x=p^{-\frac{1}{2}}$ durch das Unendliche ins Positive überzugehen. Die weitere Fortsetzung dieses Verlaufs ist durch die Periodicität bestimmt; aus dem Positiven gelangen wir durch die Null wieder ins Negative, aus diesem durch das Unendliche ins Positive u. s. w., während bei abnehmendem x der Verlauf der entgegengesetzte ist; die Nullpunkte sind $x=p^k$, die Unendlichkeitspunkte $x=p^{k+\frac{1}{2}}$. $C(p,x)$ und $D(p,x)$ werden für $x=1$ beide der Einheit gleich und nehmen beide für zunehmende wie abnehmende x zu, bis sie für $x=p^{-\frac{1}{2}}$ und $x=p^{\frac{1}{2}}$ den Werth unendlich erreichen, um dann wieder im Positiven bis zur Einheit zu sinken u. s. w.

Nach (4.) ist

$$S(p, \cos\varphi + i\sin\varphi) = \frac{4p^{\frac{1}{2}}}{\eta_2^2}\left[\frac{1}{1-p}\sin\varphi + \frac{p}{1-p^3}\sin 3\varphi + \frac{p^2}{1-p^5}\sin 5\varphi + \cdots\right],$$

woraus hervorgeht, dass dieser Ausdruck für solche φ, welche von Null aus ins Positive wachsen, ebenfalls von der Null ausgehend ins Positive wächst. Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, also

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = i,$$

wird

$$S(p, \cos\varphi + i\sin\varphi) = 1,$$

und man überzeugt sich leicht, dass das Zunehmen bis zu diesem Punkte ein fortwährendes ist, während von demselben ab bis zu $\varphi = \pi$ ein Abnehmen bis zur Null stattfindet, derart dass

$$S\big(p, \cos(\pi - \varphi) + i\sin(\pi - \varphi)\big) = S(p, \cos\varphi + i\sin\varphi)$$

ist; wir haben nämlich

$$\cos(\pi - \varphi) + i\sin(\pi - \varphi) = -\cos\varphi + i\sin\varphi$$
$$= -\frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi}.$$

Für negative φ bis zu $\varphi = -\pi$ ist der Verlauf der gleiche und nur das Zeichen das umgekehrte u. s. w. $C(p, \cos\varphi + i\sin\varphi)$ und $D(p, \cos\varphi + i\sin\varphi)$ sind, wie aus (10.) und (14.) hervorgeht, durchaus reell. Bewegt sich φ von Null bis $\frac{\pi}{2}$, so nimmt $C(p, \cos\varphi + i\sin\varphi)$ von 1 bis zu 0 ab, um dann ins Negative überzutreten, für $\varphi = \pi$ den Werth -1 zu erreichen, für $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ wieder 0 zu werden und nun wieder bis zu 1 zu wachsen. $D(p, \cos\varphi + i\sin\varphi)$ dagegen nimmt von 1 bis zur Grösse $\varkappa_1$ ab, die es für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ erreicht, wächst dann wieder bis zu 1 (für $\varphi = \pi$) und wiederholt im weiteren Verlaufe dieselbe Werthereihe. Es möge noch hierbei bemerkt werden, dass für reelle p die Grössen $\varkappa$ und $\varkappa_1$ reell, positiv und, wenn nicht $p = 0$ wird, kleiner als 1 sind. Aus der Gleichung

$$\varkappa_1 = \frac{\eta_0^2}{\eta_3^2} = \left[\frac{(1-p)(1-p^3)(1-p^5)\cdots}{(1+p)(1+p^3)(1+p^5)\cdots}\right]^4$$

geht dies für $\varkappa_1$ und aus der Gleichung (das Vorzeichen ergiebt sich aus der directen Entwicklung, wenn späteren Festsetzungen entsprechend $p^{\frac{1}{4}}$ für reelle p positiv genommen wird)

$$\varkappa^2 = 1 - \varkappa_1^2$$

auch für $\varkappa$ hervor.

Bei $S(p, x)$ wollen wir die Untersuchung noch etwas weiter verfolgen; es ist

$$S(p, x) = S\big(p, r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)$$
$$= \frac{S(p, \cos\varphi + i\sin\varphi)\,C(p, r)\,D(p, r) + C(p, \cos\varphi + i\sin\varphi)\,D(p, \cos\varphi + i\sin\varphi)\,S(p, r)}{1 - \varkappa^2 S^2(p, \cos\varphi + i\sin\varphi)\,S^2(p, r)}.$$

In diesem Ausdrucke ist der Nenner durchaus reell, während das erste Glied des Zählers reell, das zweite rein imaginär ist. Reell wird der Gesammtausdruck nur dann, wenn $S(p, r)$

verschwindet, d. h. $r = p^k$ ist, oder wenn $S(p, r)$ nebst $C(p, r)$ und $D(p, r)$ unendlich, d. h. $r = p^{\frac{1}{2}+k}$ wird, oder endlich, wenn

$$C(p, \cos\varphi + i\sin\varphi)$$

verschwindet, d. h.

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2}, \quad x = \pm ri$$

ist. Im letzten Falle ist

$$S(p, x) = S(p, \pm ir) = \pm \frac{C(p, r)}{D(p, r)};$$

für $r = 1$ wird dieser Ausdruck zu ± 1 und wächst beim Abnehmen oder Zunehmen des Argumentes zu $r = p^{\frac{1}{2}}$, resp. $r = p^{-\frac{1}{2}}$ bis zu $\pm \frac{1}{\varkappa}$ u. s. w. Ist $r = p^{\frac{1}{2}+k}$, so wird

$$S(p, x) = \frac{1}{\varkappa S(p, \cos\varphi + i\sin\varphi)},$$

ein Ausdruck, der für $\varphi = 0$ unendlich wird, für wachsende positive φ abnimmt, um für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ der Grösse $\frac{1}{\varkappa}$ gleich zu werden, dann wieder zu wachsen und bei $\varphi = \pi$ durchs Unendliche ins Negative überzugehen u. s. w. — Rein imaginäre Werthe für $S(p, x)$ finden wir ausser den schon besprochnen keine mehr. Das Hauptresultat lautet für reelle p:

$S(p, x)$ wird rein imaginär für alle auf der Abscissenaxe gelegenen x; es wird reell für diejenigen x, welche auf der Ordinatenaxe oder auf einem der mit den Radien $r = |p^k|$ oder $r = |p^{\frac{1}{2}+k}|$ um den Nullpunkt beschriebenen Kreise liegen; im Übrigen ist $S(p, x)$ complex.

6. Um auch zur Construction der Riemann'schen Fläche für $y = \arg S(p, x)$ zu gelangen, verfahren wir wie bei $\arcsin x$. Eine geeignete Parcellirung der y-Ebene für $x = S(p, y)$ erhalten wir dadurch, dass wir um den Nullpunkt Kreise mit den Radien $\left|p^{\frac{m}{2}}\right|$ beschreiben, worin m alle positiven und negativen ganzzahligen Werthe annimmt. (Vgl. Fig. 20.) Nummerirt man die Kreisringe in der Weise, wie dies in der für reelle, positive p construirten Figur geschehen ist, so wird ein im 0ten Ringe gelegenes y durch

$z = p^k y$ in einen dem $(2k)^{\text{ten}}$, durch $z = -\frac{1}{y}$ dagegen in einen dem ersten Ringe angehörigen Punkt transformirt u. s. w.

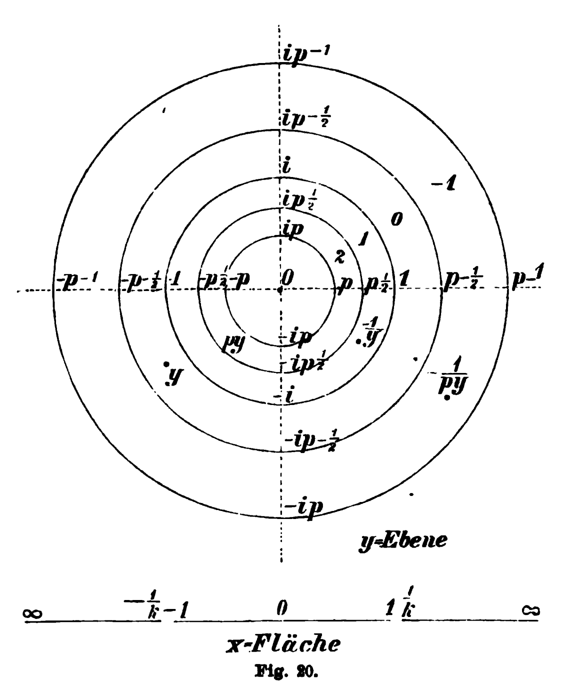


Fig. 20.

Die Function $x = S(p, y)$ bildet, wenn wir p der Einfachheit halber zunächst als reell annehmen, die Kreise mit den Radien p^k als eine Gerade ab, welche die Punkte $x = -1$ und $x = +1$ verbindet; denn nach dem Vorhergehenden ist

$$S\left(p, p^k(\cos\varphi + i \sin\varphi)\right) = S(p, \cos\varphi + i\sin\varphi)$$

reell und bewegt sich zwischen den Grenzen -1 und $+1$. Die Kreise mit den Radien $p^{k+\frac{1}{2}}$ dagegen werden als zwei Gerade abgebildet, welche von $x = -\frac{1}{\varkappa}$ und $x = +\frac{1}{\varkappa}$ aus nach links und rechts auf der Abscissenaxe ins Unendliche laufen*); denn es ist

*) Oder als *eine* Gerade, die von $x = +\frac{1}{\varkappa}$ auf der Abscissenaxe durchs Unendliche nach $x = -\frac{1}{\varkappa}$ führt.

$$S(p, p^{k+\frac{1}{2}}(\cos\varphi + i\sin\varphi)) = S(p, p^{\frac{1}{2}}(\cos\varphi + i\sin\varphi))$$
$$= \frac{1}{\varkappa S(p, \cos\varphi + i\sin\varphi)} \text{ u. s. w.}$$

Die erhaltenen Geraden in der x-Ebene sind die einzigen Verzweigungsschnitte der Riemann'schen Fläche für $y = \arg S(p, x)$. Da in der y-Ebene immer nur je zwei Parcellen in einem Punkte aneinander grenzen, so werden auch in der x-Fläche immer nur je zwei Blätter an jedem Verzweigungsschnitte paarweise zusammenzuheften sein. Bezeichnen wir diese Blätter den zugehörigen Parcellen der y-Ebene entsprechend, so werden wir auf der von $x = -1$ bis $x = +1$ führenden Geraden das $2k^{\text{te}}$ und das $(2k+1)^{\text{te}}$ Blatt, auf der von $x = -\frac{1}{\varkappa}$ nach $x = +\frac{1}{\varkappa}$ durchs Unendliche laufenden Geraden aber das $2k^{\text{te}}$ und das $(2k-1)^{\text{te}}$ Blatt paarweise zu verbinden haben. Verzweigungspunkte sind $x = \pm 1$ und $x = \pm\frac{1}{\varkappa}$, denen in der y-Ebene $y = \pm ip^k$ und $y = +ip^{k+\frac{1}{2}}$ entsprechen; denn nur für diese Werthe von y (abgesehen von den Punkten $y = 0$ und $y = \infty$, in denen keine Verzweigung stattfindet) fallen zwei der unendlich vielen y-Werthe, die durch

$$p, py, p^2y, \cdots \frac{y}{p}, \frac{y}{p^2}, \cdots; -\frac{1}{y}, -\frac{1}{py}, -\frac{1}{p^2y}, \cdots -\frac{p}{y}, -\frac{p^2}{y}, \cdots$$

repräsentirt werden, zusammen.

Die Verzweigungsschnitte können auch hier ebenso wie die Grenzen der Parcellen in der y-Ebene mannichfach modificirt werden; namentlich bleibt auch das Resultat dasselbe, wenn man an Stelle der durchs Unendliche laufenden Geraden irgend eine Verbindungslinie von $x = -\frac{1}{\varkappa}$ und $x = +\frac{1}{\varkappa}$ setzt, die mit dem anderen Verzweigungsschnitt nicht theilweise zusammenfällt. Ist p complex, so haben wir die gleichen Verzweigungspunkte $x = \pm 1$ und $x = \pm\frac{1}{\varkappa}$; da beim Übergang von reellen zu complexen p kein plötzlicher Sprung stattfindet, so wird auch die Zusammenheftung der Blätter wesentlich die gleiche bleiben müssen; als Verzweigungsschnitte benutzen wir irgend zwei nirgends zusammenfallende

Verbindungslinien der Punkte $x = -1$ und $x = +1$ einerseits und $x = -\frac{1}{\varkappa}$ und $x = +\frac{1}{\varkappa}$ andererseits.

§ 61.

Die Transformation der multiplicatorisch periodischen Functionen.

1. Genügt $F(p, x)$ der Gleichung

$$F(p, px) = F(p, x),$$

so besitzt auch $F(p^n, x^n)$ die multiplicatorische Periode p; denn es ist

$$F\big(p^n, (px)^n\big) = F(p^n, p^n x^n) = F(p^n, x^n);$$

ebenso hat $F\left(p^{\frac{1}{n}}, x\right)$ die gleiche Periode p, da es schon die Periode $p^{\frac{1}{n}}$ hat. Wir werden daher $F(p^n, x^n)$ und $F\left(p^{\frac{1}{n}}, x\right)$, falls $F(p, x)$ eindeutig ist und nur $x = 0$ und $x = \infty$ zu wesentlichen Unstetigkeitspunkten hat, als rationale Function von $S(p, x)$ und $C(p, x) D(p, x)$ darstellen können. Die wirkliche Durchführung dieser Transformation ist mit Hülfe der Formeln von § 55 ein Leichtes; es wird wieder genügen, die Rechnung für $n = 2$ und ungerade n auszuführen, da sich die übrigen Fälle durch Combination aus diesen ergeben.

2. Es ist

$$S(p^2, x^2) = \frac{\eta_3(p^2, 1)}{\eta_2(p^2, 1)} \frac{\eta_1(p^2, x^2)}{\eta_0(p^2, x^2)} = \frac{\eta_3(p^2, 1)}{\eta_2(p^2, 1)} \frac{\eta_1(p, x)\eta_2(p, x)}{\eta_0(p, x)\eta_3(p, x)}$$

und da, wenn man $\eta_3(p^2, 1)$ und $\eta_2(p^2, 1)$ in gleicher Weise transformirt,

$$(1.) \qquad \frac{\eta_3(p^2, 1)}{\eta_2(p^2, 1)} = \frac{\eta_2^{\,2}}{\eta_3^{\,2} - \eta_0^{\,2}}$$

wird,

$$(2.) \; S(p^2, x^2) = \frac{\eta_2^{\,2}}{\eta_3^{\,2} - \eta_0^{\,2}} \frac{\eta_1(p, x)\eta_2(p, x)}{\eta_0(p, x)\eta_3(p, x)} = \frac{\varkappa^2}{1 - \varkappa_1} \frac{S(p, x) C(p, x)}{D(p, x)}$$

$$= (1 + \varkappa_1) \frac{S(p, x) C(p, x)}{D(p, x)};$$

$$C(p^2, x^2) = \frac{\eta_3(p^2, 1)\eta_0^{\,2}(p^2, 1)}{\eta_2^{\,2}\eta_2(p^2, 1)} \frac{\eta_3^{\,2}(p, x) - \eta_0^{\,2}(p, x)}{\eta_0(p, x)\eta_3(p, x)},$$

oder da nach § 54, (2.)

$$\eta_0^{\,2}(p^2, 1) = \eta_0 \eta_3$$

ist und (1.) benutzt werden kann:

(3.) $$C(p^2, x^2) = \frac{\eta_0 \eta_3}{\eta_3^2 - \eta_0^2} \frac{\eta_3^2(p, x) - \eta_0^2(p, x)}{\eta_0(p, x)\eta_3(p, x)}$$

$$= \frac{\sqrt{\varkappa_1}}{1 - \varkappa_1}\left[\frac{1}{\sqrt{\varkappa_1}} D(p, x) - \frac{\sqrt{\varkappa_1}}{D(p, x)}\right]$$

$$= \frac{1 - \frac{\varkappa^2}{1 - \varkappa_1} S^2(p, x)}{D(p, x)} = \frac{1 - (1 + \varkappa_1) S^2(p, x)}{D(p, x)};$$

(4.) $$D(p^2, x^2) = \frac{\eta_0^2(p^2, 1)}{\eta_2^2} \frac{\eta_2^2(p, x) + \eta_1^2(p, x)}{\eta_0(p, x)\eta_3(p, x)}$$

$$= \frac{\eta_0 \eta_3}{\eta_2^2} \frac{\eta_0^2(p, x) + \eta_1^2(p, x)}{\eta_0(p, x)\eta_3(p, x)} = \frac{C^2(p, x) + \varkappa_1 S^2(p, x)}{D(p, x)}$$

$$= \frac{1 - (1 - \varkappa_1) S^2(p, x)}{D(p, x)}.$$

Bezeichnen wir jetzt bei $\varkappa$ und $\varkappa_1$ auch, soweit es nöthig ist, das Argument (den Parameter), so haben wir noch

(5.) $$\varkappa(p^2) = \frac{\eta_2^2(p^2, 1)}{\eta_3^2(p^2, 1)} = \left(\frac{\eta_3^2 - \eta_0^2}{\eta_2^2}\right)^2 = \frac{(1 - \varkappa_1)^2}{\varkappa^2}$$

$$= \frac{(1 - \varkappa_1)^2}{1 - \varkappa_1^2} = \frac{1 - \varkappa_1}{1 + \varkappa_1}$$

und umgekehrt

(6.) $$\varkappa = \frac{2\sqrt{\varkappa(p^2)}}{1 + \varkappa(p^2)}.$$

2. Für ungerade n haben wir*)

(7.) $$S(p^n, x^n)$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\eta_3(p^n, 1)}{\eta_2(p^n, 1)} \frac{\eta_2^n}{\eta_3^n} S(p, x) S(p, \alpha x) S(p, \alpha^2 x) \cdots S(p, \alpha^{n-1} x)$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\eta_3(p^n, 1)}{\eta_2(p^n, 1)} \frac{\eta_2^n}{\eta_3^n} S(p, x) S(p, \alpha x) S\left(p, \frac{x}{\alpha}\right) S(p, \alpha^2 x) S\left(p, \frac{x}{\alpha^2}\right) \cdots$$

$$\cdot S\left(p, \alpha^{\frac{n-1}{2}} x\right) S\left(p, \frac{x}{\alpha^{\frac{n-1}{2}}}\right).$$

*) An Stelle der Quotienten von η-Functionen mit dem Argumente 1 kann man natürlich auch die Grössen $\varkappa$ und $\varkappa_1$ und deren Transformationen in die nächsten Formeln einführen; doch kommen auf diese Weise Irrationalitäten in dieselben.

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\eta_3(p^n,1)}{\eta_2(p^n,1)} \frac{\eta_2{}^n}{\eta_3{}^n} S(p,x) \frac{S^2(p,x) - S^2(p,\alpha)}{1 - \varkappa^2 S^2(p,\alpha) S^2(p,x)}$$

$$\cdot \frac{S^2(p,x) - S^2(p,\alpha^2)}{1 - \varkappa^2 S^2(p,\alpha^2) S^2(p,x)} \cdots \frac{S^2(p,x) - S^2\left(p,\alpha^{\frac{n-1}{2}}\right)}{1 - \varkappa^2 S^2\left(p,\alpha^{\frac{n-1}{2}}\right) S^2(p,x)},$$

(8.) $C(p^n, x^n)$

$$= \frac{\eta_0(p^n,1)}{\eta_2(p^n,1)} \frac{\eta_2{}^n}{\eta_0{}^n} C(p,x) C(p,\alpha x) C(p,\alpha^2 x) \cdots C(p,\alpha^{n-1} x)$$

$$= \frac{\eta_0(p^n,1)}{\eta_2(p^n,1)} \frac{\eta_2{}^n}{\eta_0{}^n} C(p,x) \left[\frac{C^2(p,x) + C^2(p,\alpha)}{1 - \varkappa^2 S^2(p,\alpha) S^2(p,x)} - 1\right]$$

$$\cdot \left[\frac{C^2(p,x) + C^2(p,\alpha^2)}{1 - \varkappa^2 S^2(p,\alpha^2) S^2(p,x)} - 1\right] \cdots \left[\frac{C^2(p,x) + C^2(p,\alpha^{n-1})}{1 - \varkappa^2 S^2\left(p,\alpha^{\frac{n-1}{2}}\right) S^2(p,x)} - 1\right],$$

(9.) $D(p^n, x^n)$

$$= \frac{\eta_0(p^n,1)}{\eta_3(p^n,1)} \frac{\eta_3{}^n}{\eta_0{}^n} D(p,x) D(p,\alpha x) D(p,\alpha^2 x) \cdots D(p,\alpha^{n-1} x)$$

$$= \frac{\eta_0(p^n,1)}{\eta_3(p^n,1)} \frac{\eta_3{}^n}{\eta_0{}^n} D(p,x) \left[\frac{D^2(p,x) + D^2(p,\alpha)}{1 - \varkappa^2 S^2(p,\alpha) S^2(p,x)} - 1\right]$$

$$\cdot \left[\frac{D^2(p,x) + D^2(p,\alpha^2)}{1 - \varkappa^2 S^2(p,\alpha^2) S^2(p,x)} - 1\right] \cdots \left[\frac{D^2(p,x) + D^2\left(p,\alpha^{\frac{n-1}{2}}\right)}{1 - \varkappa^2 S^2\left(p,\alpha^{\frac{n-1}{2}}\right) S^2(p,x)} - 1\right].$$

Setzen wir in (8.) und (9.) $x = 1$, so folgt

$$(10.) \qquad \sqrt{\frac{\varkappa(p^n)}{\varkappa_1(p^n)}} = \left(\frac{\varkappa}{\varkappa_1}\right)^{\frac{n}{2}} C(p,\alpha) C(p,\alpha^2) \cdots C(p,\alpha^{n-1})$$

und

$$(11.) \qquad \frac{1}{\sqrt{\varkappa_1(p^n)}} = \frac{1}{\varkappa_1^{\frac{n}{2}}} D(p,\alpha) D(p,\alpha^2) \cdots D(p,\alpha^{n-1}),$$

also

$$(12.) \qquad \sqrt{\varkappa(p^n)} = \varkappa^{\frac{n}{2}} \frac{C(p,\alpha)}{D(p,\alpha)} \frac{C(p,\alpha^2)}{D(p,\alpha^2)} \cdots \frac{C(p,\alpha^{n-1})}{D(p,\alpha^{n-1})}$$

$$= \varkappa^{\frac{n}{2}} \left[\frac{C(p,\alpha)}{D(p,\alpha)} \frac{C(p,\alpha^2)}{D(p,\alpha^2)} \cdots \frac{C\left(p,\alpha^{\frac{n-1}{2}}\right)}{D\left(p,\alpha^{\frac{n-1}{2}}\right)}\right]^2$$

und

$$(13.) \qquad \sqrt{\varkappa_1(p^n)} = \frac{\varkappa_1^{\frac{n}{2}}}{\left[D(p,\alpha) D(p,\alpha^2) \cdots D\left(p,\alpha^{\frac{n-1}{2}}\right)\right]^2}.$$

3. Weiter ist

$$(14.)\quad S(p^{\frac{1}{2}}, x) = \frac{\eta_3(p^{\frac{1}{2}}, 1)}{\eta_2(p^{\frac{1}{2}}, 1)} \frac{\eta_2(p^{\frac{1}{2}}, 1)\eta_0{}^2\eta_0(p, x)\eta_1(p, x)}{\eta_2\eta_3\eta_3(p^{\frac{1}{2}}, 1)[\eta_3{}^2(p, x) - \eta_2{}^2(p, x)]}$$

$$= \frac{\eta_0{}^2}{\eta_2\eta_3} \frac{\eta_0(p, x)\eta_1(p, x)}{\eta_3{}^2(p, x) - \eta_2{}^2(p, x)} = \varkappa_1{}^2 \frac{S(p, x)}{D^2(p, x) - \varkappa C^2(p, x)}$$

$$= \frac{\varkappa_1{}^2}{1-\varkappa} \frac{S(p, x)}{1 + \varkappa S^2(p, x)} = \frac{(1+\varkappa)S(p, x)}{1 + \varkappa S^2(p, x)},$$

$$C(p^{\frac{1}{2}}, x) = \frac{\eta_0(p^{\frac{1}{2}}, 1)}{\eta_3(p^{\frac{1}{2}}, 1)} \frac{\eta_2(p^{\frac{1}{2}}, 1)\eta_0{}^2\eta_2(p, x)\eta_3(p, x)}{\eta_2\eta_3\eta_3(p^{\frac{1}{2}}, 1)[\eta_3{}^2(p, x) - \eta_2{}^2(p, x)]}$$

$$= \frac{\eta_0(p^{\frac{1}{2}}, 1)}{\eta_3(p^{\frac{1}{2}}, 1)} \frac{\varkappa_1 C(p, x)D(p, x)}{D^2(p, x) - \varkappa C^2(p, x)}$$

oder, da für $x = 1$ hieraus

$$1 = \frac{\eta_0(p^{\frac{1}{2}}, 1)}{\eta_3(p^{\frac{1}{2}}, 1)} \frac{\varkappa_1}{1-\varkappa}$$

wird:

$$(15.)\quad C(p^{\frac{1}{2}}, x) = \frac{(1-\varkappa)C(p, x)D(p, x)}{D^2(p, x) - \varkappa C^2(p, x)} = \frac{C(p, x)D(p, x)}{1 + \varkappa S^2(p, x)};$$

$$(16.)\quad D(p^{\frac{1}{2}}, x) = \frac{\eta_0(p^{\frac{1}{2}}, 1)}{\eta_3(p^{\frac{1}{2}}, 1)} \frac{\eta_0{}^2(p, x) - \eta_1{}^2(p, x)}{\eta_3{}^2(p, x) - \eta_2{}^2(p, x)}$$

$$= \frac{1-\varkappa}{\varkappa_1} \frac{\eta_0(p, x) - \eta_1{}^2(p, x)}{\eta_3{}^2(p, x) - \eta_2{}^2(p, x)} = (1-\varkappa) \frac{1 - \varkappa S^2(p, x)}{D^2(p, x) - \varkappa C^2(p, x)}$$

$$= \frac{1 - \varkappa S^2(p, x)}{1 + \varkappa S^2(p, x)}.$$

Für $\varkappa(p^{\frac{1}{2}})$ haben wir bereits nach (6.)

$$(17.)\quad \varkappa(p^{\frac{1}{2}}) = \frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}.$$

4. Für ungerade n ist:

$$(18.)\quad S(p^{\frac{1}{n}}, x) = \frac{\eta_3(p^{\frac{1}{n}}, 1)}{\eta_2(p^{\frac{1}{n}}, 1)} \frac{\eta_2{}^n}{\eta_3{}^n} S(p, x) S\left(p, \frac{x}{p^{\frac{1}{n}}}\right) S(p, p^{\frac{1}{n}} x)$$

$$S\left(p, \frac{x}{p^{\frac{2}{n}}}\right) S(p, p^{\frac{2}{n}} x) \cdots S\left(p, \frac{x}{p^{\frac{n-1}{2n}}}\right) S(p, p^{\frac{n-1}{2n}} x)$$

$$= \frac{\eta_3\left(p^{\frac{1}{n}}, 1\right)}{\eta_2\left(p^{\frac{1}{n}}, 1\right)} \frac{\eta_2^n}{\eta_3^n} S(p, x) \frac{S^2(p, x) - S^2\left(p, p^{\frac{1}{n}}\right)}{1 - \varkappa^2 S^2\left(p, p^{\frac{1}{n}}\right) S^2(p, x)}$$

$$\cdot \frac{S^2(p, x) - S^2\left(p, p^{\frac{2}{n}}\right)}{1 - \varkappa^2 S^2\left(p, p^{\frac{2}{n}}\right) S^2(p, x)} \cdots \frac{S^2(p, x) - S^2\left(p, p^{\frac{n-1}{2n}}\right)}{1 - \varkappa^2 S^2\left(p, p^{\frac{n-1}{2n}}\right) S^2(p, x)};$$

$$(19.)\quad C\left(p^{\frac{1}{n}}, x\right) = \frac{\eta_0\left(p^{\frac{1}{n}}, 1\right)}{\eta_2\left(p^{\frac{1}{n}}, 1\right)} \frac{\eta_2^n}{\eta_0^n} C(p, x) C\left(p, \frac{x}{p^{\frac{1}{n}}}\right) C\left(p, p^{\frac{1}{n}} x\right)$$

$$\cdot C\left(p, \frac{x}{p^{\frac{2}{n}}}\right) C\left(p, p^{\frac{2}{n}} x\right) \cdots C\left(p, \frac{x}{p^{\frac{n-1}{2n}}}\right) C\left(p, p^{\frac{n-1}{2n}} x\right)$$

$$= \frac{\eta_0\left(p^{\frac{1}{n}}, 1\right)}{\eta_2\left(p^{\frac{1}{n}}, 1\right)} \frac{\eta_2^n}{\eta_0^n} C(p, x) \left[\frac{C^2(p, x) + C^2\left(p, p^{\frac{1}{n}}\right)}{1 - \varkappa^2 S^2\left(p, p^{\frac{1}{n}}\right) S^2(p, x)} - 1\right]$$

$$\cdot \left[\frac{C^2(p, x) + C^2\left(p, p^{\frac{2}{n}}\right)}{1 - \varkappa^2 S^2\left(p, p^{\frac{2}{n}}\right) S^2(p, x)} - 1\right] \cdots \left[\frac{C^2(p, x) + C^2\left(p, p^{\frac{n-1}{2n}}\right)}{1 - \varkappa^2 S^2\left(p, p^{\frac{n-1}{2n}}\right) S^2(p, x)} - 1\right];$$

$$(20.)\quad D\left(p^{\frac{1}{n}}, x\right) = \frac{\eta_0\left(p^{\frac{1}{n}}, 1\right)}{\eta_3\left(p^{\frac{1}{n}}, 1\right)} \frac{\eta_3^n}{\eta_0^n} D(p, x) D\left(p, \frac{x}{p^{\frac{1}{n}}}\right) D\left(p, p^{\frac{1}{n}} x\right)$$

$$\cdot D\left(p, \frac{x}{p^{\frac{2}{n}}}\right) D\left(p, p^{\frac{2}{n}} x\right) \cdots D\left(p, \frac{x}{p^{\frac{n-1}{2n}}}\right) D\left(p, p^{\frac{n-1}{2n}} x\right)$$

$$= \frac{\eta_0\left(p^{\frac{1}{n}}, 1\right)}{\eta_3\left(p^{\frac{1}{n}}, 1\right)} \frac{\eta_3^n}{\eta_0^n} D(p, x) \left[\frac{D^2(p, x) + D^2\left(p, p^{\frac{1}{n}}\right)}{1 - \varkappa^2 S^2\left(p, p^{\frac{1}{n}}\right) S^2(p, x)} - 1\right]$$

$$\cdot \left[\frac{D^2(p, x) + D^2\left(p, p^{\frac{2}{n}}\right)}{1 - \varkappa^2 S^2\left(p, p^{\frac{2}{n}}\right) S^2(p, x)} - 1\right] \cdots \left[\frac{D^2(p, x) + D^2\left(p, p^{\frac{n-1}{2n}}\right)}{1 - \varkappa^2 S^2\left(p, p^{\frac{n-1}{2n}}\right) S^2(p, x)} - 1\right].$$

Weiter finden wir

$$(21.)\quad \sqrt{\frac{\varkappa\left(p^{\frac{1}{n}}\right)}{\varkappa_1\left(p^{\frac{1}{n}}\right)}} = \left(\frac{\varkappa}{\varkappa_1}\right)^{\frac{n}{2}} \left[C\left(p, p^{\frac{1}{n}}\right) C\left(p, p^{\frac{2}{n}}\right) \cdots C\left(p, p^{\frac{n-1}{2n}}\right)\right]^2$$

und

$$(22.)\quad \frac{1}{\sqrt{\varkappa_1\left(p^{\frac{1}{n}}\right)}} = \frac{1}{\varkappa_1^{\frac{n}{2}}} \left[D\left(p, p^{\frac{1}{n}}\right) D\left(p, p^{\frac{2}{n}}\right) \cdots D\left(p, p^{\frac{n-1}{2n}}\right)\right]^2,$$

also

$$(23.)\quad \sqrt{\varkappa\left(p^{\frac{1}{n}}\right)} = \varkappa^{\frac{n}{2}} \left[\frac{C\left(p, p^{\frac{1}{n}}\right)}{D\left(p, p^{\frac{1}{n}}\right)} \frac{C\left(p, p^{\frac{2}{n}}\right)}{D\left(p, p^{\frac{2}{n}}\right)} \cdots \frac{C\left(p, p^{\frac{n-1}{2n}}\right)}{D\left(p, p^{\frac{n-1}{2n}}\right)}\right]^2$$

und

$$(24.)\quad \sqrt{\varkappa_1\left(p^{\frac{1}{n}}\right)} = \frac{\varkappa_1^{\frac{n}{2}}}{\left[D\left(p, p^{\frac{1}{n}}\right) D\left(p, p^{\frac{2}{n}}\right) \cdots D\left(p, p^{\frac{n-1}{2n}}\right)\right]^2}.$$

Die Ähnlichkeit zwischen den reciproken Transformationen $\left(\text{von } p \text{ zu } p^n \text{ und von } p \text{ zu } p^{\frac{1}{n}}\right)$ tritt hier wieder sehr deutlich hervor.

5. Setzt man in § 60, (4.), nämlich

$$S(p, x) = -\frac{2i}{\eta_2^2}\left[\frac{p^{\frac{1}{2}}}{1-p}\left(x - \frac{1}{x}\right) + \frac{p^{\frac{3}{2}}}{1-p^3}\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) + \frac{p^{\frac{5}{2}}}{1-p^5}\left(x^5 - \frac{1}{x^5}\right) + \cdots\right]$$

für x der Reihe nach $x, \alpha x, \alpha^2 x, \ldots \alpha^{n-1} x$, wobei wieder α eine primitive n^{te} Wurzel, n eine ungerade Zahl bezeichnet, so erhält man durch Summation dieser Ausdrücke, da alle Potenzsummen der n^{ten} Wurzeln bis auf die $(kn)^{\text{ten}}$ verschwinden:

$$S(p, x) + S(p, \alpha x) + S(p, \alpha^2 x) + \cdots S(p, \alpha^{n-1} x)$$

$$= -\frac{2in}{\eta_2^2}\left[\frac{p^{\frac{n}{2}}}{1-p^n}\left(x^n - \frac{1}{x^n}\right) + \frac{p^{\frac{3n}{2}}}{1-p^{3n}}\left(x^{3n} - \frac{1}{x^{3n}}\right) + \frac{p^{\frac{5n}{2}}}{1-p^{5n}}\left(x^{5n} - \frac{1}{x^{5n}}\right) + \cdots\right]$$

oder

$$(25.)\quad S(p,x)+S(p,\alpha x)+S(p,\alpha^2 x)+\cdots+S(p,\alpha^{n-1}x) = n\,\frac{\eta_2{}^2(p^n,1)}{\eta_2{}^2}\,S(p^n,x^n).$$

Ebenso findet man unter Berücksichtigung, dass

$$\frac{1}{p^{\frac{n-1}{2n}}}+\frac{1}{p^{\frac{n-3}{2n}}}+\cdots+\frac{1}{p^{\frac{1}{n}}}+1+p^{\frac{1}{n}}+p^{\frac{2}{n}}+\cdots+p^{\frac{n-1}{2n}}$$

$$=\frac{1}{p^{\frac{n-1}{2n}}}\left[1+p^{\frac{1}{n}}+p^{\frac{2}{n}}+\cdots+p^{\frac{n-1}{n}}\right]=\frac{1}{p^{\frac{n-1}{2n}}}\,\frac{1-p}{1-p^{\frac{1}{n}}}\ \text{u. s. w.}$$

ist:

$$(26.)\quad S\left(p,\frac{x}{p^{\frac{n-1}{2n}}}\right)+S\left(p,\frac{x}{p^{\frac{n-3}{2n}}}\right)+\cdots+S\left(p,\frac{x}{p^{\frac{1}{n}}}\right)+S(p,x)$$

$$+S\left(p,p^{\frac{1}{n}}x\right)+S\left(p,p^{\frac{2}{n}}x\right)+\cdots+S\left(p,p^{\frac{n-1}{2n}}x\right)$$

$$=-\frac{2i}{\eta_2{}^2}\left[\frac{p^{\frac{1}{2n}}}{1-p^{\frac{1}{n}}}\left(x-\frac{1}{x}\right)+\frac{p^{\frac{3}{2n}}}{1-p^{\frac{3}{n}}}\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)+\frac{p^{\frac{5}{2n}}}{1-p^{\frac{5}{n}}}\left(x^5-\frac{1}{x^5}\right)+\cdots\right]$$

$$=\frac{\eta_2{}^2\left(p^{\frac{1}{n}},1\right)}{\eta_2{}^2}\,S\left(p^{\frac{1}{n}},x\right).$$

Die linken Seiten von (25.) und (26.) können selbstverständlich mit Hülfe des Multiplicationstheorems für $S(p,x)$ noch weiter umgeformt werden. Dass diese Gleichungen nicht nur für diejenigen x gelten, für die die Reihe § 60, (4.) convergirt, geht aus dem analytischen Charakter der Functionen $S(p,x)$, $S(p^n,x^n)$, $S\left(p^{\frac{1}{n}},x\right)$ hervor, die sich nur auf *eine* Art erweitern lassen.

§ 62.

Die Potenzirung der multiplicatorisch periodischen Functionen.

1. Aus den in § 57 aufgestellten Multiplicationstheoremen für $S(p, x)$, $C(p, x)$, $D(p, x)$ folgt unmittelbar, *dass sich $S(p, x^n)$, $C(p, x^n)$, $D(p, x^n)$ als rationale Functionen von $S(p, x)$, $C(p, x)$, $D(p, x)$ und der Grösse $\varkappa^2$ darstellen lassen.* So ist z. B.

$$(1.)\qquad S(p, x^2) = \frac{2C(p, x)D(p, x)S(p, x)}{1 - \varkappa^2 S^4(p, x)},$$

$$(2.)\qquad C(p, x^2) = \frac{C^2(p, x) - S^2(p, x)D^2(p, x)}{1 - \varkappa^2 S^4(p, x)}$$

$$= \frac{1 - 2S^2(p, x) + \varkappa^2 S^4(p, x)}{1 - \varkappa^2 S^4(p, x)},$$

$$(3.)\qquad D(p, x^2) = \frac{D^2(p, x) - \varkappa^2 S^2(p, x)C^2(p, x)}{1 - \varkappa^2 S^4(p, x)}$$

$$= \frac{1 - 2\varkappa^2 S^2(p, x) + \varkappa^2 S^4(p, x)}{1 - \varkappa^2 S^4(p, x)},$$

und es hat keine principiellen Schwierigkeiten, durch Induction allgemeinere Gesetze über die Bildung der Ausdrücke $S(p, x^n)$ aufzustellen. Wir verzichten jedoch auf diese Untersuchung, die uns doch zu keinen übersichtlichen Resultaten führt, und schlagen einen ganz anderen Weg ein, der freilich das Missliche hat, dass er uns die Coefficienten der Ausdrücke nicht als Functionen von $\varkappa^2$ allein, sondern auch von ganz anderen Ausdrücken liefert.

2. Bezeichnet $f(p, x)$ eine eindeutige Function mit zwei wesentlichen Discontinuitätspunkten und mit der multiplicatorischen Periode p, so sahen wir, dass sich $f(p^n, x^n)$ als rationale Function von $S(p, x)$, $C(p, x)$, $D(p, x)$, also $f(p, x^n)$ als rationale Function von $S\left(p^{\frac{1}{n}}, x\right)$, $C\left(p^{\frac{1}{n}}, x\right)$, $D\left(p^{\frac{1}{n}}, x\right)$ darstellen lässt, während andererseits wieder die letzteren Grössen rational durch $S(p, x)$, $C(p, x)$, $D(p, x)$ ausdrückbar sind (§ 61). *Durch aufeinanderfolgende Anwendung inverser Transformationen gelangt man also zur Potenzirung*).*

*) Jacobi, Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. Gesammelte Werke, Bd. I, pag. 111.

3. In Hinblick auf die Formeln (1.), (2.), (3.) wird es genügen, wenn wir die Untersuchung nur für ungerade n durchführen. Es ist nach § 61

$$S(p, x^n) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\eta_3}{\eta_2} \frac{\eta_2^n\left(p^{\frac{1}{n}}, 1\right)}{\eta_3^n\left(p^{\frac{1}{n}}, 1\right)} S\left(p^{\frac{1}{n}}, x\right) S\left(p^{\frac{1}{n}}, \alpha x\right)$$

$$\cdot S\left(p^{\frac{1}{n}}, \alpha^2 x\right) \cdots S\left(p^{\frac{1}{n}}, \alpha^{n-1} x\right)$$

und weiter, da

$$S\left(p^{\frac{1}{n}}, \alpha^k x\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\eta_3\left(p^{\frac{1}{n}}, 1\right)}{\eta_2\left(p^{\frac{1}{n}}, 1\right)} \frac{\eta_2^n}{\eta_3^n} S(p, \alpha^k x) S\left(p, \frac{\alpha^k x}{p^{\frac{1}{n}}}\right)$$

$$\cdot S\left(p, p^{\frac{1}{n}} \alpha^k x\right) S\left(p, \frac{\alpha^k x}{p^{\frac{2}{n}}}\right) S\left(p, p^{\frac{2}{n}} \alpha^k x\right) \cdots S\left(p, \frac{\alpha^k x}{p^{\frac{n-1}{2n}}}\right)$$

$$\cdot S\left(p, p^{\frac{n-1}{2n}} \alpha^k x\right)$$

ist,

$$S(p, x^n) = CS(p, x) \prod_{m, k} S\left(p, \frac{x}{\alpha^k p^{\frac{m}{n}}}\right) S\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}} x\right),$$

worin k die Werthe $0, 1, 2, \ldots \frac{n-1}{2}$, m dagegen im Allgemeinen die Werthe $0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \frac{n-1}{2}$, wenn jedoch $k = 0$ ist, nur die Werthe $1, 2, 3, \ldots \frac{n-1}{2}$ zu durchlaufen hat. Hieraus wird weiter

$$S(p, x^n) = CS(p, x) \prod_{m, k} \frac{S^2(p, x) - S^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)}{1 - \varkappa^2 S^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right) S^2(p, x)}$$

oder unter Einführung einer neuen Constanten c

$$S(p, x^n) = cS(p, x) \prod_{m, k} \frac{1 - \frac{S^2(p, x)}{S^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)}}{1 - \varkappa^2 S^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right) S^2(p, x)}.$$

Um die Constante c zu ermitteln, setzen wir $x = 1$, also $S(p, x) = 0$, und finden

$$c = \left[\frac{S(p, x^n)}{S(p, x)}\right]_{x=1}$$

oder, wenn wir in $\frac{S(p, x^n)}{S(p, x)}$ die für $x = 1$ übereinstimmenden und endlich bleibenden Factoren weglassen,

$$c = \left[\frac{1 - x^n}{1 - x}\right]_{x=1} = [1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}]_{x=1} = n.$$

Wir haben also

$$(4.)\qquad S(p, x^n) = nS(p, x) \prod_{m,k} \frac{1 - \dfrac{S^2(p, x)}{S^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)}}{1 - \varkappa^2 S^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right) S^2(p, x)}.$$

In gleicher Weise finden wir, indem wir wieder behufs Constantenbestimmung den Specialwerth $x = 1$ benutzen:

$$(5.)\qquad C(p, x^n) = C(p, x) \prod_{m,k} \frac{1 - \dfrac{D^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right) S^2(p, x)}{C^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)}}{1 - \varkappa^2 S^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right) S^2(p, x)}$$

und

$$(6.)\qquad D(p, x^n) = D(p, x) \prod_{m,k} \frac{1 - \varkappa^2 \dfrac{C^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right) S^2(p, x)}{D^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)}}{1 - \varkappa^2 S^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right) S^2(p, x)}.$$

$S(p, x^n)$ ist also eine rationale Function von $S(p, x)$, deren Zähler bis zum Grade n^2 und deren Nenner bis zum Grade $n^2 - 1$ ansteigt; bei $C(p, x^n)$ und $D(p, x^n)$ sind Zähler und Nenner in $S^2(p, x)$ vom Grade $\frac{n^2 - 1}{2}$, während noch der Factor $C(p, x)$, resp. $D(p, x)$ hinzutritt.

4. Setzt man in (4.) $x = i$, also $x^n = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$, so folgt

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} = n \prod_{m,k} \frac{1 - \frac{1}{S^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)}}{1 - \varkappa^2 S^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)}$$

$$= (-1)^{\frac{n^2-1}{2}} n \prod_{m,k} \frac{C^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)}{S^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right) D^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)}$$

oder, da

$$(-1)^{\frac{n^2-1}{2}} = 1 \quad \text{ist,}$$

$$(7.) \qquad n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{m,k} \frac{S^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right) D^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)}{C^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)}.$$

Nimmt man auch in (5.) $x = i$, so erhält man weiter

$$\left[\frac{C(p, x^n)}{C(p, x)}\right]_{x=1} = \left[\frac{C(p, i^n x^n)}{C(p, ix)}\right]_{x=1} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{C(p, ix^n)}{C(p, ix)}\right]_{x=1}$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{S(p, x^n) D(p, x)}{S(p, x) D(p, x^n)}\right]_{x=1} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{S(p, x^n)}{S(p, x)}\right]_{x=1}$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} n = \prod_{m,k} \frac{-\varkappa_1{}^2 S^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)}{C^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right) D^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)}$$

$$= \varkappa_1{}^{n^2-1} \prod_{m,k} \frac{S^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)}{C^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right) D^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)},$$

also

$$(8.) \quad \varkappa_1{}^{n^2-1} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \prod_{m,k} \frac{C^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right) D^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)}{S^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)}$$

oder mit Hülfe von (7.)

$$(9.) \qquad \varkappa_1{}^{n^2-1} = \prod_{m,k} D^4\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right).$$

Zieht man beiderseits die vierte Wurzel aus ($n^2 - 1$ ist sogar durch 8 theilbar!), so folgt

$$(10.)\qquad \varkappa_1^{\frac{n^2-1}{4}} = \prod_{m,k} D\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right);$$

dass hierin das Zeichen richtig gewählt ist, geht daraus hervor, dass beide Seiten der Gleichung für $p = 0$ in 1 übergehen, wie aus den Entwicklungen für $\eta_0(p, x)$ und $\eta_3(p, x)$ unmittelbar zu sehen ist.

Die Gleichung (6.) liefert für $x = i$

$$1 = \prod_{m,k} \frac{\varkappa_1^2}{D^4\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)},$$

d. h. die Gleichung (9.).

Setzen wir schliesslich in (4.) $x = p^{\frac{1}{2}}$, so wird

$$\left[\frac{S(p, x^n)}{S(p, x)}\right]_{x=p^{\frac{1}{2}}} = \left[\frac{S\left(p, p^{\frac{n}{2}} x^n\right)}{S\left(p, p^{\frac{1}{2}} x\right)}\right]_{x=1} = \left[\frac{S\left(p, p^{\frac{1}{2}} x^n\right)}{S\left(p, p^{\frac{1}{2}} x\right)}\right]_{x=1}$$

$$= \left[\frac{S(p, x)}{S(p, x^n)}\right]_{x=1} = \frac{1}{n}$$

$$= n \prod_{m,k} \frac{1}{\varkappa^2 S^4\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)}$$

$$= \frac{n}{\varkappa^{n^2-1}} \prod_{m,k} \frac{1}{S^4\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)},$$

also

$$(11.)\qquad \varkappa^{n^2-1} = n^2 \prod_{m,k} \frac{1}{S^4\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)},$$

woraus mit Hülfe von (7.) wird:

$$(12.)\qquad \varkappa^{n^2-1} = \prod_{m,k} \frac{D^4\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)}{C^4\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)}.$$

Ziehen wir die vierte Wurzel aus, so folgt

$$\varkappa^{\frac{n^2-1}{4}} = \varepsilon \prod_{m,k} \frac{D\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)}{C\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)},$$

wo ε eine vierte Einheitswurzel ist, deren Bestimmung eine eingehendere Untersuchung verlangt. Nähert sich p der Null, so geht $\varkappa^{\frac{n^2-1}{4}}$ in $2^{\frac{n^2-1}{2}} p^{\frac{n^2-1}{8}}$ über. Da $\frac{D(p, x)}{C(p, x)}$ für $p = 0$ in $\frac{2x}{1 + x^2}$ übergeht, so handelt es sich um den Werth des Productes

$$\prod_{m,k} \frac{\alpha^k p^{\frac{m}{n}}}{1 + \alpha^{2k} p^{\frac{2m}{n}}}.$$

Nun nähert sich aber bei verschwindendem p und positivem m die Grösse $\frac{\alpha^k p^{\frac{m}{n}}}{1 + \alpha^{2k} p^{\frac{2m}{2}}}$ dem Werthe $\alpha^k p^{\frac{m}{n}}$, für negative m dagegen $\frac{1}{\alpha^k p^{\frac{m}{n}}}$, so dass in dem Producte der Factoren, in denen nicht $m = 0$ ist, die α^k wegfallen, während p natürlich in derselben Potenz wie auf der linken Seite auftritt. Es handelt sich demnach nur um das Product der Factoren, in denen $m = 0$ ist, d. h. um

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_k \frac{\alpha^k}{1 + \alpha^{2k}}.$$

Nun ist aber*)

$$\frac{1 + \alpha^{2k}}{\alpha^k} = \alpha^k + \frac{1}{\alpha^k} = e^{\frac{2ki\pi}{n}} + e^{-\frac{2ki\pi}{n}} = 2 \cos \frac{2k\pi}{n}$$

eine *reelle* Grösse, woraus wir schon schliessen, dass $\varepsilon = \pm 1$ sein muss. Ferner haben in

$$\cos \frac{2\pi}{n} \cos \frac{4\pi}{n} \cos \frac{6\pi}{n} \cdots \cos \frac{(n-1)\pi}{n}$$

diejenigen Factoren das positive Zeichen, für die

$$\frac{2k\pi}{n} < \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad 4k < n$$

*) Nimmt man für α eine andere primitive n^{te} Einheitswurzel wie die hier gewählte, so bleibt das Resultat ungeändert, wie einfache Betrachtungen zeigen.

ist. Mag nun $n = 4r + 1$ oder $n = 4r + 3$ sein, so ist immer die Zahl der positiven Factoren r; negativ sind also im ersten Falle

$$\frac{n-1}{2} - r = \frac{4r}{2} - r = r = \frac{n-1}{4},$$

im zweiten Falle

$$\frac{n-1}{2} - r = \frac{4r+2}{2} - r = r + 1 = \frac{n+1}{4}$$

Factoren. Wir schliessen hieraus, dass

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{n-1}{4}}$$

oder

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{n+1}{4}}$$

ist, je nachdem $n = 4r + 1$ oder $n = 4r + 3$ ist. Beide Fälle werden in dem Ausdruck

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$$

zusammengefasst, da im ersten Falle

$$(-1)^{\frac{n^2-1}{8}} = (-1)^{2r^2+r} = (-1)^r = (-1)^{\frac{n-1}{4}},$$

im zweiten

$$(-1)^{\frac{n^2-1}{8}} = (-1)^{2r^2+3r+1} = (-1)^{3r+1} = (-1)^{r+1} = (-1)^{\frac{n+1}{4}}$$

ist. Wir haben also schliesslich die wichtige Formel

$$(13.)\qquad \varkappa^{\frac{n^2-1}{4}} = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \prod_{m,k} \frac{D\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)}{C\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)}.$$

Aus (10.) und (13.) folgt noch

$$\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\right)^{\frac{n^2-1}{4}} = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \prod_{m,k} C\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right).$$

Die Formeln für *gerade* n sind denen für *ungerade* sehr ähnlich.

§ 63.

Das Radiciren der multiplicatorisch periodischen Functionen.

1. Wir haben im vorigen Paragraphen gesehen, dass sich $S(p,x)$ — mit dieser Transcendenten wollen wir uns im Folgenden allein beschäftigen — als rationale Function von $S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)$ und eventuell auch von $C\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right) D\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)$ darstellen lässt. Hieraus geht unmittelbar hervor, dass $S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)$ eine *algebraische Function* von $S(p,x)$ ist, also *durch eine algebraische Gleichung bestimmt ist, deren Coefficienten* $S(p,x)$ *rational enthalten.* Die folgende, von Abel herrührende*) Untersuchung stellt sich nun die Aufgabe, nachzuweisen, dass diese Gleichung *mit Hülfe der vier Species und Wurzelausziehungen* lösbar ist, dass sich also $S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)$ mit Hülfe dieser Operationen aus $S(p,x)$ berechnen lässt.

2. Ist $n = 2$, so folgt aus § 62, (1.)

$$S^2(p,x)\left[1 - \varkappa^2 S^4(p, x^{\frac{1}{2}})\right]^2$$
$$= 4S^2(p, x^{\frac{1}{2}})\left[1 - S^2(p, x^{\frac{1}{2}})\right]\left[1 - \varkappa^2 S^2(p, x^{\frac{1}{2}})\right]$$

oder

$$\left[1 - \varkappa^2 S^4(p, x^{\frac{1}{2}})\right]^2 \left[1 - S^2(p,x)\right]$$
$$= \left[1 - 2S^2(p, x^{\frac{1}{2}}) + \varkappa^2 S^4(p, x^{\frac{1}{2}})\right]^2,$$

also

$$\text{(1.)} \qquad S(p, x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + \varkappa^2 S^2(p,x)}}{1 + \sqrt{1 - S^2(p,x)}}}.$$

Dieser Ausdruck ist in Folge der Doppeldeutigkeit der Quadratwurzeln achtdeutig; da nun sofort zu sehen, dass $S^2(p,x)$ sich genau in gleicher Weise durch

$$\pm S(p, x^{\frac{1}{2}}), \quad \pm S(p, ix^{\frac{1}{2}}), \quad \pm S(p, p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}), \quad \pm S(p, ip^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}})$$

darstellt, so folgt, dass diese acht von einander verschiedenen Grössen durch die acht Werthe von (1.) ausgedrückt sind. Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann man $S(p, x^{\frac{1}{4}})$, $S(p, x^{\frac{1}{8}})$ u. s. w. aus $S(p,x)$ berechnen, so dass es genügt, die weitere Untersuchung auf *ungerade* n zu beschränken.

---

*) Abel, Oeuvres complètes. T. I. pag. 292 ff.

3. Ist nun n ungerade, so wissen wir aus § 62, 3, dass sich $S(p,x)$ als eine rationale Function von $S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)$ darstellt, deren Glieder bis zum $n^{2\text{ten}}$ Grade ansteigen; $S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)$ *ist also die Lösung einer Gleichung* $n^{2\text{ten}}$ *Grades, in deren Coefficienten* $S(p,x)$ *rational vorkommt.* Und in der That ist es leicht, sämmtliche n^2 Lösungen dieser Gleichung aufzustellen; dieselben sind nämlich in der Form

$$(2.) \qquad S\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}} x^{\frac{1}{n}}\right)$$

enthalten, worin

$$k = 0, 1, 2 \cdots n-1, \quad m = 0, 1, 2 \cdots n-1$$

(oder auch, was auf dasselbe hinauskommt,

k und $m = -\frac{n-1}{2}, -\frac{n-3}{2} \cdots -1, 0, +1, +2, \cdots + \frac{n-1}{2}$)

ist; denn es ist

$$\left(\alpha^k p^{\frac{m}{n}} x^{\frac{1}{n}}\right)^n = p^m x$$

und $S(p, p^m x) = S(p,x)$, so dass ersichtlich ist, dass $S(p,x)$ aus den sämmtlichen Werthen (2.) in gleicher Weise hervorgeht.

4. Um die fragliche Gleichung $n^{2\text{ten}}$ Grades algebraisch zu lösen, verfahren wir nach denjenigen Methoden, die bei der Lösung der Abel'schen Gleichungen (und zwar der in § 15, 3 definirten Gattung derselben) zur Anwendung kommen. Wir setzen

$$(3.) \quad \varphi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right) + S\left(p, \alpha x^{\frac{1}{n}}\right) + S\left(p, \alpha^2 x^{\frac{1}{n}}\right) + \cdots + S\left(p, \alpha^{n-1} x^{\frac{1}{n}}\right)$$

$$= S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right) + S\left(p, \alpha x^{\frac{1}{n}}\right) + S\left(p, \frac{x^{\frac{1}{n}}}{\alpha}\right) + S\left(p, \alpha^2 x^{\frac{1}{n}}\right) + S\left(p, \frac{x^{\frac{1}{n}}}{\alpha^2}\right) + \cdots + S\left(p, \alpha^{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{1}{n}}\right) + S\left(p, \frac{x^{\frac{1}{n}}}{\alpha^{\frac{n-1}{2}}}\right)$$

und

$$(4.)\quad \psi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \varphi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) + \alpha\varphi\left(p^{\frac{1}{n}}x^{\frac{1}{n}}\right) + \alpha^2\varphi\left(p^{\frac{2}{n}}x^{\frac{1}{n}}\right) + \cdots + \alpha^{n-1}\varphi\left(p^{\frac{n-1}{n}}x^{\frac{1}{n}}\right)$$

$$= \varphi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) + \alpha\varphi\left(p^{\frac{1}{n}}x^{\frac{1}{n}}\right) + \frac{1}{\alpha}\varphi\left(\frac{x^{\frac{1}{n}}}{p^{\frac{1}{n}}}\right) + \alpha^2\varphi\left(p^{\frac{2}{n}}x^{\frac{1}{n}}\right)$$

$$+ \frac{1}{\alpha^2}\varphi\left(\frac{x^{\frac{1}{n}}}{p^{\frac{2}{n}}}\right) + \cdots + \alpha^{\frac{n-1}{2}}\varphi\left(p^{\frac{n-1}{2n}}x^{\frac{1}{n}}\right) + \frac{1}{\alpha^{\frac{n-1}{2}}}\varphi\left(\frac{x^{\frac{1}{n}}}{p^{\frac{n-1}{2n}}}\right),$$

$$(5.)\quad \psi'\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \varphi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) + \frac{1}{\alpha}\varphi\left(p^{\frac{1}{n}}x^{\frac{1}{n}}\right) + \frac{1}{\alpha^2}\varphi\left(p^{\frac{2}{n}}x^{\frac{1}{n}}\right) + \cdots + \frac{1}{\alpha^{n-1}}\varphi\left(p^{\frac{n-1}{2}}x^{\frac{1}{n}}\right)$$

$$= \varphi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) + \frac{1}{\alpha}\varphi\left(p^{\frac{1}{n}}x^{\frac{1}{n}}\right) + \alpha\varphi\left(\frac{x^{\frac{1}{n}}}{p^{\frac{1}{n}}}\right) + \frac{1}{\alpha^2}\varphi\left(p^{\frac{2}{n}}x^{\frac{1}{n}}\right)$$

$$+ \alpha^2\varphi\left(\frac{x^{\frac{1}{n}}}{p^{\frac{2}{n}}}\right) + \cdots + \frac{1}{\alpha^{\frac{n-1}{2}}}\varphi\left(p^{\frac{n-1}{2n}}x^{\frac{1}{n}}\right) + \alpha^{\frac{n-1}{2}}\varphi\left(\frac{x^{\frac{1}{n}}}{p^{\frac{n-1}{2n}}}\right).$$

Nun ist aber ersichtlich, dass $\varphi\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$ eine *rationale* Function von $S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)$ ist; denn wir können schreiben

$$(6.)\quad \varphi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right) + \frac{2S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)C(p,\alpha)D(p,\alpha)}{1-\varkappa^2S^2\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)S^2(p,\alpha)}$$

$$+ \frac{2S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)C(p,\alpha^2)D(p,\alpha^2)}{1-\varkappa^2S^2\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)S^2(p,\alpha^2)} + \cdots$$

$$+ \frac{2S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)C\left(p, \alpha^{\frac{n-1}{2}}\right)D\left(p, \alpha^{\frac{n-1}{2}}\right)}{1-\varkappa^2S^2\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)S^2\left(p, \alpha^{\frac{n-1}{2}}\right)};$$

ferner bemerken wir, dass dieser Ausdruck nach (3.) ungeändert bleibt, wenn $x^{\frac{1}{n}}$ durch $\alpha^k x^{\frac{1}{n}}$ ersetzt wird. Was die Functionen $\psi\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$ und $\psi'\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$ anlangt, so bleiben sie bei derselben Änderung des Arguments ungeändert, während sie bei Ersetzung von $x^{\frac{1}{n}}$ durch $p^{\frac{m}{n}} x^{\frac{1}{n}}$ den Factor α^m, resp. $\frac{1}{\alpha^m}$ hinzunehmen. In Folge dessen bleiben sowohl

$$\psi\left(x^{\frac{1}{n}}\right)\psi'\left(x^{\frac{1}{n}}\right),$$

als auch

$$\psi^n\left(x^{\frac{1}{n}}\right) \quad \text{und} \quad \psi'^n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$$

ungeändert, wenn $\alpha^k p^{\frac{m}{n}} x^{\frac{1}{n}}$ an Stelle von $x^{\frac{1}{n}}$ gesetzt wird. Bedenken wir ferner, dass (wie aus dem Multiplicationstheorem, angewandt auf die einzelnen Theile von (3.) hervorgeht)

$$\varphi\left(p^{\frac{m}{n}} x^{\frac{1}{n}}\right)$$

$$= F\left[S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)\right] + F_1\left[S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)\right] C\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right) D\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)$$

und gleichzeitig

$$\varphi\left(\frac{x^{\frac{1}{n}}}{p^{\frac{m}{n}}}\right)$$

$$= F\left[S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)\right] - F_1\left[S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)\right] C\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right) D\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)$$

ist, wenn F und F_1 (und ebenso später f und f_1) *rationale* Functionen bezeichnen, und dass $\psi\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$ und $\psi'\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$ durch Vertauschung von $p^{\frac{m}{n}}$ und $p^{-\frac{m}{n}}$ in einander übergehen, so erkennen wir, dass auch

$$\psi(x) = f\left[S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)\right] + f_1\left[S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)\right] C\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right) D\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)$$

und

$$\psi'(x) = f\left[S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)\right] - f_1\left[S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)\right] C\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right) D\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)$$

ist. Hieraus folgt, dass

$$(7.) \qquad \psi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) \psi'\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = B$$

und

$$(8.) \qquad \psi^n\left(x^{\frac{1}{n}}\right) + \psi'^n\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = 2A$$

rationale Functionen von $S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)$ sind $\Big($da in ihnen $C\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right) D\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)$ nur in *geraden* Potenzen vorkommt$\Big)$, die ungeändert bleiben, wenn man $x^{\frac{1}{n}}$ durch $\alpha^k p^{\frac{m}{n}} x^{\frac{1}{n}}$ ersetzt. Die Grössen A und B lassen sich also nach Analogie von § 15, (4.) als rationale, symmetrische Functionen der Grössen $S\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}} x^{\frac{1}{n}}\right)$, d. h. der Wurzeln der vorgelegten Gleichung darstellen, sind demnach *rational* durch die Coefficienten dieser Gleichung, d. h. durch $S(p, x)$ ausdrückbar. Wir können somit A und B als *bekannte* Grössen ansehen. Aus (7.) und (8.) berechnen wir

$$(9.) \qquad \psi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \sqrt[n]{A + \sqrt{A^2 - B^n}},$$

$$(10.) \qquad \psi'\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \sqrt[n]{A - \sqrt{A^2 - B^n}}.$$

Wir benutzten oben zur Bildung von $\psi\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$ und $\psi'\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$ eine beliebige n^{te} Einheitswurzel α; in der Folge unterscheiden wir die $(n-1)$ complexen n^{ten} Einheitswurzeln

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$$

und bezeichnen die entsprechenden $\psi\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$ und $\psi'\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$ mit

$$\psi_1\left(x^{\frac{1}{n}}\right), \quad \psi_2\left(x^{\frac{1}{n}}\right), \ldots \psi_{n-1}\left(x^{\frac{1}{n}}\right);$$

$$\psi_1'\left(x^{\frac{1}{n}}\right), \quad \psi_2'\left(x^{\frac{1}{n}}\right), \ldots \psi_{n-1}'\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$$

und die entsprechenden Werthe A und B mit A_1, B_1 u. s. w., so dass

$$(11.)\qquad \psi_r\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \sqrt[n]{A_r + \sqrt{A_r^2 - B_r^n}},$$

$$(12.)\qquad \psi_r'\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \sqrt[n]{A_r - \sqrt{A_r^2 - B_r^n}}\quad \text{ist.}$$

Ferner ist noch

$$(13.)\quad \varphi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) + \varphi\left(p^{\frac{1}{n}}x^{\frac{1}{n}}\right) + \varphi\left(p^{\frac{2}{n}}x^{\frac{1}{n}}\right) + \cdots + \varphi\left(p^{\frac{n-1}{n}}x^{\frac{1}{n}}\right) = nS(p, x).$$

Denn dieser Ausdruck, der die Summe der Wurzeln der zu lösenden Gleichung darstellt, ist das negativ genommene zweite Glied dieser Gleichung, nachdem das erste Glied von jedem Coefficienten befreit ist. Diese Gleichung ist aber mit § 62, (4.) identisch, wenn man in dieser nur x durch $x^{\frac{1}{n}}$ ersetzt. Multiplicirt man in der Gleichung die Nenner weg, so findet sich das höchste Glied auf der rechten Seite und besitzt den Coefficienten

$$n\prod_{m,k} \frac{1}{S^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)};$$

das zweite Glied steht auf der linken Seite und hat den Coefficienten

$$S(p, x)\varkappa^{n^2-1} \prod_{m,k} S^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right);$$

dividirt man den Coefficienten des ersten Gliedes weg und bringt das zweite auf die andere Seite, so wird sein Coefficient nach § 62, (11.)

$$-\frac{1}{n} S(p, x)\varkappa^{n^2-1} \prod_{m,k} S^4\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right) = -nS(p, x).$$

Addirt man nun sämmtliche Gleichungen (11.) unter Zufügung von (13.) und dividirt durch n, so erhält man, weil die Potenzsummen der α_r bis auf die $(kn)^{\text{ten}}$ verschwinden,

$$(14.)\qquad \varphi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = S(p, x) + \frac{1}{n}\Big[\sqrt[n]{A_1 + \sqrt{A_1^2 - B_1^n}}$$
$$+ \sqrt[n]{A_2 + \sqrt{A_2^2 - B_2^n}} + \cdots + \sqrt[n]{A_{n-1} + \sqrt{A_{n-1}^2 - B_{n-1}^n}}\Big].$$

Dieser Ausdruck hat wegen der Mehrdeutigkeit der Wurzeln mehr verschiedene Werthe, als $S\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$ zukommen. Man kann diese Unvollkommenheit in ganz entsprechender Weise wie bei den Abel'schen Gleichungen beseitigen. Ordnet man nämlich die Wurzeln α_k so, dass $\alpha_k = \alpha^k$ wird, wobei α primitiv ist, so erkennt man, dass

$$(15.)\qquad \frac{\psi_k\left(x^{\frac{1}{n}}\right)}{\psi_1^{\,k}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)} + \frac{\psi_k'\left(x^{\frac{1}{n}}\right)}{\psi_1'^{\,k}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)} = f'\left[S(p,x)\right]$$

und

$$(16.)\qquad \frac{\psi_k\left(x^{\frac{1}{n}}\right)}{\psi_1^{\,k-n}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)} + \frac{\psi_1'\left(x^{\frac{1}{n}}\right)}{\psi_1'^{\,k-n}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)} = f_1'\left[S(p,x)\right]$$

rationale Functionen von $S(p, x)$ sind. Dann können wir aber unter Berücksichtigung von (9.), (12.) und (13.)

$$(17.)\qquad \psi_k\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \psi_1^{\,k}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)\frac{f_1'[S(p,x)] - \left(A_1 - \sqrt{A_1^2 - B_1^n}\right)f'[S(p,x)]}{2\sqrt{A_1^2 - B_1^n}}$$

setzen und sehen somit, dass der Werth des k^{ten} Wurzelzeichens in (14.) durch den für das erste gewählten eindeutig bestimmt ist. Durch die Quadratwurzeln wird keine Mehrdeutigkeit hervorgerufen, da dieselben sämmtlich in (14) mit entgegengesetzten Zeichen auftreten; denn auch die $\psi'\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$ gehören zu den $\psi\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$.

Nachdem wir so mit Hülfe von Wurzelausziehungen $\varphi\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$ berechnet haben, suchen wir von demselben zu $S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)$ selbst zu gelangen. Zu diesem Zwecke bilden wir die weiteren Resolventen*):

*) Man versteht in der Algebra unter *„Resolventen“* Functionen eines Theils der Wurzeln einer Gleichung, die man zunächst zu berechnen sucht, um dann erst von ihnen ausgehend zu den Wurzeln selbst zu gelangen.

$$(18.)\quad \chi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right) + \alpha S\left(p, \alpha x^{\frac{1}{n}}\right) + \alpha^2 S\left(p, \alpha^2 x^{\frac{1}{n}}\right) + \cdots + \alpha^{n-1} S\left(p, \alpha^{n-1} x^{\frac{1}{n}}\right)$$

und

$$(19.)\quad \chi'\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right) + \frac{1}{\alpha} S\left(p, \alpha x^{\frac{1}{n}}\right) + \frac{1}{\alpha^2} S\left(p, \alpha^2 x^{\frac{1}{n}}\right) + \cdots + \frac{1}{\alpha^{n-1}} S\left(p, \alpha^{n-1} x^{\frac{1}{n}}\right)$$

und überzeugen uns wieder genau wie oben davon, dass

$$(20.)\quad \chi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) \chi'\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = D$$

und

$$(21.)\quad \chi^n\left(x^{\frac{1}{n}}\right) + \chi'^n\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = 2C$$

einerseits unverändert bleiben, wenn $x^{\frac{1}{n}}$ durch $\alpha^k x^{\frac{1}{n}}$ ersetzt wird, andererseits rationale Functionen von $S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)$ sind, mithin sich als rationale, symmetrische Functionen der n Grössen $S\left(p, \alpha^k x^{\frac{1}{n}}\right)$ darstellen lassen. Betrachten wir nun in (6.) $S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)$ als Unbekannte, so sind offenbar die Grössen $S\left(p, \alpha^k x^{\frac{1}{n}}\right)$ die sämmtlichen Wurzeln dieser Gleichung; D und C sind als rationale, symmetrische Functionen dieser Wurzeln durch die Coefficienten von (6.), d. h. durch $\varphi\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$ rational ausdrückbar.

Wir finden aus (20.) und (21.)

$$(22.)\quad \chi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \sqrt[n]{C + \sqrt{C^2 - D^n}},$$

$$(23.)\quad \chi'\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \sqrt[n]{C - \sqrt{C^2 - D^n}}.$$

In (22.) lassen wir nun der Reihe nach $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{n-1}$ an Stelle von α treten und wählen wieder die Bezeichnung entsprechend; alsdann addiren wir die sämmtlichen Gleichungen (22.), in denen wir links die durch (18.) gegebenen Ausdrücke

für die $X_r\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$ einsetzen, unter Zufügung von (3.) und erhalten so das Endresultat:

$$(24.)\quad S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\left[\varphi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) + \sqrt[n]{C_1 + \sqrt{C_1^2 - D_1^n}} + \sqrt[n]{C_2 + \sqrt{C_2^2 - D_2^n}} + \cdots + \sqrt[n]{C_{n-1} + \sqrt{C_{n-1}^2 - D_{n-1}^n}}\right].$$

Dass auch hier auf der rechten Seite die Werthe der Wurzeln so ausgewählt werden können, dass im Ganzen nur n Werthe erhalten werden, lässt sich genau wie bei (14.) zeigen.

Hiermit ist der interessante Satz bewiesen, *dass sich* $S\left(p, x^{\frac{1}{n}}\right)$ *mit Hülfe der 4 Species und Wurzelausziehungen aus* $S(p, x)$ *berechnen lässt.*

§ 64.

Die Logarithmen der multiplicatorisch periodischen Functionen.

1. Zum Schlusse mögen noch einige einfache Entwicklungen hier Platz finden, die sich für die Logarithmen der η-Functionen, sowie für $\log S(p, x)$ u. s. w. ergeben. Es ist für $|p| < |x| < \left|\frac{1}{p}\right|$

$$\log \eta(p, x) = \log[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots] + \sum_0^\infty{}_n \left[\log(1 + p^{2n+1}x) + \log\left(1 + \frac{p^{2n+1}}{x}\right)\right]$$

$$= \log[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots] + \sum_0^\infty{}_n \left[\frac{p^{2n+1}x}{1} - \frac{p^{2(2n+1)}x^2}{2} + \frac{p^{3(2n+1)}x^3}{3} - \cdots + \frac{p^{2n+1}}{1x} - \frac{p^{2(2n+1)}}{2x^2} + \frac{p^{3(2n+1)}}{3x^3} - \cdots\right]$$

oder nach Umordnung der Glieder

$$(1.)\quad \log \eta(p, x) = \log[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots] + \frac{1}{1}\frac{p}{1-p^2}\left(x + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\frac{p^2}{1-p^4}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{3}\frac{p^3}{1-p^6}\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \cdots = \sum_1^\infty{}_n \frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{p^n}{1-p^{2n}}\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right).$$

Weiter hat man noch

$$\log\,[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots] = \sum_1^\infty{}_n \log\,(1-p^{2n})$$

$$= -\sum_1^\infty{}_n \left[\frac{p^{2n}}{1}+\frac{p^{4n}}{2}+\frac{p^{6n}}{3}+\cdots\right]$$

$$= -\left[\frac{p^2}{1}+\frac{p^4}{2}+\frac{p^6}{3}+\cdots\right.$$
$$+\frac{p^4}{1}+\frac{p^8}{2}+\frac{p^{12}}{3}+\cdots$$
$$+\frac{p^6}{1}+\frac{p^{12}}{2}+\frac{p^{18}}{3}+\cdots$$
$$\left.+\cdots\right],$$

also, wenn man nach Verticalreihen summirt,

$$(2.)\qquad \log\,[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots]$$
$$= -\left[\frac{1}{1}\frac{p^2}{1-p^2}+\frac{1}{2}\frac{p^4}{1-p^4}+\frac{1}{3}\frac{p^6}{1-p^6}+\cdots\right];$$

doch sind auch andere Entwicklungen, z. B. nach Potenzen von p möglich.

2. Unmittelbar aus (1.) folgt für $|p^{\frac{1}{2}}|<|x|<|p^{-\frac{1}{2}}|$

$$(3.)\qquad \log \eta_0(p,x) = \log\,[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots]$$
$$-\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}\frac{p^n}{1-p^{2n}}\left(x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}\right)$$

und

$$(4.)\qquad \log \eta_3(p,x) = \log\,[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots]$$
$$+\sum_1^\infty{}_n \frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{p^n}{1-p^{2n}}\left(x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}\right).$$

Ferner haben wir

$$\log \eta_1(p,x) = \log\left[-ip^{\frac{1}{4}}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]+\log\,[(1-p^2)(1-p^4)$$
$$\cdot(1-p^6)\cdots]+\sum_1^\infty{}_n\left[\log\,(1-p^{2n}x^2)+\log\left(1-\frac{p^{2n}}{x^2}\right)\right]$$
$$= \log\left[-ip^{\frac{1}{4}}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]+\log\,[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots]$$
$$-\sum_1^\infty{}_n\left[\frac{p^{2n}}{1}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\frac{p^{4n}}{2}\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+\frac{p^{6n}}{3}\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)+\cdots\right]$$

oder nach geeigneter Umformung

$$(5.)\quad \log \eta_1(p, x) = \log\left[-ip^{\frac{1}{4}}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right] + \log[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots] - \sum_1^{\infty}{}_n \frac{1}{n}\frac{p^{2n}}{1-p^{2n}}\left(x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}\right),$$

und hieraus folgt leicht

$$(6.)\quad \log \eta_2(p, x) = \log\left[p^{\frac{1}{4}}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right] + \log[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots] + \sum_1^{\infty}{}_n \frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{p^{2n}}{1-p^{2n}}\left(x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}\right).$$

3. Demnach ist

$$\log S(p, x) = \log \eta_3 - \log \eta_2 + \log \eta_1(p, x) - \log \eta_0(p, x)$$
$$= \log \eta_3 - \log \eta_2 + \log\left[-ip^{\frac{1}{4}}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right] + \sum_1^{\infty}{}_n \frac{1}{n}\left[\frac{p^n}{1-p^{2n}} - \frac{p^{2n}}{1-p^{2n}}\right]\left(x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}\right)$$

oder, da

$$\frac{p^n - p^{2n}}{1-p^{2n}} = \frac{p^n(1-p^n)}{(1-p^n)(1+p^n)} = \frac{p^n}{1+p^n}$$

ist,

$$(7.)\quad \log S(p, x) = \log \eta_3 - \log \eta_2 + \log\left[-ip^{\frac{1}{4}}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right] + \sum_1^{\infty}{}_n \frac{1}{n}\frac{p^n}{1+p^n}\left(x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}\right).$$

Ebenso findet man die Entwicklungen für $\log C(p, x)$ und $\log D(p, x)$; $\log \eta_3$ und $\log \eta_2$ lassen sich sich natürlich auch in Reihen der Form (2.) entwickeln.

Siebenter Abschnitt.

Die mehrfach periodischen Functionen.

§ 65.

Die vertauschbaren Perioden.

1. Wir haben bis jetzt nur den Fall ins Auge gefasst, dass eine Function $F(x)$ eine *einzige* Periode besitzt, d. h. *einer* Gleichung $F[\varphi_1(x)] = F(x)$ genügt; es handelt sich nunmehr darum, zu untersuchen, in welchem Umfange *mehrere* Perioden bei derselben Function auftreten können. Auch hierbei wollen wir uns zunächst von einer algebraischen Analogie leiten lassen. Abel hat nämlich, wie in § 15, 3 erwähnt wurde, bewiesen, dass eine irreductible Gleichung auch dann durch Wurzelausziehungen lösbar ist, wenn ihre sämmtlichen Lösungen aus einer derselben durch die Iterirungen und Combinationen *zweier vertauschbaren* Substitutionen hergeleitet werden können. Wir werden daher fürs Erste nur *vertauschbare* Perioden ins Auge fassen, d. h. solche, für welche die Gleichung

$$\varphi_1 \psi_1(x) = \psi_1 \varphi_1(x) \tag{1.}$$

besteht.

2. Sind φ_1 und ψ_1, wie wir durchgehends annehmen wollen, *lineare* Functionen, so können wir mittelst der Functionalsubstitution die eine auf die Form $\varphi_1(x) = x + 1$ oder $\varphi_1(x) = px$ reduciren. Nehmen wir dann $\psi_1(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, so haben wir im ersten Falle die Gleichung

$$\frac{ax+b}{cx+d} + 1 = \frac{a(x+1)+b}{c(x+1)+d}$$

identisch zu befriedigen, aus der folgt

$$\begin{aligned} a + c &= la, \\ b + d &= l(a + b), \\ c &= lc, \\ d &= l(c + d). \end{aligned}$$

Nach der dritten dieser Gleichungen muss entweder $c = 0$ oder $l = 1$ hin; im letzteren Falle würde aus der ersten oder vierten $c = 0$, im ersteren aus der vierten $l = 1$ folgen, da a und c oder d und c nicht gleichzeitig verschwinden können; aus der zweiten Gleichung folgt dann noch $a = d$, so dass $\psi_1(x)$ die Gestalt

$$\psi_1(x) = \frac{ax + b}{a} = x + n$$

annimmt.

Ist $\varphi_1(x) = px$, so haben wir

$$p\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{apx + b}{cpx + d},$$

also

$$\begin{aligned} ap &= lap, \\ bp &= lb, \\ c &= lcp, \\ d &= ld, \end{aligned}$$

aus denen sich $l = 1$, $c = 0$, $b = 0$, also

$$\psi_1(x) = \frac{a}{d}\, x = qx$$

ergiebt. Wir finden somit:

Sollen zwei oder mehrere Perioden vertauschbar sein, so *müssen sie alle additiv oder alle multiplicatorisch sein.*

3. Eine doppelt additive Periode ist in der That möglich, wie sich sofort durch Construction zugehöriger Functionen nachweisen lässt. Wir sind nämlich im Stande, *aus den Functionen mit einfacher multiplicatorischer Periode doppelt additiv periodische Functionen herzuleiten und umgekehrt.* Genügt nämlich die eindeutige Function $F(p, x)$ der Gleichung

$$F(p, px) = F(p, x)$$

und setzen wir

$$x = e^{2\pi i w}, \; p = e^{2\pi i \tau},$$

so ist

$$f(\tau, w) = F(e^{2\pi i\tau}, e^{2\pi iw})$$

doppelt periodisch, da

$$f(\tau, w + 1) = F(e^{2\pi i\tau}, e^{2\pi i\tau + 2\pi i}) = F(e^{2\pi i\tau}, e^{2\pi iw}) = f(\tau, w)$$

und

$$f(\tau, w + \tau) = F(e^{2\pi i\tau}, e^{2\pi iw}\, e^{2\pi i\tau}) = F(e^{2\pi i\tau}, e^{2\pi iw}) = f(\tau, w)$$

ist. Befriedigt andrerseits die eindeutige Function $f(w)$ die Gleichungen

$$f(w + m) = f(w)$$

und

$$f(w + n) = f(w),$$

so setzen wir*)

$$w = \frac{m}{2\pi i} \log x,\ p = e^{\pm \frac{2\pi i n}{m}}$$

und

$$F(x) = f\left(\frac{m}{2\pi i} \log x\right).$$

$F(x)$ ist eine eindeutige Function, da die verschiedenen Werthe von $\log x$ das Argument von $f(w)$ nur um m verändern, also denselben Werth von $f(w)$ hervorbringen; ferner ist

$$F(p, x) = f\left(\frac{m}{2\pi i} \log\left(x e^{\pm \frac{2\pi i n}{m}}\right)\right) = f\left(\frac{m}{2\pi i}\left(\log x \pm \frac{2\pi i n}{m}\right)\right)$$

$$= f\left(\frac{m}{2\pi i} \log x \pm n\right) = f\left(\frac{m}{2\pi i} \log x\right) = F(x).$$

Wir können daher aus den uns bekannten einfach multiplicatorisch periodischen Functionen die doppelt additiv periodischen, die sog. *elliptischen* Functionen herleiten.

4. Sind m und n die additiven Perioden einer Function, so ist der Parameter der entsprechenden multiplicatorisch periodischen Function $p = e^{\pm \frac{2\pi i n}{m}}$ (oder bei anderer Umformung $e^{\pm \frac{2\pi i m}{n}}$); dieses p wird, wenn $\frac{n}{m}$ *reell* ist, dem absoluten Betrage nach der Einheit gleich. Dies ist nach § 34, 8 bei

*) Da wir auch $w = \frac{n}{2\pi i} \log x,\ p = e^{\pm \frac{2\pi i m}{n}}$ setzen könnten, so ist das obige Verfahren nicht die einzige Lösung der Aufgabe; wir kommen später auf diesen Punkt zurück. — Das Doppelzeichen im Exponenten ermöglicht es, $|p| \leqq 1$ zu machen.

analytischen Functionen nur dann zulässig, wenn p eine genaue Einheitswurzel, d. h. $\frac{m}{n}$ eine *rationale* Zahl ist. Übrigens ist auch leicht direct (mit Hülfe der Kettenbrüche) nachzuweisen, dass im Falle eines irrationalen, reellen $\frac{m}{n}$ eine unendlich kleine additive Periode vorhanden ist, deren Unmöglichkeit sofort (vgl. § 34, 8) erhellt. Stellt $\frac{m}{n}$ eine rationale Zahl dar, so lassen sich beide Perioden $y = x + m$ und $y = x + n$ durch eine *einzige*, $y = x + \delta$, ersetzen, wo δ die grösste in m und n ganzzahlig aufgehende Zahl ist. Denn es ist auch $y = k_1 m + k_2 n$ eine Periode, wenn k_1 und k_2 beliebige positive oder negative ganze Zahlen sind, und man kann nach den ersten Elementen der Zahlentheorie k_1 und k_2 so bestimmen, dass

$$k_1 \frac{m}{\delta} + k_2 \frac{n}{\delta} = 1,$$

also $k_1 m + k_2 n = \delta$ wird; und anderseits sind $y = x + m$ und $y = x + n$ Iterirungen von $y = x + \delta$. Die betreffende Function ist also in Wirklichkeit nur einfach periodisch. Wir können daher das Ergebniss aussprechen:

Zwei additive Perioden, welche sich nicht auf eine einzige reduciren lassen, können nur dann zusammen bei einer analytischen Function auftreten, wenn ihr Quotient keine reelle Grösse ist.

5. Um uns ein anschauliches Bild von dem Verlaufe einer doppelt additiv periodischen Function zu verschaffen, werden wir wieder mit Vortheil die geometrische Darstellung benutzen; wir stellen uns auch hier die Aufgabe, in der Ebene der complexen Zahlen Parcellen so abzugrenzen, dass keine zwei Punkte einer Parcelle durch Periodicität verbunden sind, während alle Punkte ausserhalb einer Parcelle mit innerhalb gelegenen durch die Periodicität communiciren. Sind

$$m = \alpha_1 + \alpha_2 i \text{ und } n = \beta_1 + \beta_2 i$$

die beiden Perioden (von denen man auch die eine gleich der Einheit annehmen kann), so werden wir (s. Figur 21) zwei Systeme von unendlich vielen Parallelen ziehen, deren Abstände gleich $\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ und $\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}$ sind, gemessen

in den Richtungen, die durch die Geraden bestimmt sind, welche vom Nullpunkt nach den Punkten $\alpha_1 + \alpha_2 i$ und $\beta_1 + \beta_2 i$ sich erstrecken, während das erste System die Richtung der zweiten, das zweite System die der ersten Geraden hat. Die ganze Ebene wird so in unendlich viele, congruente Periodicitätsparallelogramme eingetheilt, denen die verlangte Eigenschaft offenbar zukommt, wie sich nach § 37, 2 leicht ergiebt.

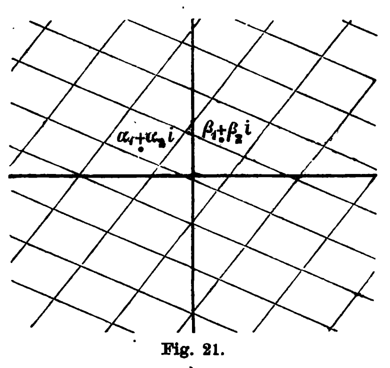


Fig. 21.

Wie jedes Parallelogramm durch wiederholte Anwendung der beiden Periodicitätsgleichungen in jedes andere transformirt werden kann, ist unmittelbar ersichtlich. Die Parcellirung kann überigens auf mannichfache Arten modificirt werden, wie u. A. auch aus den Resultaten der folgenden Nummer hervorgeht.

6. Sind $y = x + m$ und $y = x + n$ die Perioden einer Function $F(x)$, so bleibt dieselbe auch für beliebige Umkehrungen, Iterirungen und Combinationen dieser Perioden ungeändert. Die letzteren sind alle in der Form

(2.) $$y = x + k_1 m + k_2 n$$

enthalten, worin die k positive oder negative ganze Zahlen bedeuten. Die Gesammtheit aller Perioden, die aus zwei oder mehreren in der erwähnten Weise hervorgehen, heisst eine *Periodicitätsgruppe;* (2.) ist also die *Gruppe,* für welche $F(x)$ ungeändert bleibt.

Wir haben soeben die gesammte Gruppe (2.) aus *zwei* ihrer Elemente, $y = x + m$ und $y = x + n$ erzeugt, und man kann die Frage aufstellen, ob auch aus zwei anderen Elementen der Gruppe, etwa

(3.) $$y = x + r_1 m + s_1 n$$

und

(4.) $$y = x + r_2 m + s_2 n$$

die Gesammtheit (2.) erzeugt werden kann. Dies wird dann und nur dann der Fall sein, wenn sich aus (3.) und (4.)

wieder $y = x + m$ und $y = x + n$ herleiten lassen. Es werden also die ganzen Zahlen r_1, s_1, r_2, s_2 so beschaffen sein müssen, dass sich die Gleichungen

(5.) $$k_1(r_1 m + s_1 n) + k_2(r_2 m + s_2 n) = m$$

und

(6.) $$k_3(r_1 m + s_1 n) + k_4(r_2 m + s_2 n) = n$$

durch ganzzahlige k_α befriedigen lassen. Bedenkt man, dass m und n durch keine Gleichung

$$\mu m + \nu n = 0,$$

in der μ und ν reelle ganze Zahlen sind, verbunden sein können, da sonst $\frac{m}{n} = -\frac{\nu}{\mu}$ reell wäre, ausser wenn μ und ν beide gleich Null sind, so kann man (5.) und (6.) in je zwei Gleichungen zerfällen:

(7.) $$k_1 r_1 + k_2 r_2 = 1,$$

(8.) $$k_1 s_1 + k_2 s_2 = 0$$

und

(9.) $$k_3 r_1 + k_4 r_2 = 0,$$

(10.) $$k_3 s_1 + k_4 s_2 = 1.$$

Aus (8.) folgt aber

$$k_1 = \frac{l s_2}{\delta}, \quad k_2 = -\frac{l s_1}{\delta},$$

worin l eine beliebige ganze Zahl, δ aber den grössten gemeinsamen (positiven) Theiler von s_1 und s_2 bedeutet; setzt man diese Ausdrücke in (7.) ein, so wird daraus

$$l \frac{s_2}{\delta} r_1 - l \frac{s_1}{\delta} r_2 = 1.$$

Hiernach muss $l = \pm 1$ sein, da sonst die linke Seite einen von 1 verschiedenen Factor besässe, was mit der rechten Seite nicht stimmt; es ist also

(11.) $$\frac{s_2}{\delta} r_1 - \frac{s_1}{\delta} r_2 = \pm 1$$

und ebenso nach (9.) und (10.), wenn ε den grössten gemeinsamen Theiler von r_1 und r_2 bezeichnet,

(12.) $$\frac{r_1}{\varepsilon} s_2 - \frac{r_2}{\varepsilon} s_1 = \pm 1.$$

Aus (11.) ist aber ersichtlich, dass r_1 und r_2, aus (12.), dass s_1 und s_2 keinen von 1 verschiedenen gemeinsamen Theiler aufweisen können, so dass $\delta = \varepsilon = 1$ ist und wir die einzige Bedingung

(13.) $$r_1 s_2 - r_2 s_1 = \pm 1$$

haben. Ist (13.) erfüllt, so lassen sich (7.), (8.), (9.) und (10.) dadurch befriedigen, dass man

$$k_1 = \pm s_2,\ k_2 = \mp s_1,\ k_3 = \mp r_2,\ k_4 = \pm r_1$$

nimmt.

Die Perioden $y = x + m$ und $y = x + n$ lassen sich durch

$$y = x + r_1 m + s_1 n$$

und

$$y = x + r_2 m + s_2 n$$

dann und nur dann ersetzen, wenn

$$r_1 s_2 - r_2 s_1 = \pm 1$$

ist.

Wählt man in (3.) und (4.) r_1, r_2, s_1, s_2 *nicht* der Bedingung (13.) entsprechend, so ist die durch (3.) und (4.) erzeugte Periodicitätsgruppe wohl in (2.) enthalten, macht jedoch nicht die Gesammtheit derselben aus; sie ist eine *Untergruppe* von (2.).

7. Lehrsatz: *Bei einer eindeutigen, analytischen Function können drei (oder mehr) additive Perioden m, n, r, welche durch keine ganzzahlige Gleichung*

(14.) $$k_1 m + k_2 n + k_3 r = 0$$

verbunden sind, nicht auftreten.

Beweis: Gesetzt es gäbe eine analytische Function $F(x)$, welche die drei Perioden $y = x + m$, $y = x + n$, $y = x + r$ besässe, ohne dass eine Gleichung (14.) existirt. Alsdann wollen wir uns die Ebene der complexen Zahlen in die Periodicitätsparallelogramme eingetheilt denken, welche den Perioden $y = x + m$ und $y = x + n$ entsprechen. Gehen wir dann von einem beliebigen Punkte x_1 aus, so wird $F(x_1) = F(x_1 + r) = F(x_1 + 2r) = \cdots$ u. s. w. sein, und die correspondirenden Punkte $x_1 + kr$ werden sich auf unendlich viele jener Periodicitätsparallelogramme vertheilen. Soviel ist indessen sicher, dass keine zwei der Punkte $x_1 + kr$ in

den betreffenden Parallelogrammen an *entsprechende* Stellen zu liegen kommen (d. h. so, dass sie bei Aufeinanderlegen der Parallelogramme sich decken würden), da sie sonst durch eine Periode $y = x + l_1 m + l_2 n$ verbunden wären, so dass wir eine Gleichung

$$x_1 + kr = x_1 + k'r + l_1 m + l_2 n,$$

d. h. eine Gleichung (14.) hätten. Mit Hülfe der Perioden $y = x + m$ und $y = x + n$ kann man nun aber alle jene Punkte $x_1 + kr$, welche in unendlich vielen verschiedenen Parallelogrammen liegen, mit solchen in einem *einzigen* Parallelogramme in Correspondenz setzen, d. h. die Function $F(x)$ muss für unendlich viele innerhalb *eines* Parallelogrammes gelegene Punkte in Folge ihrer drei Perioden den gleichen Werth annehmen. Befinden sich aber in einem endlichen Raume unendlich viele Punkte, so müssen darunter solche sein, deren Abstand unendlich gering ist; unter den Perioden der Gruppe $y = x + l_1 m + l_2 n + l_3 r$ müssen also solche enthalten sein, die unendlich benachbarte Punkte mit einander verbinden, d. h. es müssen gewisse $l_1 m + l_2 n + l_3 r$ unter jeder Grenze klein sein. Hieraus würde weiter folgen, dass $F(x)$ für eine Reihe von unendlich benachbarten Punkten, die sich auf eine endliche Linie vertheilen, denselben Werth annimmt, also in Folge seines analytischen Charakters eine Constante ist.

Dieser Beweis lässt sich auch rein *arithmetisch* führen, erlangt jedoch dann nicht entfernt die Übersichtlichkeit wie durch die geometrische Behandlung.

8. Aus dem Vorhergehenden folgern wir unmittelbar, *dass auch eindeutige, analytische Functionen $F(x)$ mit zwei multiplicatorischen Perioden $y = px$ und $y = qx$ nicht existenzfähig sind, wenn nicht die eine derselben, etwa q, eine Einheitswurzel ist oder die Form $e^{2\pi i\frac{m}{n}} p^{\frac{r}{s}}$ hat;* denn die Substitution $x = e^{2\pi i w}$, $p = e^{2\pi i t}$, $q = e^{2\pi i t'}$ würde sonst $F(x)$ in eine Function mit drei von einander unabhängigen additiven Perioden verwandeln. In der That genügt $f(w) = F(e^{2\pi i w})$ den Gleichungen

$$f(w+1)=f(w),\ f(w+\tau)=f(w),\ f(w+\tau')=f(w).$$

Ist $q=e^{2\pi i\frac{m}{n}}p^{\frac{r}{s}}$, so haben wir $\tau'=\frac{m}{n}+\frac{r\tau}{s}$, sodass die ganzzahlige Gleichung

$$ms\cdot 1+nr\tau-ns\tau'=0$$

besteht. Auch erkennt man mit Leichtigkeit, dass sich drei additive Perioden, welche irgend eine Gleichung (14.) befriedigen, auf zwei multiplicatorisch periodische der letzterwähnten Art zurückführen lassen. Functionen, welche die Perioden $y=px$ und $y=e^{2\pi i\frac{m}{n}}$ besitzen, sind sehr leicht zu construiren; so hat z. B.

$$F(x)=S(p,x)\,S\left(p,e^{2\pi i\frac{m}{n}}x\right)S\left(p,e^{4\pi i\frac{m}{n}}x\right)\cdots S\left(p,e^{(n-1)2\pi i\frac{m}{n}}x\right)$$

dieselben. Ist $q=e^{2\pi i\frac{m}{n}}p^{\frac{r}{s}}$, so ist natürlich eine Reduction möglich.

§ 66.

Die nicht vertauschbaren Perioden.

1. Nachdem wir die *vertauschbaren* Perioden einer erschöpfenden Untersuchung unterworfen haben, wenden wir uns der Betrachtung solcher mehrfachen linearen Perioden zu, für welche die Gleichung

(1.) $$\varphi_1\psi_1(x)=\psi_1\varphi_1(x)$$

nicht statthat. Hierbei wollen wir den Fall ausschliessen, dass sämmtliche Perioden der aus $y=\varphi_1(x)$ und $y=\psi_1(x)$ hervorgehenden Gruppe *rückkehrend* sind, da dieser besser bei Untersuchungen abgehandelt wird, die in einen späteren Abschnitt gehören, und nur solche Gruppen ins Auge fassen, deren eine erzeugende Periode in eine der beiden Normalformen $\varphi_1(x)=x+1$ oder $\varphi_1(x)=px$, $|p|<1$ gesetzt werden kann, während die zweite in der allgemeinen Form $\psi_1(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ auftritt. Zunächst erledigen wir den Specialfall, dass $\psi_1(x)$ eine lineare *ganze* Function, also $\psi_1(x)=ax+b$ ist.

2. Ist $\varphi_1(x)=x+1$, $\psi_1(x)=ax+b$, so können wir



die zweite Periode durch eine Functionalsubstitution $\chi_1(x) = x + \lambda$ reduciren, ohne die erste zu ändern. Setzen wir in

$$y + \lambda = a(x + \lambda) + b$$

$\lambda = \frac{b}{1-a}$, (was immer möglich ist, da der Fall $a = 1$ nicht hierher gehört), so nimmt die zweite Periode die Gestalt $\psi_1(x) = ax$ an. Nun ist

$$\psi_n \varphi_1 \psi_{-n}(x) = x + a^n,$$

so dass auch die additive Periode a^n in der Gruppe auftritt. Bedenkt man, dass a^n für $|a| \gtrless 1$ beliebig klein gemacht werden kann, wenn man n (positiv oder negativ) hinlänglich gross nimmt, und dass eine unendlich kleine additive Periode bei analytischen Functionen unzulässig ist, so ist die Unmöglichkeit der Gruppe einleuchtend.

3. Für $|a| = 1$ gestaltet sich die Sache anders; ist dann a eine primitive n^{te} Einheitswurzel, so stellt sich die gesammte, aus den Perioden $y = x + 1$ und $y = ax$ hervorgehende Gruppe offenbar in den Formen

$$y = a^{r_1} x + k_1,$$
$$y = a^{r_2}(a^{r_1} x + k_1) + k_2,$$
$$y = a^{r_3}\left[a^{r_2}(a^{r_1} x + k_1) + k_2\right] + k_3,$$
$$y = a^{r_4}\left[a^{r_3}[a^{r_2}(a^{r_1} x + k_1) + k_2] + k_3\right] + k_4$$

u. s. w.

dar, worin die r und k ganze Zahlen sind. Multipliciren wir die Klammern aus, so haben wir — um die letzte Gleichung als Beispiel zu nehmen —

$$y = a^{r_4+r_3+r_2+r_1} x + a^{r_4+r_3+r_2} k_1 + a^{r_4+r_3} k_2 + a^{r_4} k_3 + k_4$$

oder, wenn man bedenkt, dass nach willkürlicher Wahl von r_4 immer noch $r_4 + r_3$ ganz beliebig bestimmt werden kann, dass dann weiter das Gleiche mit $r_4 + r_3 + r_2$ u. s. w. der Fall ist, dass ferner Glieder mit einer gleichen Potenz von a (ausser dem ersten) zusammengefasst werden können und dass nur die $n - 1$ ersten Potenzen von a von einander verschieden sind, so erhält man als allgemeine Form sämmtlicher Perioden der Gruppe

$$(2.) \qquad y = a^s x + a^{n-1} k_1 + a^{n-2} k_2 + \cdots + a k_{n-1} + k_n.$$

Da auch s und beliebige der k gleich Null genommen werden können, so werden die additiven Perioden $y = x + a^k$, aber keine anderen hiervon wesentlich verschiedene in der Gruppe auftreten. Ist s von Null verschieden, so ist (2.) eine recurrirende Periode, da es mittelst einer Functionalsubstitution (wie oben!) auf $y = a^s x$ reducirt werden kann. Die Zulässigkeit der Gruppe hängt daher lediglich davon ab, ob die Zahl der nicht durch lineare Relationen verbundenen additiven Perioden in derselben zwei nicht übersteigt. Nun ist aber a durch eine Gleichung $a^n = 1$ oder $a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1 = 0$ bestimmt, die sich häufig noch in weitere Factoren mit *ganzzahligen, reellen* Coefficienten zerfällen lässt. Übersteigt nach möglichster Reduction in diesem Sinne die Gleichung für a nicht den zweiten Grad, so ist die Gruppe möglich, da aus (ist die Gleichung vom ersten Grad, so ist die Sache noch einfacher)

$$l_1 a^2 + l_2 a + l_3 = 0$$

folgt

$$l_1 a^2 = -l_2 a - l_3$$

$$l_1 a^3 = -l_2 a^2 - l_3 a = -l_2 \frac{-l_2 a - l_3}{l_1} - l_3$$

oder

$$l_1^2 a^3 = l_2^2 a + l_2 l_3 - l_1 l_3$$

u. s. w.,

so dass ersichtlich ist, dass alsdann die sämmtlichen additiven Perioden mit den beiden $y = x + 1$ und $y = x + a$ durch eine lineare Relation verbunden sind. Ist die irreductible Gleichung für a von höherem als dem zweiten Grade, so ist die Gruppe auszuschliessen. Zulässig sind: $a = -1$, $a = i$, $a = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Tritt neben $y = x + 1$ noch eine andere additive Periode auf, so ist sogar nur $a = -1$ zulässig.

Die allgemeine Untersuchung wollen wir nicht eingehender durchführen.

4. Haben wir

$$\varphi_1(x) = px, \ |p| < 1,$$

und

$$\psi_1(x) = ax + b,$$

so ist

$$\varphi_1 \psi_1 \varphi_{-1} \psi_{-1}(x) = x - b(1-p),$$

wodurch dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt, d. h. da $|p| < 1$ ist, die Unmöglichkeit der Gruppe erwiesen ist.

5. Um zu dem allgemeineren Fall zu gelangen, setzen wir

$$(3.) \qquad \varphi_1(x) = x + 1, \quad \psi_1(x) = \frac{ax+b}{cx+d};$$

wegen der ersten Periode muss die zugehörige Function den wesentlichen Unstetigkeitspunkt $x = \infty$ (§ 34, 11) und in Folge der zweiten Periode auch den weiteren $x = \frac{a\infty + b}{c\infty + d} = \frac{a}{c}$ besitzen, der immer im Endlichen liegt, weil c jetzt wesentlich von Null verschieden ist; hieraus folgt wieder, dass auch $x = \frac{a}{c} + k$ wesentliche Unstetigkeitspunkte sind*). Functionen, welche die beiden Perioden (3.) besitzen, haben also, falls sie überhaupt existenzfähig sind, *unendlich viele wesentliche Discontinuitätspunkte.*

Haben wir

$$(4.) \qquad \varphi_1(x) = px, \quad |p| < 1, \quad \psi_1(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

so sind $x = 0$ und $x = \infty$ (§ 34, 12), also auch $x = \frac{b}{d}$ und $x = \frac{a}{c}$ und weiter $x = p^r \frac{b}{d}$ und $x = p^r \frac{a}{c}$ wesentliche Discontinuitätspunkte, so dass das Resultat das gleiche ist, wie bei (3.). Eine Ausnahme tritt nur ein, wenn $\frac{b}{d}$ und $\frac{a}{c}$ gleichzeitig Null oder unendlich werden, was nur für $a = 0$ und $d = 0$ der Fall sein kann, so dass dann $\psi_1(x)$ die Form

$$(5.) \qquad \psi_1(x) = \frac{a}{x}$$

besitzt. Die recurrirende Periode (5.) ist aber neben $y = px$ in der That zulässig, ja bei den multiplicatorisch periodischen Functionen zweiter Ordnung sogar *nothwendig* (§ 56, 1).

---

*) Natürlich sind hiermit nicht *alle* wesentlichen Discontinuitätspunkte gefunden, sondern nur ein beschränkter Theil derselben.

Wir haben also das fundamentale Resultat:

Mehrere nicht vertauschbare lineare Perioden können, einige sehr unwesentliche Ausnahmefälle abgerechnet, nur bei Functionen auftreten, die unendlich viele wesentliche Discontinuitätspunkte besitzen.

Die functionaltheoretischen Forschungen der letzten Jahre haben klargestellt, dass solche mehrfach periodische Functionen, deren Perioden nicht vertauschbar sind und die unendlich viele wesentliche Unstetigkeitspunkte aufweisen, thatsächlich in grosser Zahl existiren. Da jedoch die Theorie derselben zur Zeit noch nichts weniger als abgeschlossen ist, müssen sie einer späteren Fortsetzung der vorliegenden Arbeit vorbehalten bleiben. Im Laufe unserer Untersuchungen über elliptische Functionen werden wir indessen gelegentlich einige hierher gehörige Transcendenten kennen lernen und einige ihrer Eigenschaften untersuchen. Im Folgenden sollen uns die *doppelt additiv periodischen Functionen* weiter beschäftigen.

§ 67.

Die Functionen mit doppelter additiver Periode.

1. Wir haben in § 65 die doppelt additiv periodischen oder, wie wir jetzt kürzer sagen wollen, die *doppelt periodischen* Transcendenten, denen gewöhnlich der Name *„elliptische Functionen"* beigelegt wird, in engen Zusammenhang mit den multiplicatorisch periodischen gebracht; wir werden daher einen grossen Theil ihrer Eigenschaften direct durch Umgestaltung der Resultate des letzten Abschnitts herleiten können.

2. Während die multiplicatorisch periodischen Transcendenten $x = 0$ und $x = \infty$ zu wesentlichen Unstetigkeitspunkten haben, tritt bei den elliptischen nur *ein* solcher, $x = \infty$ auf (soweit natürlich nicht unendlich viele vorhanden sind). Die Substitution $x = e^{2\pi i w}$ vereinigt die beiden Unstetigkeitspunkte in einen, da für $x = 0$ und $x = \infty$ nur $w = \infty$ ist. Die Form der elliptischen Functionen ist hiermit unmittelbar festgestellt; sie sind, soweit sie eindeutig sind, *transcendente rationale Functionen im engeren Sinne.*

3. Unmittelbar aus § 49 gehen folgende Sätze hervor (wobei wir immer nur an eindeutige Functionen mit einem wesentlichen Unstetigkeitspunkt denken):

a. *Es giebt keine elliptische Function, welche nirgends Null oder unendlich wird.*

b. *Es giebt keine Transcendente dieser Art, welche innerhalb eines Periodenparallelogramms jeden Werth nur einmal annimmt (keine elliptische Function erster Ordnung).*

c. *Jede doppelt periodische Function nimmt innerhalb eines Periodenparallelogramms jeden Werth gleich oft an.*

d. *Wird die Function innerhalb eines Periodenparallelogramms in den Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ resp. Null und unendlich (oder nimmt sie hier irgend zwei andere bestimmte Werthe an), so ist*

$$(1.)\quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n + k_1 m + k_2 m,$$

wenn m und n die Perioden, k_1 und k_2 ganze Zahlen bezeichnen.

4. Diese Übertragungen werden einleuchtender werden, wenn wir etwas eingehender auseinandersetzen, wie die der Periode $y = px$ entsprechende Gebietseintheilung durch die Substitutionen $p = e^{2\pi i\tau}$, $x = e^{2\pi i w}$ in die zu $y = x + 1$ und $y = x + \tau$ gehörige transformirt wird; der allgemeine Fall geht natürlich direct aus diesem specielleren hervor. Die Parcellirung für $y = px$ konnte durch unendliche viele Kreise mit dem Mittelpunkt $x = 0$ und den Radien $r|p|^n$ gebildet werden, wobei r beliebig ist, und es handelt sich darum, wie diese Kreise umgeformt werden, wenn man von den x zu den w übergeht. Setzen wir $x = \xi + \eta i$, $w = u + vi$, so fragt es sich, welche Beziehung zwischen u und v besteht, wenn das entsprechende x auf einem der Kreise liegt, wenn also

$$(2.)\qquad \xi^2 + \eta^2 = r^2 |p|^{2n}$$

ist. Wir haben

$$\xi + \eta i = e^{2\pi i(u+vi)} = e^{-2\pi v + 2\pi i u} = e^{-2\pi v}(\cos 2\pi u + i \sin 2\pi u),$$

also

$$(3.)\qquad \begin{cases} \xi = e^{-2\pi v} \cos 2\pi u, \\ \eta = e^{-2\pi v} \sin 2\pi u. \end{cases}$$

Fügen wir diese Ausdrücke in (2.) ein, so folgt

$$e^{-4\pi v}(\cos^2 2\pi u + \sin^2 2\pi u) = e^{-4\pi v} = r^2 |p|^{2n}$$

oder

$$v = -\frac{1}{4\pi}\log [r^2 |p|^{2n}]$$

oder

$$v = -\frac{1}{2\pi}\log r - \frac{n}{2\pi}\log |p|, \tag{4.}$$

wobei für die Logarithmen immer der reelle Werth zu nehmen ist.

Setzen wir hierin noch $p = e^{2\pi i\tau}$, so geht (4.) über in

$$v = -\frac{1}{2\pi}\log r - \frac{n}{2\pi}\log |e^{2\pi i\tau}|$$

oder, da für $\tau = t + t'i$

$$|e^{2\pi i\tau}| = |e^{-2\pi t'} e^{2\pi i t}| = e^{-2\pi t'}$$

ist, in

$$v = -\frac{1}{2\pi}\log r + nt'. \tag{5.}$$

Die Kreise transformiren sich also in Gerade oder in Theile von Geraden, die mit der Abscissenaxe parallel laufen und den senkrechten Abstand t', d. h. in der Richtung von $x = 0$ nach $x = t + t'i$ gemessen den Abstand $|\tau|$ haben. Beachten wir weiter, dass nach (3.) zu jedem Punkte $x = \xi + \eta i$ unendlich viele u gehören, derart dass ausser einem entsprechenden u auch $u + k$ entspricht, so erkennen wir, dass sich die Kreise nur als ein *Theil* jener Geraden transformiren, der die Länge 1 hat, aber dies wegen jener unendlichen Vieldeutigkeit unendlich oft. In Folge dessen bilden sich die Kreisringe des einen Systems unendlich oft auf einem Parallelstreifen des zweiten ab, so dass der Übergang von dem Ringsystem zu dem der Periodicitätsparallelogramme (bei dem allerdings das eine Parallelensystem hiernach nicht aus Geraden zu bestehen braucht und überhaupt noch mannichfach willkürlich ist) klar wird. Die weitere Ausführung dieser Betrachtungen, sowie die Identificirung der obigen Sätze mit den entsprechenden über die multiplicatorisch periodischen Functionen können wir nunmehr dem Leser überlassen.

§ 68.

Die Thetafunctionen.

1. Um die elliptischen Functionen wirklich herzustellen, brauchen wir jetzt lediglich die Entwicklungen des sechsten Abschnitts zu transformiren. Wir setzen*)

$$(1.)\qquad \vartheta(\tau, w) = \eta(e^{\pi i\tau}, e^{\pi i w}),$$

$$(2.)\qquad \vartheta_\alpha(\tau, w) = \eta_\alpha(e^{\pi i\tau}, e^{\pi i w}).$$

Damit die Bedingung $|p| < 1$ erfüllt ist, wird

$$|e^{\pi i\tau}| = |e^{\pi i(t+t'i)}| = |e^{-\pi t'} e^{\pi i t}| = |e^{-\pi t'}| < 1,$$

d. h. t' positiv sein müssen. *Bei allen folgenden Entwicklungen wird daher vorausgesetzt werden, dass der rein imaginäre Theil von τ, dividirt durch i, wesentlich positiv ist.* Die Mehrdeutigkeit in Bezug auf p, welche bei $\eta_1(p, x)$ und $\eta_2(p, x)$ auftritt, kann bei den Thetafunctionen vermieden werden, wenn $p^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{\pi i\tau}{4}}$ gesetzt wird.

2. Wir haben, wenn wir p der Kürze wegen beibehalten,

$$(3.)\quad \begin{aligned}\vartheta(\tau, w) &= 1 + p(e^{\pi i w} + e^{-\pi i w}) + p^4(e^{2\pi i w} + e^{-2\pi i w}) \\ &\quad + p^9(e^{3\pi i w} + e^{-3\pi i w}) + \cdots \\ &= 1 + 2p\cos\pi w + 2p^4\cos 2\pi w + 2p^9\cos 3\pi w + \cdots \\ &= 1 + 2\sum_1^\infty {}^n\, p^{n^2}\cos n\pi w\end{aligned}$$

und ebenso

$$(4.)\quad \vartheta_0(\tau, w) = \vartheta(\tau, 2w + 1) = 1 + 2\sum_1^\infty {}^n (-1)^n p^{n^2}\cos 2n\pi w),$$

$$(5.)\quad \begin{aligned}\vartheta_1(\tau, w) &= e^{\pi i\left(w + \frac{\tau}{4} - \frac{1}{2}\right)}\vartheta(\tau, 2w + \tau + 1) \\ &= 2\sum_0^\infty {}^n (-1)^n p^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\sin(2n + 1)\pi w,\end{aligned}$$

$$(6.)\quad \begin{aligned}\vartheta_2(\tau, w) &= e^{\pi i\left(w + \frac{\tau}{4}\right)}\vartheta(\tau, 2w + \tau) \\ &= 2\sum_0^\infty {}^n\, p^{\frac{(2n+1)}{4}}\cos(2n + 1)\pi w,\end{aligned}$$

$$(7.)\quad \vartheta_3(\tau, w) = \vartheta(\tau, 2w) = 1 + 2\sum_1^\infty {}^n\, p^{n^2}\cos 2n\pi w.$$

---

*) Es mag besonders darauf aufmerksam gemacht werden, dass wir in der Folge $p = e^{\pi i\tau}$ statt wie bisher $p = e^{2\pi i\tau}$ nehmen.

3. Die Functionalgleichungen dieser Functionen sind

$$(8.)\quad \begin{cases} \vartheta(\tau, w+2\tau) = e^{-\pi i(\tau+w)}\vartheta(\tau, w), \\ \vartheta_0(\tau, w+\tau) = -e^{-\pi i(\tau+2w)}\vartheta_0(\tau, w), \\ \vartheta_1(\tau, w+\tau) = -e^{-\pi i(\tau+2w)}\vartheta_1(\tau, w), \\ \vartheta_2(\tau, w+2\tau) = e^{-\pi i(\tau+2w)}\vartheta_2(\tau, w), \\ \vartheta_3(\tau, w+2\tau) = e^{-\pi i(\tau+2w)}\vartheta_3(\tau, w), \end{cases}$$

ferner

$$(9.)\quad \begin{cases} \vartheta(\tau, w+2) = \vartheta(\tau, w), \\ \vartheta_0(\tau, w+1) = \vartheta_0(\tau, w), \\ \vartheta_1(\tau, w+1) = -\vartheta_1(\tau, w), \\ \vartheta_2(\tau, w+1) = -\vartheta_2(\tau, w), \\ \vartheta_3(\tau, w+1) = \vartheta_3(\tau, w), \\ \vartheta_\alpha(\tau, w+2) = \vartheta_\alpha(\tau, w). \end{cases}$$

Weiter ist

$$(10.)\quad \begin{cases} \vartheta(\tau, 0) = \eta(p, 1) = \eta, \\ \vartheta_\alpha(\tau, 0) = \eta_\alpha(p, 1) = \eta_\alpha, \end{cases}$$

und wir schreiben in der Folge der Gleichmässigkeit wegen ϑ statt η, ϑ_α statt η_α. So ist

$$(11.)\quad \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\right)^2 = \varkappa, \quad \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\right)^2 = \varkappa_1.$$

Die übrigen Formeln von § 53 sind gleichfalls leicht zu übertragen, wobei folgende Werthe von w und x correspondiren:

$$\begin{aligned} w &= 2k\phantom{{}+1}, & x &= 1, \\ w &= 2k+1, & x &= -1, \\ w &= 2k+\tfrac{1}{2}, & x &= i, \\ w &= 2k-\tfrac{1}{2}, & x &= -i, \\ w &= 2k+\tau, & x &= p, \\ w &= 2k+\tfrac{\tau}{2}, & x &= p^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

u. s. w.

4. Die Productformeln für die Thetafunctionen gestatten eine Weiterentwicklung zu *Doppelproducten*. Es ist

(12.) $\vartheta(\tau, w)$

$$=\prod_{1}^{\infty}{}_{n}(1-p^{2n})\prod_{0}^{\infty}{}_{n}(1+e^{\pi i(2n+1)\tau+\pi i w})(1+e^{\pi i(2n+1)\tau-\pi i w})$$

$$=\prod_{1}^{\infty}{}_{n}(1-p^{2n})\prod_{0}^{\infty}{}_{n}(1+2e^{\pi i(2n+1)\tau}\cos\pi w+e^{2\pi i(2n+1)\tau})$$

oder, da

$$1+2e^{\pi i(2n+1)\tau}\cos\pi w+e^{2\pi i(2n+1)\tau}$$
$$=e^{\pi i(2n+1)\tau}\left[e^{\pi i(2n+1)\tau}+e^{-\pi i(2n+1)\tau}+2\cos\pi w\right]$$
$$=2e^{\pi i(2n+1)\tau}\left[\cos\pi(2n+1)\tau+\cos\pi w\right]$$
$$=4e^{\pi i(2n+1)\tau}\cos\pi\frac{w+(2n+1)\tau}{2}\cos\pi\frac{w-(2n+1)\tau}{2}$$

ist,

(13.) $\vartheta(\tau, w)$

$$=\prod_{1}^{\infty}{}_{n}(1-p^{2n})\prod_{0}^{\infty}{}_{n}4e^{\pi i(2n+1)}\cos\pi\frac{w+(2n+1)\tau}{2}\cos\pi\frac{w-(2n+1)\tau}{2}$$

$$=\prod_{1}^{\infty}{}_{n}(1-p^{2n})\prod_{1}^{\infty}{}_{n}(1+p^{2n+1})^2$$

$$\cdot\prod_{0}^{\infty}{}_{n}\frac{4\cos\pi\dfrac{w+(2n+1)\tau}{2}\cos\pi\dfrac{w-(2n+1)\tau}{2}}{\left(e^{\frac{\pi i(2n+1)\tau}{2}}+e^{\frac{-\pi i(2n+1)\tau}{2}}\right)^2}$$

$$=\vartheta\prod_{0}^{\infty}{}_{n}\frac{\cos\pi\dfrac{w+(2n+1)\tau}{2}\cos\pi\dfrac{w-(2n+1)\tau}{2}}{\cos^2\dfrac{\pi(2n+1)\tau}{2}}$$

$$=\vartheta\prod_{-\nu-1}^{+\nu}{}_{n}\frac{\cos\pi\dfrac{w+(2n+1)\tau}{2}}{\cos\pi\dfrac{(2n+1)\tau}{2}},$$

worin $\nu=\infty$, ebenso wie sogleich $\mu=\infty$ zu nehmen ist. Benutzt man die Productentwicklung für $\cos x$ (§ 42, (6.)), so findet man endlich

$$(14.)\quad \vartheta(\tau, w)=\vartheta\prod_{-\nu-1}^{+\nu}{}_{n}\prod_{-\mu-1}^{+\mu}{}_{m}\frac{1-\dfrac{w+(2n+1)\tau}{2m+1}}{1-\dfrac{(2n+1)\tau}{2m+1}}$$

$$=\vartheta\prod_{-\nu-1}^{+\nu}{}_{n}\prod_{-\mu-1}^{+\mu}{}_{m}\left(1-\frac{w}{2m+1-(2n+1)\tau}\right)$$

$$= \vartheta \prod_{-\nu-1}^{+\nu}{}^{n} \prod_{-\mu-1}^{+\mu}{}^{m} \left(1 - \frac{w}{2m+1+(2n+1)\tau}\right).$$

Dieses Doppelproduct, dessen Convergenz unmittelbar aus der Entwicklung hervorgeht, ist derart auszuführen, dass zuerst nach m, dann nach n multiplicirt wird; dasselbe ändert seinen Werth bei Änderung der Anordnung der Factoren, ins Besondere auch bei Vertauschung von m und n, wie wir bei späterer Gelegenheit auszuführen haben werden.

Die Entwicklungen für die vier anderen Thetafunctionen sind die folgenden:

(15.) $\vartheta_0(\tau, w)$

$$= \prod_{1}^{\infty}{}^{n}(1-p^{2n}) \prod_{0}^{\infty}{}^{n}(1-e^{\pi i(2n+1)\tau+2\pi i w})(1-e^{\pi i(2n+1)\tau-\pi i w})$$

$$= \prod_{1}^{\infty}{}^{n}(1-p^{2n}) \prod_{0}^{\infty}{}^{n}(1-2e^{\pi i(2n+1)\tau}\cos 2\pi w + e^{2\pi i(2n+1)\tau})$$

$$= \vartheta_0 \prod_{-\nu-1}^{+\nu}{}^{n} \frac{\sin \pi \dfrac{2w+(2n+1)\tau}{2}}{\sin \pi \dfrac{\pi(2n+1)\tau}{2}}$$

$$= \vartheta_0 \prod_{-\nu-1}^{+\nu}{}^{n} \prod_{-\mu}^{+\mu}{}^{m} \left(1 - \frac{w}{m+(n+\frac{1}{2})\tau}\right);$$

(16.) $\vartheta_1(\tau, w)$

$$= 2p^{\frac{1}{4}} \prod_{1}^{\infty}{}^{n}(1-p^{2}) \sin \pi w \prod_{1}^{\infty}{}^{n}(1-e^{2\pi i n\tau+2\pi i w})(1-e^{2\pi i n\tau-2\pi i w})$$

$$= 2p^{\frac{1}{4}} \prod_{1}^{\infty}{}^{n}(1-p^{2}) \sin \pi w \prod_{1}^{\infty}{}^{n}(1-2e^{2\pi i n\tau}\cos 2\pi w + e^{4\pi i n\tau})$$

$$= \vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 \sin \pi w \prod_{-\nu}^{+\nu}{}^{n} \frac{\sin \pi(w+n\tau)}{\sin \pi n\tau}$$

$$= \vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3\, \pi w \prod_{-\nu}^{+\nu}{}^{n} \prod_{-\mu}^{+\mu}{}^{m} \left(1 - \frac{w}{m+n\tau}\right),$$

wobei die Combination $m = n = 0$ auszuschliessen ist;

(17.) $\vartheta_2(\tau, w) = 2p^{\frac{1}{4}} \prod_{1}^{\infty}{}^{n}(1-p^{2n}) \cos \pi w$

$$\cdot \prod_{1}^{\infty}{}^{n}(1+e^{2\pi i n\tau+2\pi i w})(1+e^{2\pi i n\tau-2\pi i w})$$

$$= 2p^{\frac{1}{4}} \prod_{1}^{\infty} {}^{n} (1 - p^{2n}) \cos \pi w \prod_{1}^{\infty} {}^{n} (1 + 2 e^{2\pi i n \tau} \cos 2\pi w + e^{4\pi i n \tau})$$

$$= \vartheta_2 \prod_{-\nu}^{+\nu} {}^{n} \frac{\cos \pi (w + n\tau)}{\cos \pi n \tau}$$

$$= \vartheta_2 \prod_{-\nu}^{+\nu} {}^{n} \prod_{-\mu}^{+\mu} {}^{m} \left(1 - \frac{w}{m + \frac{1}{2} + n\tau}\right);$$

(18.) $\vartheta_3(\tau, w)$

$$= \prod_{1}^{\infty} {}^{n} (1 - p^{2n}) \prod_{0}^{\infty} {}^{n} (1 + e^{\pi i (2n+1)\tau + 2\pi i w}) (1 + e^{\pi i (2n+1)\tau - 2\pi i w})$$

$$= \prod_{1}^{\infty} {}^{n} (1 - p^{2n}) \prod_{0}^{\infty} {}^{n} (1 + 2 e^{\pi i (2n+1)\tau} \cos 2\pi w + e^{2\pi i (2n+1)\tau})$$

$$= \vartheta_3 \prod_{-\nu-1}^{+\nu} {}^{n} \frac{\cos \pi (w + (n + \frac{1}{2})\tau)}{\cos \pi (n + \frac{1}{2})\tau}$$

$$= \vartheta_3 \prod_{-\nu-1}^{+\nu} {}^{n} \prod_{-\mu-1}^{+\mu} {}^{m} \left(1 - \frac{w}{m + \frac{1}{2} + (n + \frac{1}{2})\tau}\right).$$

§ 69.

Weitere Relationen bei den Thetafunctionen.

1. Aus den Multiplicationstheoremen der η-Functionen werden *Additionstheoreme* der Thetafunctionen. Wir haben

(1.) $$\vartheta(2\tau, u+v)\vartheta(2\tau, u-v) = \frac{\vartheta(\tau, u)\vartheta(\tau, v) + \vartheta(\tau, u+1)\vartheta(\tau, v+1)}{2}$$

u. s. w.

Die Theoreme von § 54 lassen sich sofort für die Thetafunctionen interpretiren, wenn man

$$[\alpha \beta \gamma \delta] = \vartheta_\alpha \vartheta_\beta \vartheta_\gamma(\tau, u + v) \vartheta_\delta(\tau, u - v)$$

und

$$(\alpha \beta \gamma \delta) = \vartheta_\alpha(\tau, u) \vartheta_\beta(\tau, u) \vartheta_\gamma(\tau, v) \vartheta_\delta(\tau, v)$$

setzt.

2. Die Transformationsformeln von § 51 lehren uns, $\vartheta(n\tau, nw)$ und $\vartheta\left(\frac{\tau + 2m}{n}, w\right)$ durch Thetafunctionen mit dem Parameter τ auszudrücken; es ist

(2.) $$\vartheta(2\tau, 2w) = \frac{1}{\vartheta(2\tau, 1)} \vartheta(\tau, w + \tfrac{1}{2})\vartheta(\tau, w - \tfrac{1}{2}),$$

(3.) $$\vartheta(2\tau, 2w + 1) = \frac{1}{\vartheta(2\tau, 1)} \vartheta(\tau, w)\vartheta(\tau, w + 1)$$

und für ungerade n

$$(4.)\qquad \vartheta(n\tau, nw) = \frac{(1-p^{2n})(1-p^{4n})(1-p^{6n})\cdots}{[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots]^n}$$

$$\cdot\,\vartheta(\tau, w)\,\vartheta\left(\tau, w+\tfrac{2}{n}\right)\vartheta\left(\tau, w+\tfrac{4}{n}\right)\cdots\vartheta\left(\tau, w+\frac{2(n-1)}{n}\right).$$

Weiter haben wir unter Berücksichtigung, dass die n Werthe von $p^{\frac{1}{n}}$, die alle in den Transformationsformeln zulässig sind, sich durch $e^{\frac{\pi i(\tau+2m)}{n}}$ (m ganzzahlig) darstellen,

$$(5.)\qquad \vartheta\left(\frac{\tau}{2}, w\right) = \frac{2}{\vartheta\left(\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right)}\,\vartheta\left(\tau, w-\frac{\tau}{2}\right)\vartheta\left(\tau, w+\frac{\tau}{2}\right),$$

worin auch $\frac{\tau}{2}$ durch $\frac{\tau}{2}+1$ ersetzt werden darf, und für ungerade n, wenn $p^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\pi i(\tau+2m)}{n}}$ genommen wird,

$$(6.)\qquad \vartheta\left(\frac{\tau+2m}{n}, w\right) = \frac{\left(1-p^{\frac{2}{n}}\right)\left(1-p^{\frac{4}{n}}\right)\left(1-p^{\frac{6}{n}}\right)\cdots}{[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots]^n}$$

$$\cdot\,\vartheta\left(\tau, w-\frac{(n-1)(\tau+2m)}{n}\right)\vartheta\left(\tau, w-\frac{(n-3)(\tau+2m)}{n}\right)\cdots$$

$$\cdot\,\vartheta(\tau, w)\,\vartheta\left(\tau, w+\frac{2(\tau+2m)}{n}\right)\cdots\vartheta\left(\tau, w+\frac{(n-1)(\tau+2m)}{n}\right).$$

Die Transformationsformeln für die übrigen Thetafunctionen gehen so unmittelbar aus den Formeln von § 55 hervor, dass eine Zusammenstellung derselben überflüssig erscheint.

§ 70.

Die elliptischen Functionen.

1. Wir könnten nun aus $S(p, x)$, $C(p, x)$ und $D(p, x)$ dadurch, dass wir wieder $p = e^{\pi i\tau}$, $x = e^{\pi i w}$ setzen, Functionen mit den Perioden $y = x+2$ und $y = x+\tau$, resp. $y = x+2\tau$ herleiten; jedoch zieht man es vor, an Stelle dieser Perioden andere einzuführen. Wir setzen $p = e^{\frac{2\pi i\Omega'}{\Omega}}$, also $\tau = \frac{2\,\Omega'}{\Omega}$, und $x = e^{\frac{2\pi i w}{\Omega}}$, sodass die Function $S\left(p, e^{\frac{2\pi i w}{\Omega}}\right)$ die Perioden Ω und Ω' erhält. τ und damit p nehmen wir als ge-

gebene Grössen an, während wir für Ω noch eine zweckmässige Wahl treffen können. Da $S(p, 1) = 0$ ist, so wird $S\left(p, e^{\frac{2\pi i w}{\Omega}}\right)$ für $w = 0$ verschwinden; es wird sich zeigen, dass es namentlich für die Differentiation bequem ist, wenn wir Ω so festsetzen, dass

$$\left[\frac{S\left(p, e^{\frac{2\pi i w}{\Omega}}\right)}{w}\right]_{w=0} = 1$$

wird. Wir können hierfür aber setzen

$$1 = \frac{\eta_3}{\eta_2}\left[\frac{\eta_1\left(p, e^{\frac{2\pi i w}{\Omega}}\right)}{w\eta_0\left(p, e^{\frac{2\pi i w}{\Omega}}\right)}\right]_{w=0}$$

$$= \frac{\eta_3}{\eta_2}\,\frac{i p^{\frac{1}{2}}\left[(1-p^3)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\right]^2}{\left[(1-p)(1-p^3)\cdots\right]^2}\left[\frac{1-e^{\frac{4\pi i w}{\Omega}}}{w}\right]_{w=0}$$

$$= \frac{i\eta_3\eta_2\eta_3}{2\eta_2}\left[\frac{1-e^{\frac{4\pi i w}{\Omega}}}{w}\right]_{w=0} = \frac{i\vartheta_3^2}{2}\left[\frac{1-1-\frac{4\pi i w}{\Omega}-\cdots}{w}\right]_{w=0}$$

oder $\frac{2\vartheta_3^2\pi}{\Omega} = 1$,

so dass wir in Zukunft immer

$$\Omega = 2\pi\vartheta_3^2 \tag{1.}$$

oder

$$\vartheta_3 = \sqrt{\frac{\Omega}{2\pi}} \tag{2.}$$

annehmen. Übrigens kommen wir in § 81 auf diesen Gegenstand zurück.

2. Wir setzen nun mit Jacobi

$$S\left(e^{\frac{2\pi i\Omega'}{\Omega}}, e^{\frac{2\pi i w}{\Omega}}\right) = \sin\operatorname{am} w, \tag{3.}$$

$$C\left(e^{\frac{2\pi i\Omega'}{\Omega}}, e^{\frac{2\pi i w}{\Omega}}\right) = \cos\operatorname{am} w, \tag{4.}$$

$$D\left(e^{\frac{2\pi i\Omega'}{\Omega}}, e^{\frac{2\pi i w}{\Omega}}\right) = \Delta\operatorname{am} w, \tag{5.}$$

wofür wir nöthigenfalls genauer $\sin\operatorname{am}(\tau, w)$ u. s. w. schreiben, während wir die Bezeichnung des Parameters τ unterdrücken, wenn hierdurch keine Undeutlichkeit entstehen kann. Man spricht die Namen dieser Functionen folgendermassen aus:

Sinus Amplitude, *Cosinus Amplitude*, *Delta Amplitude*. Der Grund dieser etwas umständlichen Bezeichnung, die Gudermann durch die kürzere sn w, cn w, dn w ersetzte, geht aus der Theorie der elliptischen Intergrale hervor.

3. Nach §§ 56 und 57 oder direct haben wir die Gleichungen

$$(6.)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}\,(w \pm \Omega) = \sin\mathrm{am}\,w,\ \sin\mathrm{am}\,(w \pm \Omega') = \sin\mathrm{am}\,w, \\ \cos\mathrm{am}\,(w \pm \Omega) = \cos\mathrm{am}\,w, \cos\mathrm{am}\,(w \pm \Omega') = -\cos\mathrm{am}\,w, \\ \varDelta\,\mathrm{am}\,(w \pm \Omega) = \varDelta\,\mathrm{am}\,w,\ \varDelta\,\mathrm{am}\,(w \pm \Omega') = -\varDelta\,\mathrm{am}\,w, \\ \sin\mathrm{am}\left(\frac{\Omega}{2} - w\right) = \sin\mathrm{am}\,w, \\ \cos\mathrm{am}\,(-w) = \cos\mathrm{am}\left(\pm\frac{\Omega}{2} \pm \Omega' + w\right) = \cos\mathrm{am}\,w, \\ \varDelta\,\mathrm{am}\,(-w) = \varDelta\,\mathrm{am}\left(w \pm \frac{\Omega}{2}\right) = \varDelta\,\mathrm{am}\,w, \end{cases}$$

$$(7.)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}\,0 = 0,\ \cos\mathrm{am}\,0 = 1,\ \varDelta\,\mathrm{am}\,0 = 1, \\ \sin\mathrm{am}\,\frac{\Omega}{2} = 0,\ \cos\mathrm{am}\,\frac{\Omega}{2} = -1,\ \varDelta\,\mathrm{am}\,\frac{\Omega}{2} = 1, \\ \sin\mathrm{am}\,\Omega' = 0,\ \cos\mathrm{am}\,\Omega' = -1,\ \varDelta\,\mathrm{am}\,\Omega' = -1, \\ \sin\mathrm{am}\,\frac{\Omega}{4} = 1,\ \cos\mathrm{am}\,\frac{\Omega}{4} = 0,\ \varDelta\,\mathrm{am}\,\frac{\Omega}{4} = \varkappa_1, \\ \sin\mathrm{am}\,\frac{\Omega'}{2} = \infty,\ \cos\mathrm{am}\,\frac{\Omega'}{2} = \infty,\ \varDelta\,\mathrm{am}\,\frac{\Omega'}{2} = \infty, \\ \sin\mathrm{am}\left(\frac{\Omega}{4} \pm \frac{\Omega'}{2}\right) = \frac{1}{\varkappa},\ \cos\mathrm{am}\left(\frac{\Omega}{4} \pm \frac{\Omega'}{2}\right) = \mp\frac{i\varkappa_1}{\varkappa}, \\ \qquad\qquad \varDelta\,\mathrm{am}\left(\frac{\Omega}{4} + \frac{\Omega'}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

Auch die übrigen Formeln von § 57 sind leicht umzusetzen, wenn man beachtet, dass einer Multiplication von x mit i oder $p^{\frac{1}{2}}$ eine Addition von $\frac{\Omega}{4}$, resp. $\frac{\Omega'}{2}$ zu w entspricht.

4. Die *Additionstheoreme*, die aus den *Multiplicationstheoremen* für $S(p, x)$ u. s. w. hervorgehen, lauten ins Besondere:

$$(8.)\quad \sin\mathrm{am}\,(u + v) = \frac{\sin\mathrm{am}\,u\ \cos\mathrm{am}\,v\ \varDelta\,\mathrm{am}\,v + \sin\mathrm{am}\,v\ \cos\mathrm{am}\,u\ \varDelta\,\mathrm{am}\,u}{1 - \varkappa^2 \sin^2\mathrm{am}\,u\ \sin^2\mathrm{am}\,v}$$

u. s. w.

5. Der *Potenzirung* von $S(p, x)$ u. s. w. entspricht die *Multiplication* der elliptischen Functionen, während an Stelle

der *Radicirung* die *Division* tritt; es handelt sich bei diesen Problemen einerseits darum, sin am nw durch sin am w, andrerseits sin am $\frac{w}{n}$ durch sin am w auszudrücken.

6. Der gesammte Verlauf von sin am (τ, w) für *reelle* p, d. h. *rein imaginäre* τ, ist ohne Schwierigkeit aus § 60, 5 zu entnehmen. Ω wird alsdann reell, Ω' rein imaginär; bei sin am $(\tau, w) = S(p, x)$ entsprechen reelle w solchen x, deren absoluter Betrag die Einheit ist, während für rein imaginäre w die Grösse x reell wird u. s. w. Wir können hiernach das folgende Hauptresultat aussprechen: sin am (τ, w) *wird für rein imaginäre* τ *reell, wenn* w *auf der Abscissenaxe oder einer zu ihr im Abstande* $\frac{k}{2}\,|\,\Omega'\,|$ *gezogenen Parallelen, oder andrerseits auf einer Parallelen zur Ordinatenaxe liegt, welche von dieser den Abstand* $\frac{\Omega}{4} + \frac{k\Omega}{2}$ *hat; es wird rein imaginär für alle* w*, welche auf der Ordinatenaxe oder einer Parallelen zu ihr mit dem Abstande* $\frac{k\Omega}{2}$ *liegen; im Übrigen ist* sin am(τ, w) *complex.*

§ 71.

Die Differentiation der elliptischen Functionen.

1. Mit Hülfe der Additionstheoreme ist es ein Leichtes, die Differentialquotienten der drei elliptischen Functionen zu finden. Es ist

$$\sin\text{am}\,(w + dw)$$
$$= \frac{\sin\text{am}\,w\,\cos\text{am}\,dw\;\Delta\,\text{am}\,dw + \cos\text{am}\,w\;\Delta\,\text{am}\,w\,\sin\text{am}\,dw}{1 - \varkappa^2\sin^2\text{am}\,w\,\sin^2\text{am}\,dw};$$

bedenkt man nun, dass nach § 70, 1

$$\frac{\sin\text{am}\,dw}{dw} = 1,$$

somit*)

$$\cos\text{am}\,dw = \sqrt{1 - \sin^2\text{am}\,dw} = 1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\text{am}\,dw - \cdots$$
$$= 1 - \frac{dw^2}{2} - \cdots$$

*) Die Richtigkeit der Wahl des Vorzeichens bei den Quadratwurzeln ergiebt sich aus den Relationen cos am $0 = 1$, Δ am $0 = 1$.

und ebenso

$$\Delta \text{ am } dw = 1 - \frac{\varkappa^2 dw^2}{2} - \cdots$$

ist, so folgt durch Benutzung der Entwicklung

$$\frac{1}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \text{am } w \sin^2 \text{am } dw} = 1 + \varkappa^2 \sin^2 \text{am } w \sin^2 \text{am } dw + \cdots$$

$$\frac{d \sin \text{am } w}{dw} = \frac{\sin \text{am } (w + dw) - \sin \text{am } w}{dw}$$

$$= \frac{\sin \text{am } w \cos \text{am } dw \,\Delta \text{ am } dw + \cos \text{am } w \,\Delta \text{ am } w \sin \text{am } dw + \cdots - \sin \text{am } w}{dw}$$

$$= \frac{\cos \text{am } w \,\Delta \text{ am } w \sin \text{am } dw}{dw}$$

oder

(1.) $$\frac{d \sin \text{am } w}{dw} = \cos \text{am } w \,\Delta \text{ am } w$$

oder

(2). $$\frac{d \sin \text{am } w}{dw} = \sqrt{(1 - \sin^2 \text{am } w)(1 - \varkappa^2 \sin^2 \text{am } w)},$$

worin das Zeichen der vorigen Formel entsprechend bestimmt werden muss.

Setzen wir bei analoger Beziehung wie in § 58

$$x = \sin \text{am } y \text{ oder } y = \arg \sin \text{am } x,$$

so haben wir

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{(1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2)}$$

oder

(3.) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2)}}.$$

In derselben Weise finden wir

(4.) $$\frac{d \cos \text{am } w}{dw} = - \sin \text{am } w \,\Delta \text{ am } w,$$

(5.) $$\frac{d \,\Delta \text{ am } w}{dw} = - \varkappa^2 \sin \text{am } w \cos \text{am } w.$$

2. Für spätere Untersuchungen ist es von Wichtigkeit, auch die höheren Differentialquotienten von $\sin \text{am } w$ und deren Bildungsgesetze zu kennen. Es ist

$$\frac{d^2 \sin \text{am } w}{dw^2} = \frac{d (\cos \text{am } w \,\Delta \text{ am } w)}{dw} = \cos \text{am } w \frac{d \Delta \text{ am } w}{dw} + \Delta \text{ am } w \frac{d \cos \text{am } w}{dw}$$

$$= - \varkappa^2 \sin \text{am } w \cos^2 \text{am } w - \sin \text{am } w \,\Delta^2 \text{ am } w$$

oder, wenn man Alles durch sin am w ausdrückt:

$$(6.)\qquad \frac{d \sin^2 \operatorname{am} w}{d w^2} = -(1+\varkappa^2)\sin \operatorname{am} w + 2\varkappa^2 \sin^3 \operatorname{am} w$$

und weiter

$$(7.)\qquad \frac{d^3 \sin \operatorname{am} w}{d w^3} = [-(1+\varkappa^2) + 6\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} w] \cos \operatorname{am} w \, \Delta \operatorname{am} w.$$

Es ist nicht schwer, schon jetzt ein Urtheil über die Bildung der höheren Differentialquotienten zu gewinnen. Die $2n^{\text{ten}}$ Differentialquotienten sind *ungerade* ganze Functionen von sin am w und steigen darin bis zur $(2n+1)^{\text{ten}}$ Potenz; die $(2n+1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten dagegen sind *gerade* Functionen derselben Grösse, die bis zum $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grade ansteigen und noch mit cos am w Δ am w multiplicirt sind. Die Richtigkeit dieser Behauptung beweisen wir durch den Schluss von n auf $n+1$, bei welcher Gelegenheit wir zugleich Recursionsformeln für die Coefficienten dieser Ausdrücke finden. Ist

$$(8.)\qquad \frac{d^{2n} \sin \operatorname{am} w}{d w^{2n}} = A_1^{(2n)} \sin \operatorname{am} w + A_3^{(2n)} \sin^3 \operatorname{am} w + A_5^{(2n)} \sin^5 \operatorname{am} w + \cdots + A_{2n+1}^{(2n)} \sin^{2n+1} \operatorname{am} w,$$

so folgt

$$(9.)\qquad \frac{d^{2n+1} \sin \operatorname{am} w}{d w^{2n+1}} = \Big[A_1^{(2n)} + 3A_3^{(2n)} \sin^2 \operatorname{am} w + 5A_5^{(2n)} \sin^4 \operatorname{am} w + \cdots + (2n+1) A_{2n+1}^{(2n)} \sin^{2n} \operatorname{am} w\Big] \cdot \cos \operatorname{am} w \, \Delta \operatorname{am} w$$

und weiter

$$\frac{d^{2n+2} \sin \operatorname{am} w}{d w^{2n+2}} = \Big[3 \cdot 2 A_3^{(2n)} \sin \operatorname{am} w + 5 \cdot 4 A_5^{(2n)} \sin^3 \operatorname{am} w + \cdots + (2n+1) \cdot 2n A_{2n+1}^{(2n)} \sin^{2n+1} \operatorname{am} w\Big] \cos^2 \operatorname{am} w \, \Delta^2 \operatorname{am} w$$
$$+ \Big[A_1^{(2n)} + 3A_3^{(2n)} \sin^2 \operatorname{am} w + 5A_5^{(2n)} \sin^4 \operatorname{am} w + \cdots + (2n+1) A_{2n+1}^{(2n)} \sin^{2n} \operatorname{am} w\Big] \cdot [-(1+\varkappa^2)\sin \operatorname{am} w + 2\varkappa^2 \sin^3 \operatorname{am} w]$$

oder

$$(10.)\qquad \frac{d^{2n+2} \sin \operatorname{am} w}{d w^{2n+2}} = [3 \cdot 2 A_3^{(2n)} - (1+\varkappa^2) A_1^{(2n)}] \sin \operatorname{am} w + [5 \cdot 4 A_5^{(2n)} - 3 \cdot 3 (1+\varkappa^2) A_3^{(2n)} + 2 \cdot 1 \varkappa^2 A_1^{(2n)}] \sin^3 \operatorname{am} w$$

$$+ [7 \cdot 6 A_7^{(2n)} - 5 \cdot 5 (1 + \varkappa^2) A_5^{(2n)} + 4 \cdot 3 \varkappa^2 A_3^{(2n)}] \sin^5 \operatorname{am} w$$
$$+ \cdots + \Big[(2k+1)\, 2k A_{2k+1}^{(2n)} - (2k-1)^2 (1+\varkappa^2) A_{2k-1}^{(2n)}$$
$$+ (2k-2)(2k-3)\varkappa^2 A_{2k-3}^{(2n)}\Big] \sin^{2k-1} \operatorname{am} w$$
$$+ \cdots$$
$$+ (2n+1)(2n+2)\varkappa^2 A_{2n+1}^{(2n)} \sin^{2n+3} \operatorname{am} w.$$

Gilt also das vorhin ausgesprochene Gesetz für den $(2n)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten, so gilt es auch für den $(2n+1)^{\text{ten}}$ und $(2n+2)^{\text{ten}}$; da es nun für den zweiten richtig ist, so wird es auch für alle folgenden gelten.

Die Recursionsformeln für die Bildung der Coefficienten lauten:

$$A_{2k}^{(2n+1)} = (2k+1) A_{2k+1}^{(2n)} \tag{11.}$$

und

$$A_{2k-1}^{(2n+2)} = (2k+1) 2k A_{2k+1}^{(2n)} - (2k-1)^2 (1+\varkappa^2) A_{2k-1}^{(2n)} + (2k-2)(2k-3)\varkappa^2 A_{2k-3}^{(2n)}. \tag{12.}$$

3. Mit Hülfe dieser Entwicklungen ist es umgekehrt leicht, die Grössen

$$\sin^3 \operatorname{am} w,\ \sin^5 \operatorname{am} w,\ \sin^7 \operatorname{am} w \quad \text{u. s. w.}$$

durch

$$\sin \operatorname{am} w,\ \frac{d^2 \sin \operatorname{am} w}{dw^2},\ \frac{d^4 \sin \operatorname{am} w}{dw^4} \quad \text{u. s. w.}$$

auszudrücken. Man berechnet der Reihe nach

$$(13.)\ \left\{\begin{aligned}
1 \cdot 2\varkappa^2 \sin^3 \operatorname{am} w &= \frac{d^2 \sin \operatorname{am} w}{dw^2} + (1+\varkappa^2) \sin \operatorname{am} w, \\
1 \cdot 2 \cdot 3 . 4 \varkappa^4 \sin^5 \operatorname{am} w &= \frac{d^4 \sin \operatorname{am} w}{dw^4} + 10(1+\varkappa^2) \frac{d^2 \sin \operatorname{am} w}{dw^2} \\
&\quad + 3(3 + 2\varkappa^2 + 3\varkappa^4) \sin \operatorname{am} w, \\
1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \varkappa^6 \sin^7 \operatorname{am} w &= \frac{d^6 \sin \operatorname{am} w}{dw^6} \\
&\quad + 35(1+\varkappa^2) \frac{d^4 \sin \operatorname{am} w}{dw^4} \\
&\quad + 7(37 + 38\varkappa^2 + 37\varkappa^4) \frac{d^2 \sin \operatorname{am} w}{dw} \\
&\quad + 45(5 + 3\varkappa^2 + 3\varkappa^4 + 5\varkappa^6) \sin \operatorname{am} w \\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}\right.$$

Eine Recursionsformel für die Bildung der Coefficienten

dieser Reihe lässt sich mittelst der leicht zu verificirenden Formel

$$(14.)\quad \frac{d^2 \sin^n \operatorname{am} w}{dw^2} = n(n-1)\sin^{n-2}\operatorname{am} w - n^2(1+\varkappa^2)\sin^n \operatorname{am} w + (n+1)n\varkappa^2 \sin^{n+2}\operatorname{am} w$$

gewinnen. Setzt man nämlich*)

$$(15.)\quad (2n)!\,\varkappa^{2n}\sin^{2n+1}\operatorname{am} w = \frac{d^{2n}\sin\operatorname{am} w}{dw^{2n}} + B_2^{(2n+1)}\frac{d^{2n-2}\sin\operatorname{am} w}{dw^{2n-2}} + B_4^{(2n+1)}\frac{d^{2n-4}\sin\operatorname{am} w}{dw^{2n-4}} + \cdots + B_{2n}^{(2n+1)}\sin\operatorname{am} w,$$

so geht durch doppelte Differentiation dieses Ausdrucks mit Hülfe von (14.) die Relation

$$(16.)\quad B_{2m}^{(2n+1)} = B_{2m}^{(2n-1)} + (2n-1)^2(1+\varkappa^2)B_{2m-2}^{(2n-1)} - (2n-2)^2(2n-1)(2n-3)\varkappa^2 B_{2m-4}^{(2n-3)}$$

hervor.

Bemerkt möge noch werden, dass für *gerade* Potenzen von $\sin\operatorname{am} w$ ähnliche Entwicklungen nach *geraden* Differentialquotienten von $\sin^2 \operatorname{am} w$ möglich sind; auch für die negativen Potenzen von $\sin\operatorname{am} w$ gelten ähnliche Formeln. (Ausführlicheres über diesen Gegenstand siehe: Jacobi, Fundamenta nova, Gesammelte Werke Bd. I, p. 170 ff.)

4. Da

$$\frac{d\sin^n \operatorname{am} w}{dw} = n\sin^{n-1}\operatorname{am} w \cos\operatorname{am} w\ \Delta\operatorname{am} w$$

ist, so ergeben sich aus den Gleichungen (13.) folgende Relationen:

$$(17.)\quad \begin{cases} \cos\operatorname{am} w\ \Delta\operatorname{am} w = \dfrac{d\sin\operatorname{am} w}{dw}, \\ 1\cdot 2\cdot 3\varkappa^2\sin^2\operatorname{am} w\cos\operatorname{am} w\ \Delta\operatorname{am} w = \dfrac{d^3\sin\operatorname{am} w}{dw^3} + (1+\varkappa^2)\dfrac{d\sin\operatorname{am} w}{dw}, \\ 1\cdot 2\cdot 3.\,.\,4\cdot 5\varkappa^4\sin^4\operatorname{am} w\cos\operatorname{am} w\ \Delta\operatorname{am} w = \dfrac{d^5\sin\operatorname{am} w}{dw^5} \\ \quad + 10(1+\varkappa^2)\dfrac{d^3\sin\operatorname{am} w}{dw^3} + 3(3+2\varkappa^2+3\varkappa^4)\dfrac{d\sin\operatorname{am} w}{dw} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

*) Wie gebräuchlich, setzen wir $1\cdot 2\cdot 3\cdots m = m!$ (spr. „*m Facultät*“).

5. Die Differentiation der multiplicatorisch periodischen Functionen führt zu keinem so glatten Resultate, wie dies bei den doppelt additiv periodischen der Fall war. Aus

$$\sin \operatorname{am} w = S(p, x), \; x = e^{\frac{2\pi i w}{\Omega}}.$$

folgt

$$\frac{d \sin \operatorname{am} w}{dw} = \frac{dS(p, x)}{dx} \frac{dx}{dw} = \frac{dS(p, x)}{dx} \frac{2\pi i}{\Omega} e^{\frac{2\pi i w}{\Omega}} = \frac{2\pi i x}{\Omega} S'(p, x),$$

also

$$S'(p, x) = \frac{\Omega}{2\pi i x} S(p, x) \; D(p, x), \tag{18.}$$

und ebenso

$$C'(p, x) = -\frac{\Omega}{2\pi i x} S(p, x) \; D(p, x), \tag{19.}$$

$$D'(p, x) = -\frac{\Omega \varkappa^2}{2\pi i x} S(p, x) \; C(p, x). \tag{20.}$$

Setzen wir $S(p, x) = y$, so folgt die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Omega}{2\pi i x} \sqrt{(1 - y^2)(1 - \varkappa^2 y^2)}$$

oder

$$\frac{2\pi i x}{\Omega} \frac{dy}{dx} = \sqrt{(1 - y^2)(1 - \varkappa^2 y^2)}. \tag{21.}$$

6. Für die Thetafunctionen gelten mannichfache Differentialrelationen, von denen wir einige herleiten wollen.

Aus § 68, (3.) folgt*)

$$\frac{\partial \vartheta(\tau, w)}{\partial w} = \vartheta'(\tau, w) = -2\pi \sum_{1}^{\infty}{}^{n} n p^{n^2} \sin n\pi w,$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta(\tau, w)}{\partial w^2} = \vartheta''(\tau, w) = -2\pi^2 \sum_{1}^{\infty}{}^{n} n^2 p^{n^2} \cos n\pi w$$

und andererseits, da $p = e^{\pi i \tau}$ ist,

$$\frac{\partial \vartheta(\tau, w)}{\partial \tau} = 2\pi i \sum_{1}^{\infty}{}^{n} n^2 p^{n^2} \cos n\pi w;$$

aus den beiden letzten Gleichungen folgt die wichtige Relation

$$\frac{\partial^2 \vartheta(\tau, w)}{\partial w^2} = \pi i \frac{\partial \vartheta(\tau, w)}{\partial \tau}. \tag{22.}$$

---

*) Dass hier eine *gliedweise* Differentiation statthaft ist, ergiebt sich schon daraus, dass die Reihe für $\vartheta(\tau, w)$ in eine *Potenzreihe* verwandelt werden kann.

In gleicher Weise ergiebt sich für $\alpha = 0, 1, 2, 3$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(\tau, w)}{\partial w^2} = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_\alpha(\tau, w)}{\partial \tau}. \tag{23.}$$

7. Aus der Gleichung

$$\vartheta_1(\tau, w) = 2p^{\frac{1}{4}}(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots$$
$$\cdot \sin \pi w \prod_1^{\infty} {}^n (1 - p^{2n} e^{2\pi i w})(1 - p^{2n} e^{-2\pi i w})$$

folgt

$$\vartheta_1' = \left[\frac{d\vartheta_1(\tau, w)}{dw}\right]_{w=0} = \frac{\vartheta_1(\tau, dw) - \vartheta_1(\tau, 0)}{dw} = \frac{\vartheta_1(\tau, dw)}{dw}$$
$$= \left[\frac{\vartheta_1(\tau, w)}{w}\right]_{w=0}$$

oder, da $\left(\frac{\sin x}{x}\right)_{x=0} = 1$ ist,

$$\vartheta_1' = \left[\frac{\pi \vartheta_1(\tau, w)}{\sin \pi w}\right]_{w=0} = 2\pi p^{\frac{1}{4}}[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots]^3$$

oder nach § 53, (11.)

$$\vartheta_1' = \pi \vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3. \tag{24.}$$

8. Aus der Gleichung

$$[0000] = (0000) - (1111)$$

oder

$$\vartheta_0^2 \vartheta_0(\tau, w+v)\, \vartheta_0(\tau, w-v)$$
$$= \vartheta_0^2(\tau, w)\, \vartheta_0^2(\tau, v) - \vartheta_1^2(\tau, w)\, \vartheta_1^2(\tau, v)$$

folgt durch Entwicklung von $\vartheta_0(\tau, w+v)$, $\vartheta_0(\tau, w-v)$, $\vartheta_0^2(\tau, v)$ und $\vartheta_1^2(\tau, v)$ nach Potenzen von v mit Hülfe des Taylor'schen Satzes*)

$$\vartheta_0^2[\vartheta_0(\tau, w) + \vartheta_0'(\tau, w)v + \tfrac{1}{2}\vartheta_0''(\tau, w)v^2 + \cdots]$$
$$\cdot[\vartheta_0(\tau, w) - \vartheta_0'(\tau, w)v + \tfrac{1}{2}\vartheta_0''(\tau, w)v^2 - \cdots]$$
$$= \vartheta_0^2(\tau, w)\cdot[\vartheta_0^2 + \vartheta_0\vartheta_0''v^2 + \cdots]$$
$$- \vartheta_1^2(\tau, w)\,[\vartheta_1'^2 v^2 + \cdots]$$

---

*) Man beachte hierbei, dass für $\alpha = 0, 2, 3$

$$\vartheta_\alpha^{(2k+1)} = 0$$

und dass andererseits

$$\vartheta_1^{(2k)} = 0$$

ist, wie durch Differentiation der trigonometrischen Reihen für die Thetafunctionen und Nullsetzen des Arguments unmittelbar folgt.

und hieraus durch Ausmultipliciren und Vergleichen der Coefficienten von v^2

(25.)
$$\vartheta_0^2[\vartheta_0(\tau, w)\vartheta_0''(\tau, w) - \vartheta_0'^2(\tau, w)]$$
$$= \vartheta_0\vartheta_0''\vartheta_0^2(\tau, w) - \vartheta_1'^2\vartheta_1^2(\tau, w)$$

oder, wie leicht nachzurechnen,

$$\frac{d^2 \log \vartheta_0(\tau, w)}{dw^2} = \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} - \frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_0^2}\frac{\vartheta_1^2(\tau, w)}{\vartheta_0^2(\tau, w)}.$$

In gleicher Weise ergeben sich aus den Gleichungen

$$[0011] = (1100) - (0011),$$
$$[0022] = (2200) - (3311),$$
$$[0033] = (3300) - (2211)$$

die Relationen

(26.)
$$\frac{d^2 \log \vartheta_1(\tau, w)}{dw^2} = \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} - \frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_0^2}\frac{\vartheta_0^2(\tau, w)}{\vartheta_1^2(\tau, w)},$$

(27.)
$$\frac{d^2 \log \vartheta_2(\tau, w)}{dw^2} = \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} - \frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_0^2}\frac{\vartheta_3^2(\tau, w)}{\vartheta_2^2(\tau, w)},$$

(28.)
$$\frac{d^2 \log \vartheta_3(\tau, w)}{dw^2} = \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} - \frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_0^2}\frac{\vartheta_2^2(\tau, w)}{\vartheta_3^2(\tau, w)}.$$

9. Es ist

$$\frac{d\varkappa}{d\tau} = \frac{d\left[\frac{\vartheta_2^2(\tau, 0)}{\vartheta_3^2(\tau, 0)}\right]}{d\tau} = 2\vartheta_2(\tau, 0)\frac{\vartheta_3(\tau, 0)\frac{d\vartheta_2(\tau, 0)}{d\tau} - \vartheta_2(\tau, 0)\frac{d\vartheta_3(\tau, 0)}{d\tau}}{\vartheta_3^3(\tau, 0)}$$

oder nach (23.)*)

$$\frac{d\varkappa}{d\tau} = \frac{\vartheta_2(\vartheta_3\vartheta_2'' - \vartheta_2\vartheta_3'')}{2\pi i\vartheta_3^3}.$$

Setzt man aber in (27.) und (28.) $w = 0$ und subtrahirt die zweite Gleichung von der ersten, so folgt

$$\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} = \frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_0^2}\left(\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2} - \frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2}\right)$$

oder

$$\vartheta_3\vartheta_2'' - \vartheta_2\vartheta_3'' = -\frac{\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_1'^2}{\vartheta_0^2}\left(\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2} - \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)$$

oder mit Hülfe von (24.)

$$\vartheta_3\vartheta_2'' - \vartheta_2\vartheta_3'' = -\pi^2\vartheta_2^3\vartheta_3^3\left(\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2} - \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right).$$

---

*) Wir schreiben durchgehends

$$\frac{d^k\vartheta_\alpha(\tau, w)}{dw^k} = \vartheta_\alpha^{(k)}(\tau, w).$$

Hiernach wird

$$\frac{d\varkappa}{d\tau} = -\frac{\pi\vartheta_2^4\left(\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2} - \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)}{2i} = \frac{\pi i\vartheta_3^4\left(\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2} - \frac{\vartheta_2^6}{\vartheta_3^6}\right)}{2}$$

oder nach § 70, (2.) u. s. w.

$$(29.)\qquad \frac{d\varkappa}{d\tau} = \frac{i\Omega^2\varkappa(1-\varkappa^2)}{8\pi} = \frac{i\Omega^2\varkappa\varkappa_1^2}{8\pi i}.$$

10. Wir sind nunmehr in den Stand gesetzt, eine sehr merkwürdige Differentialgleichung für die Grössen Ω und Ω herzustellen. Es ist

$$(30.)\qquad \frac{d\Omega}{d\tau} = \frac{d[2\pi\vartheta_3^2(\tau,0)]}{d\tau} = 4\pi\vartheta_3\frac{d\vartheta_3}{d\tau} = -i\vartheta^3\vartheta_3'',$$

also

$$(31.)\qquad \frac{d\Omega}{d\varkappa} = \frac{d\Omega}{d\tau}\frac{d\tau}{d\varkappa} = -\frac{8\pi\vartheta_3\vartheta_3'}{\Omega^2\varkappa\varkappa_1^2} = -\frac{4\sqrt{2\pi}\vartheta_3''}{\Omega^{\frac{3}{2}}\varkappa(1-\varkappa^2)}.$$

Differentiiren wir (31.) nochmals nach $\varkappa$, so erhalten wir

$$(32.)\qquad \frac{d^2\Omega}{d\varkappa^2} = -4\sqrt{2\pi}$$

$$\cdot\frac{\Omega^{\frac{3}{2}}\varkappa(1-\varkappa^2)\frac{d\vartheta_3''}{d\varkappa} - \vartheta_3''\left[\frac{3}{2}\Omega^{\frac{1}{2}}\varkappa(1-\varkappa^2)\frac{d\Omega}{d\varkappa} + \Omega^{\frac{3}{2}}(1-3\varkappa^2)\right]}{\Omega^3\varkappa^2(1-\varkappa^2)^2}$$

$$= -4\sqrt{2\pi}$$

$$\cdot\frac{\Omega^{\frac{3}{2}}\varkappa(1-\varkappa^2)\frac{d\vartheta_3''}{d\varkappa} - \vartheta_3''\left[-\frac{6\sqrt{2\pi}\vartheta_3''}{\Omega} + \Omega^{\frac{3}{2}}(1-3\varkappa^2)\right]}{\Omega^3\varkappa^2(1-\varkappa^2)^2}.$$

Um diese Gleichung zu vereinfachen, beschäftigen wir uns mit dem Ausdrucke

$$\frac{d\vartheta_3''}{d\varkappa} = \frac{d\vartheta_3''}{d\tau}\,\frac{d\tau}{d\varkappa};$$

es ist

$$\frac{d\vartheta_3''}{d\tau} = \left\{\frac{d\left[\frac{d^2\vartheta_3(\tau,w)}{dw^2}\right]}{d\tau}\right\}_{w=0} = \left\{\frac{d^2\left[\frac{d\vartheta_3(\tau,w)}{d\tau}\right]}{dw^2}\right\}_{w=0}$$

$$= \left\{\frac{d^2\left[\frac{1}{4\pi i}\vartheta_3''(\tau,w)\right]}{dw^2}\right\}_{w=0} = \frac{\vartheta_3''''}{4\pi i}.$$

Aus (28.) folgt aber

$$\vartheta_3''(\tau, w) = \frac{\vartheta_3'^2(\tau, w)}{\vartheta_3(\tau, w)} - \frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_0^2} \frac{\vartheta_2^2(\tau, w)}{\vartheta_3(\tau, w)} + \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} \vartheta_3(\tau, w)$$

und durch Differentiation nach w

$$\vartheta_3'''(\tau, w) = \frac{2\vartheta_3(\tau, w)\vartheta_3'(\tau, w)\vartheta_3''(\tau, w) - \vartheta_3'^3(\tau, w)}{\vartheta_3^2(\tau, w)}$$

$$- \frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_0^2} \frac{2\vartheta_3(\tau, w)\vartheta_2(\tau, w)\vartheta_2'(\tau, w) - \vartheta_2^2(\tau, w)\vartheta_3'(\tau, w)}{\vartheta_3^2(\tau, w)}$$

$$+ \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} \vartheta_3'(\tau, w).$$

Differentiiren wir nochmals nach w und setzen $w = 0$ (wobei sich die Rechnung leicht bedeutend abkürzen lässt), so erhalten wir

$$\vartheta_3'''' = \frac{2\vartheta_3''^2}{\vartheta_3} - \frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_0^2} \frac{\vartheta_2(2\vartheta_3\vartheta_2'' - \vartheta_2\vartheta_3'')}{\vartheta_3^2} + \frac{\vartheta_0''\vartheta_3''}{\vartheta_0}$$

oder, da nach (28.) (wenn $w = 0$ gesetzt wird)

$$\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} = \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} + \frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_0^2} \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}$$

ist,

$$(33.) \qquad \vartheta_3'''' = \frac{3\vartheta_3''^2}{\vartheta_3} - \frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_0^2} \frac{2\vartheta_2(\vartheta_3\vartheta_2'' - \vartheta_2\vartheta_3'')}{\vartheta_3^2}$$

$$= \frac{3\vartheta_3''^2}{\vartheta_3} + \frac{2\vartheta_2^2\vartheta_1'^4}{\vartheta_0^4\vartheta_3}\left(\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2} - \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)$$

$$= \frac{3\vartheta_3''^2}{\vartheta_3} + 2\pi^4\vartheta_2^6\vartheta_3^3\left(\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2} - \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)$$

$$= \frac{3\vartheta_3''^2}{\vartheta_3} + 2\pi^4\vartheta_3^9\left(\frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} - \frac{\vartheta_2^8}{\vartheta_3^8}\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{2\pi}\,\vartheta_3''^2}{\Omega^{\frac{1}{2}}} + \frac{\Omega^{\frac{9}{2}}}{8\sqrt{2\pi}} \varkappa_2\varkappa_1^2$$

und somit

$$(34.) \qquad \frac{d\vartheta_3''}{d\varkappa} = -\frac{6\sqrt{2\pi}\,\vartheta_3''^2}{\Omega^{\frac{5}{2}}\varkappa\varkappa_1^2} - \frac{\Omega^{\frac{5}{2}}\varkappa}{4\sqrt{2\pi}}.$$

Setzen wir diesen Werth in (32.) ein, so erhalten wir

$$(35.) \qquad \frac{d^2\Omega}{d\varkappa^2} = \frac{\Omega}{1-\varkappa^2} + \frac{4\sqrt{2\pi}(1-3\varkappa^2)\vartheta_3''}{\Omega^{\frac{3}{2}}\varkappa^2(1-\varkappa^2)^2}$$

und schliesslich durch Elimination von ϑ_3'' aus (35.) und (31.) die Differentialgleichung

$$(36.)\qquad \varkappa(1-\varkappa^2)\frac{d^2\Omega}{d\varkappa^2}+(1-3\varkappa^2)\frac{d\Omega}{d\varkappa}=\varkappa\Omega.$$

11. Da $\Omega' = \frac{\Omega\tau}{2}$ ist, so haben wir

$$\frac{d\Omega'}{d\varkappa}=\frac{\tau}{2}\frac{d\Omega}{d\varkappa}+\frac{\Omega}{2}\frac{d\tau}{d\varkappa}=\frac{\tau}{2}\frac{d\Omega}{d\varkappa}+\frac{4\pi}{i\Omega\varkappa\varkappa_1^2}$$

und weiter

$$\frac{d^2\Omega'}{d\varkappa^2}=\frac{\tau}{2}\frac{d^2\Omega}{d\varkappa^2}+\frac{1}{2}\frac{d\Omega}{d\varkappa}\frac{8\pi}{i\Omega^2\varkappa\varkappa_1^2}-\frac{4\pi}{i}\frac{\varkappa\varkappa_1^2\frac{d\Omega}{d\varkappa}+(1-3\varkappa^2)\Omega}{\Omega^2\varkappa^2\varkappa_1^4}$$

$$=\frac{\tau}{2}\frac{d^2\Omega}{d\varkappa^2}-\frac{4\pi}{i}\frac{(1-3\varkappa^2)}{\Omega\varkappa^2\varkappa_1^4},$$

also

$$\varkappa(1-\varkappa^2)\frac{d^2\Omega'}{d\varkappa^2}+(1-3\varkappa^2)\frac{d\Omega'}{d\varkappa}$$

$$=\varkappa(1-\varkappa^2)\frac{\tau}{2}\frac{d^2\Omega}{d\varkappa^2}+(1-3\varkappa^2)\frac{\tau}{2}\frac{d\Omega}{d\varkappa}$$

oder nach (36.)

$$(37.)\qquad \varkappa(1-\varkappa^2)\frac{d^2\Omega'}{d\varkappa^2}+(1-3\varkappa^2)\frac{d\Omega'}{d\varkappa}=\varkappa\Omega'.$$

Die Grössen Ω und Ω' genügen daher, als Functionen von $\varkappa$ betrachtet, derselben linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, d. h. einer Differentialgleichung, welche die abhängige Variable und deren Differentialquotienten nur in der *ersten* Potenz enthält.

§ 72.

Partialbruchreihen und trigonometrische Reihen.

1. Die Partialbruchentwicklungen für $S(p,x)$, $C(p,x)$, $D(p,x)$ u. s. w. führen zu entsprechenden Reihen für $\sin\operatorname{am} w$, $\cos\operatorname{am} w$, $\Delta\operatorname{am} w$, aus denen sich leicht Doppelreihen herleiten lassen; die letzteren müssen neben den unendlichen Doppelproducten als die charakteristischste Entwicklung für die elliptischen Functionen gelten. Wir erhalten aus den Formeln von § 60 unter Benutzung von § 43, (6.) und (7.)

$$(1.)\quad \sin\operatorname{am} w=\frac{4}{\vartheta_2^2}\sin\frac{2\pi w}{\Omega}\sum_0^\infty{}_n\, p^{\frac{2n+1}{2}}\frac{1+p^{2n+1}}{1-2p^{2n+1}\cos\frac{4\pi w}{\Omega}+p^{4n+2}}$$

$$= \frac{4}{\vartheta_2^2} \sin\frac{2\pi w}{\Omega} \sum_0^\infty{}_n \frac{p^{\frac{2n+1}{2}} + \frac{1}{p^{\frac{2n+1}{2}}}}{p^{2n+1} + \frac{1}{p^{2n+1}} - 2\cos\frac{4\pi w}{\Omega}}$$

$$= \frac{4}{\vartheta_2^2} \sin\frac{2\pi w}{\Omega} \sum_0^\infty{}_n \frac{\cos(2n+1)\frac{\pi\tau}{2}}{\cos(2n+1)\pi\tau - \cos\frac{4\pi w}{\Omega}}$$

$$= \frac{4}{\vartheta_2^2} \sum_0^\infty{}_n \frac{\sin\frac{2\pi w}{\Omega}\cos(2n+1)\frac{\pi\tau}{2}}{\cos(2n+1)\pi\tau - \cos\frac{4\pi w}{\Omega}}$$

$$= \frac{1}{\vartheta_2^2} \sum_0^\infty{}_n \frac{\sin\left(\frac{2\pi w}{\Omega} + (2n+1)\frac{\pi\tau}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\pi w}{\Omega} - (2n+1)\frac{\pi\tau}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi w}{\Omega} + (2n+1)\frac{\pi\tau}{2}\right)\sin\left(\frac{2\pi w}{\Omega} - (2n+1)\frac{\pi\tau}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\vartheta_2^2} \sum_0^\infty{}_n \left[\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi w}{\Omega} - (2n+1)\frac{\pi\tau}{2}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi w}{\Omega} + (2n+1)\frac{\pi\tau}{2}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{\vartheta_2^2} \sum_{-\nu-1}^{+\nu}{}_n \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi w}{\Omega} - (2n+1)\frac{\pi\tau}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\pi\vartheta_2^2} \sum_{-\nu-1}^{+\nu}{}_n \sum_{-\mu}^{+\mu}{}_m \frac{(-1)^m}{\frac{2w}{\Omega} - (2n+1)\frac{\tau}{2} - m}$$

$$= \frac{1}{\varkappa} \sum_{-\nu-1}^{-\nu}{}_n \sum_{-\mu}^{+\mu}{}_m \frac{(-1)^m}{w - \frac{2n+1}{2}\Omega' - \frac{m}{2}\Omega};$$

(2.) $\cos\operatorname{am} w$

$$= \frac{4}{\vartheta_2^2} \cos\frac{2\pi w}{\Omega} \sum_0^\infty{}_n (-1)^n p^{\frac{2n+1}{2}} \frac{1 - p^{2n+1}}{1 - 2p^{2n+1}\cos\frac{4\pi w}{\Omega} + p^{4n+2}}$$

$$= -\frac{4i}{\vartheta_2^2} \cos\frac{2\pi w}{\Omega} \sum_0^\infty{}_n (-1)^n \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi\tau}{2}}{\cos(2n+1)\pi\tau - \cos\frac{4\pi w}{\Omega}}$$

$$= -\frac{i}{\vartheta_2^{\,2}} \sum_{-\nu-1}^{+\nu} {}_n \frac{(-1)^n}{\sin\left(\frac{2\pi w}{\Omega} - (2n+1)\frac{\pi\tau}{2}\right)}$$

$$= -\sum_{-\nu-1}^{+\nu} {}_n (-1)^n \sum_{-\mu}^{+\mu} {}_n \frac{(-1)^m}{w - \frac{2n+1}{2}\Omega' - \frac{m}{2}\Omega};$$

$$(3.)\quad \Delta\,\mathrm{am}\, w = 1 - \frac{8}{\vartheta_3^{\,2}} \sin^2\frac{2\pi w}{\Omega} \sum_0^\infty {}_n \frac{(-1)^n p^{2n+1}\frac{1+p^{2n+1}}{1-p^{2n+1}}}{1 - 2p^{2n+1}\cos\frac{4\pi w}{\Omega} + p^{4n+2}}$$

$$= 1 - \frac{4i}{\vartheta_3^{\,2}} \sin^2\frac{2\pi w}{\Omega} \sum_0^\infty {}_n \frac{(-1)^n \operatorname{cotg}(2n+1)\frac{\pi\tau}{2}}{\cos(2n+1)\pi\tau - \cos\frac{4\pi w}{\Omega}}$$

$$= 1 - \frac{i}{\vartheta_3^{\,2}} \sin\frac{2\pi w}{\Omega} \sum_{-\nu}^{+\nu} {}_n \frac{(-1)^n}{\sin(2n+1)\frac{\pi\tau}{2}\sin\left(\frac{2\pi w}{\Omega} - (2n+1)\frac{\pi\tau}{2}\right)}$$

$$= -\frac{i}{\vartheta_3^{\,2}} \sum_{-\nu}^{+\nu} {}_n (-1)^n \operatorname{cotg}\left(\frac{2\pi w}{\Omega} - (2n+1)\frac{\pi\tau}{2}\right)$$

$$= -i \sum_{-\nu}^{+\nu} {}_n (-1)^n \sum_{-\mu}^{+\mu} {}_m \frac{1}{w - \frac{2n+1}{2}\Omega' - \frac{m}{2}\Omega}.$$

Die Doppelreihen sind nur *bedingt* convergent und dürfen nicht umgeordnet werden; ihre Convergenz bei der gewählten Anordnung geht aus der Entwicklung selbst hervor.

2. Aus den Potenzreihen für $S(p,x)$, $C(p,x)$, $D(p,x)$ wird

$$(4.)\quad \sin\mathrm{am}\, w = \frac{4}{\vartheta_2^{\,2}} \sum_0^\infty {}_n \frac{p^{\frac{2n+1}{2}}}{1 - p^{2n+1}} \sin(2n+1)\frac{2\pi w}{\Omega},$$

$$(5.)\quad \cos\mathrm{am}\, w = \frac{4}{\vartheta_2^{\,2}} \sum_0^\infty {}_n \frac{p^{\frac{2n+1}{2}}}{1 + p^{2n+1}} \cos(2n+1)\frac{2\pi w}{\Omega},$$

$$(6.)\quad \Delta\,\mathrm{am}\, w = \frac{1}{\vartheta_3^{\,2}}\left[1 + 4\sum_1^\infty {}_n \frac{p^n}{1+p^{2n}} \cos\frac{4n\pi w}{\Omega}\right].$$

3. Auch für die *Potenzen* der Transcendenten sin am w, sowie der übrigen elliptischen Functionen lassen sich ähnliche Partialbruchreihen und trigonometrische Reihen entwickeln; man kann auch hier von den multiplicatorisch periodischen Transcendenten ausgehen und zunächst eine Partialbruchzerlegung vornehmen; dieses Verfahren hat indessen das Missliche, dass alsdann complicirte Reihenentwicklungen nach p als Factoren der einzelnen Reihentheile auftreten, deren Umformung in einfachere Gestalt bis jetzt auf rein algebraischem Wege nicht gelungen ist. Die Rechnung lässt sich durch Benutzung der Differentiation wesentlich vereinfachen, weshalb wir auf diese Art die trigonometrischen Entwicklungen der ungeraden Potenzen von sin am w, resp. die Potenzentwicklungen für dieselben Potenzen von $S(p, x)$ herstellen wollen; die übrigen, unendlich mannichfachen ähnlichen Entwicklungen können wir übergehen, da wir von ihnen keinen Gebrauch zu machen haben werden.

Aus (4.) folgt, wenn man beachtet, dass $\frac{\Omega}{2\pi} = \vartheta_3^2$, $\vartheta_2^2 = \varkappa\vartheta_3^2$ ist,

$$(7.)\quad \frac{d^{2k}\sin\operatorname{am} w}{dw^{2k}} = (-1)^k \frac{4}{\varkappa\,\vartheta_3^{4k+2}} \sum_0^\infty{}^n (2n+1)^{2k} \frac{p^{\frac{2n+1}{2}}}{1-p^{2n+1}} \sin(2n+1)\frac{2\pi w}{\Omega}.$$

Benutzt man nun die Formeln § 71, (13.), so ergiebt sich mit Leichtigkeit

$$(8.)\quad \begin{cases} \sin^3\operatorname{am} w = \\ \quad -\frac{2}{\varkappa^3\vartheta_3^6} \sum_0^\infty{}^n (2n+1)^2 \frac{p^{\frac{2n+1}{2}}}{1+p^{2n+1}} \sin(2n+1)\frac{2\pi w}{\Omega} \\ \quad + \frac{2(1+\varkappa^2)}{\varkappa^3\vartheta_3^2} \sum_0^\infty{}^n \frac{p^{\frac{2n+1}{2}}}{1+p^{2n+1}} \sin(2n+1)\frac{2\pi w}{\Omega}, \\ \sin^5\operatorname{am} w = \frac{1}{6\varkappa^5\vartheta_3^{10}} \sum_0^\infty{}^n (2n+1)^4 \frac{p^{\frac{2n+1}{2}}}{1-p^{2n+1}} \sin(2n+1)\frac{2\pi w}{\Omega} \end{cases}$$

$$- \frac{5(1+\varkappa^2)}{3\varkappa^5 \vartheta_3^{\,6}} \sum_0^\infty{}^n (2n+1)^2 \frac{p^{\frac{2n+1}{2}}}{1-p^{2n+1}} \sin(2n+1)\frac{2\pi w}{\Omega}$$

$$+ \frac{3+2\varkappa^2+3\varkappa^4}{2\varkappa^5 \vartheta_3^{\,2}} \sum_0^\infty{}^n \frac{p^{\frac{2n+1}{2}}}{1-p^{2n+1}} \sin(2n+1)\frac{2\pi w}{\Omega},$$

(8.)

$$\sin^7 \operatorname{am} w = - \frac{1}{180\varkappa^7 \vartheta_3^{\,14}} \sum_0^\infty{}^n (2n+1)^6 \frac{p^{\frac{2n+1}{2}}}{1-p^{2n+1}} \cdot \sin(2n+1)\frac{2\pi w}{\Omega}$$

$$+ \frac{7(1+\varkappa^2)}{36\varkappa^7 \vartheta_3^{\,10}} \sum_0^\infty{}^n (2n+1)^4 \frac{p^{\frac{2n+1}{2}}}{1-p^{2n+1}} \sin(2n+1)\frac{2\pi w}{\Omega}$$

$$- \frac{7(37+38\varkappa^2+37\varkappa^4)}{180\varkappa^7 \vartheta_3^{\,6}} \sum_0^\infty{}^n (2n+1)^2 \frac{p^{\frac{2n+1}{2}}}{1-p^{2n+1}} \cdot \sin(2n+1)\frac{2\pi w}{\Omega}$$

$$+ \frac{5+3\varkappa^2+3\varkappa^4+5\varkappa^6}{4\varkappa^7 \vartheta_3^{\,2}} \sum_0^\infty{}^n \frac{p^{\frac{2n+1}{2}}}{1-p^{2n+1}} \sin(2n+1)\frac{2\pi w}{\Omega}$$

u. s. w.

4. Hieran schliessen sich folgende Formeln an, die sich aus (4.) und § 71, (17.) ergeben:

(9.)

$$\cos \operatorname{am} w\, \varDelta \operatorname{am} w = \frac{4}{\varkappa \vartheta_3^{\,4}} \sum_0^\infty{}^n (2n+1) \frac{p^{\frac{2n+1}{1}}}{1-p^{2n+1}} \cdot \cos(2n+1)\frac{2\pi w}{\Omega},$$

$$\sin^2 \operatorname{am} w \cos \operatorname{am} w\, \varDelta \operatorname{am} w$$

$$= - \frac{2}{3\varkappa^3 \vartheta_3^{\,8}} \sum_0^\infty{}^n (2n+1)^3 \frac{p^{\frac{2n+1}{2}}}{1-p^{2n+1}} \cos(2n+1)\frac{2\pi w}{\Omega}$$

$$+ \frac{2(1+\varkappa^2)}{3\varkappa^3 \vartheta_3^{\,4}} \sum_0^\infty{}^n (2n+1) \frac{p^{\frac{2n+1}{2}}}{1-p^{2n+1}} \cos(2n+1)\frac{2\pi w}{\Omega},$$

$$
(9.)\quad \begin{cases}
\sin^4 \operatorname{am} w \cos \operatorname{am} w\, \varDelta \operatorname{am} w \\
= \dfrac{1}{30\varkappa^5 \vartheta_1^{12}} \sum_0^\infty {}^n (2n+1)^5 \dfrac{p^{\frac{2n+1}{2}}}{1-p^{2n+1}} \cos(2n+1)\dfrac{2\pi w}{\Omega} \\
- \dfrac{1+\varkappa^2}{3\varkappa^5 \vartheta_3^8} \sum_0^\infty {}^n (2n+1)^3 \dfrac{p^{\frac{2n+1}{2}}}{1-p^{2n+1}} \cos(2n+1)\dfrac{2\pi w}{\Omega} \\
+ \dfrac{3+2\varkappa^2+3\varkappa^4}{10\varkappa^5 \vartheta_3^4} \cdot \sum_0^\infty {}^n (2n+1) \dfrac{p^{\frac{2n+1}{2}}}{1-p^{2n+1}} \cos(2n+1)\dfrac{2\pi w}{\Omega} \\
\text{u. s. w.}
\end{cases}
$$

§ 73.

Potenzreihen.

Entwickelt man in § 72, (4.), (5.) und (6.) die Grössen $\sin(2n+1)\frac{2\pi w}{\Omega}$, $\cos(2n+1)\frac{2\pi w}{\Omega}$, $\cos\frac{4n\pi w}{\Omega}$ nach Potenzen von w und ordnet nach den letzteren, so erhält man Potenzreihen für $\sin \operatorname{am} w$, $\cos \operatorname{am} w$ und $\varDelta \operatorname{am} w$ in der Umgebung von $w=0$, die bis zum nächsten Unstetigkeitspunkte convergiren; allein die Coefficienten dieser Reihen stellen sich in complicirter Form dar und ihre Umformung bietet die grössten Schwierigkeiten. Auch hier wird uns wieder die Differentiation in einfacher Weise zum Ziele führen; wir gelangen durch dieselbe zu Reihen, *die nicht als Functionen von p (neben w), sondern von $\varkappa^2$ erscheinen.*

Da die Entwickelbarkeit von $\sin \operatorname{am} w$ u. s. w. in der Umgebung von $w=0$ nach dem Obigen sicher ist, so sind wir zur Anwendung von § 21, (10.) berechtigt. Wir haben, weil $\sin \operatorname{am} w$ eine ungerade Function ist,

$$
\sin \operatorname{am} w = \frac{1}{1}\left(\frac{d \sin \operatorname{am} w}{dw}\right)_{w=0} w + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{d^3 \sin \operatorname{am} w}{dw^3}\right)_{w=0} w^3 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\left(\frac{d^5 \sin \operatorname{am} w}{dw^5}\right)_{w=0} w^5 + \cdots
$$

und mit Hülfe von § 71, (1.), (7.) u. s. w.

$$
(1.)\quad \sin \operatorname{am} w = \frac{w}{1} - \frac{1+\varkappa^2}{1\cdot 2\cdot 3} w^3 + \frac{1+14\varkappa^2+\varkappa^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} w^5 - \frac{1+135\varkappa^2+135\varkappa^4+\varkappa^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} w^7 + \cdots.
$$

Die symmetrische Gestalt der Coefficienten dieser Gleichung lässt sich mit Hülfe der später zu entwickelnden Transformationsformeln als nothwendig nachweisen.

Ebenso erhalten wir durch wiederholte Differentiation von cos am w und $\varDelta$ am w:

$$(2.)\qquad \cos \operatorname{am} w = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2} w^2 + \frac{1 + 4\varkappa^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} w^4 - \frac{1 + 44\varkappa^2 + 16\varkappa^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} w^6 + \cdots,$$

$$(3.)\qquad \varDelta \operatorname{am} w = 1 - \frac{\varkappa^2}{1 \cdot 2} w^2 + \frac{\varkappa^2(4 + \varkappa^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} w^4 - \frac{\varkappa^2(16 + 44\varkappa^2 + \varkappa^4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} w^6 + \cdots.$$

Die entsprechenden Entwicklungen für die Thetafunctionen nehmen einen complicirteren Charakter an; Herr Weierstrass hat in seiner „Theorie der Abel'schen Functionen“ Potenzreihen für gewisse Transcendenten hergeleitet, die mit den Thetafunctionen in engem Zusammenhang stehen; die Coefficienten dieser Reihen sind ganze Functionen von $\varkappa^2$, was bei denen für die Thetafunctionen selbst nicht der Fall ist.

§ 74.

Die Umkehrungsprobleme.

1. Mit Hülfe der Resultate von § 72 können wir an das Umkehrungsproblem der multiplicatorisch periodischen Functionen herantreten, das wir bis jetzt aufgeschoben haben. Allerdings kann die folgende Lösung nicht als ein Analogon zu der Lösung der Abel'schen Gleichungen bezeichnet werden; doch wird sie wegen ihres vorwiegend algebraischen Charakters nicht ohne Interesse sein. Eine andere Lösung, welche derjenigen der Abel'schen Gleichungen mehr entspricht, hat der Verfasser an anderer Stelle gegeben, doch soll dieselbe ihres complicirteren Charakters halber hier nicht reproducirt werden.

2. Es ist, wenn α eine n^{te} Einheitswurzel, n eine Primzahl bezeichnet, nach § 60, (4.)

$$\sum_0^{n-1}{}_k \frac{1}{\alpha^k} S(p, \alpha^k x) = -\frac{2i}{\eta_3^2} \sum_0^{n-1}{}_k \left[\frac{p^{\frac{1}{2}}}{1-p} \left(x - \frac{1}{\alpha^{2k} x} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{p^{\frac{3}{2}}}{1-p^3} \left(\alpha^{2k} x^3 - \frac{1}{\alpha^{4k} x^3} \right) + \frac{p^{\frac{5}{2}}}{1-p^5} \left(\alpha^{4k} x^5 - \frac{1}{\alpha^{6k} x^5} \right) + \cdots \right].$$

Lassen wir n ins Unendliche wachsen, so erhalten wir wie in § 22, 5:

$$\sum_0^{n-1}{}_k \frac{1}{\alpha^k} S(p, \alpha^k x) = -\frac{2in}{\eta_3^2} \frac{p^{\frac{1}{2}}}{1-p} x$$

oder

(1.) $$x = \frac{i\eta_3^2(1-p)}{2np^{\frac{1}{2}}} \sum_0^{n-1}{}_k \frac{1}{\alpha^k} S(p, \alpha^k x),$$

also nach dem Multiplicationstheoreme für $S(p, x)$:

(2.) $$x = \frac{i\eta_3^2(1-p)}{2np^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cdot \sum_0^{n-1}{}_k \frac{1}{\alpha^k} \cdot \frac{S(p, x) C(p, \alpha^k) D(p, \alpha^k) + C(p, x) D(p, x) S(p, \alpha^k)}{1 - \varkappa^2 S^2(p, \alpha^k) S^2(p, x)}.$$

Gelingt es nun, die rechte Seite dieser Gleichung, die eine Function von $S(p, x)$ ist, in geschlossner Form darzustellen, so haben wir x durch $S(p, x)$ ausgedrückt. Für Werthe von x, welche der Einheit hinlänglich nahe liegen, können wir $\frac{1}{1 - \varkappa^2 S^2(p, \alpha^k) S^2(p, x)}$ nach Potenzen von $S^2(p, x)$ entwickeln, und zwar *gleichzeitig* für *beliebige* k, da $S(p, \alpha^k)$ für kein k unendlich wird; wir erhalten

(3.) $$x = \frac{i\eta_3^2(1-p)}{2np^{\frac{1}{2}}} \left\{ \sum_0^{n-1}{}_k \frac{1}{\alpha^k} C(p, \alpha^k) D(p, \alpha^k) \cdot S(p, x) \right.$$

$$+ \varkappa^2 \sum_0^{n-1}{}_k \frac{1}{\alpha^k} S^2(p, \alpha^k) C(p, \alpha^k) D(p, \alpha^k) \cdot S^3(p, x)$$

$$+ \varkappa^4 \sum_0^{n-1}{}_k \frac{1}{\alpha^k} S^4(p, \alpha^k) C(p, \alpha^k) D(p, \alpha^k) \cdot S^5(p, x)$$

$$+ \cdots$$

$$+\sum_0^{n-1}{}_k \frac{1}{\alpha^k} S(p, \alpha^k)\cdot C(p,x)D(p,x)$$

$$+\varkappa^2 \sum_0^{n-1}{}_k \frac{1}{\alpha^k} S^3(p, \alpha^k)\cdot S^2(p,x)C(p,x)D(p,x)$$

$$+\varkappa^4 \sum_0^{n-1}{}_k \frac{1}{\alpha^k} S^5(p, \alpha^k)\cdot S^4(p,x)C(p,x)D(p,x)$$

$$+\cdots \qquad\qquad \Big\}.$$

Die Ausführung der vorkommenden Summen hat keine Schwierigkeit, wenn man wieder bedenkt, dass

$$\frac{1}{n}\sum_1^{n-1}{}_k \frac{1}{\alpha^k}\Big[a_0 + a_1\alpha^k + a_2\alpha^{2k} + a_3\alpha^{3k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{\alpha^k} + \frac{a_{-2}}{\alpha^{2k}} + \cdots\Big] = a_1$$

ist. Man braucht nur die Reihenentwicklungen von § 72, (8.) und (9.) in solche für $S^k(p,x)$ u. s. w. umzusetzen und dann jeweilig den Coefficienten von x zu nehmen; derselbe ist demjenigen von $\sin\frac{2\pi w}{\Omega}$, multiplicirt mit $\frac{1}{2i}$, resp. demjenigen von $\cos\frac{2\pi w}{\Omega}$, multiplicirt mit $\frac{1}{2}$, gleich, da

$$x - \frac{1}{x} = 2i\sin\frac{2\pi w}{\Omega}, \quad x + \frac{1}{x} = 2\cos\frac{2\pi w}{\Omega}$$

zu setzen ist. Hiernach ist

$$\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}{}_k \frac{1}{\alpha^k} S(p,\alpha^k) = \frac{2}{i\varkappa\eta_3{}^2}\,\frac{p^{\frac{1}{2}}}{1-p},$$

$$\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}{}_k \frac{1}{\alpha^k} S^3(p,\alpha^k) = \frac{1}{2i\varkappa^3}\left[-\frac{2}{\eta_3{}^6} + \frac{2(1+\varkappa^2)}{\eta_3{}^2}\right]\frac{p^{\frac{1}{2}}}{1-p},$$

$$\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}{}_k \frac{1}{\alpha^k} S^3(p,\alpha^k) = \frac{1}{2i\varkappa^5}\left[\frac{1}{6\eta_3{}^{10}} - \frac{5(1+\varkappa^2)}{3\eta_3{}^6} + \frac{3+2\varkappa^2+3\varkappa^4}{2\eta_3{}^2}\right]\frac{p^{\frac{1}{2}}}{1-p}$$

u. s. w.,

$$\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}{}_k \frac{1}{\alpha^k} C(p,\alpha^k)D(p,\alpha^k) = \frac{2}{\varkappa\eta_3{}^4}\frac{p^{\frac{1}{2}}}{1-p},$$

$$\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}{}_k \frac{1}{\alpha^k} S^2(p,\alpha^k)C(p,\alpha^k)D(p,\alpha^k)$$

$$= \frac{1}{2\varkappa^3}\left[-\frac{2}{3\eta_3{}^8}+\frac{2(1+\varkappa^2)}{3\eta_3{}^4}\right]\frac{p^{\frac{1}{2}}}{1-p},$$

$$\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}{}_k \frac{1}{\alpha^k} S^4(p,\alpha^k)C(p,\alpha^k)D(p,\alpha^k)$$

$$= \frac{1}{2\varkappa^5}\left[\frac{1}{30\eta_3{}^{12}}-\frac{1+\varkappa^2}{3\eta_3{}^8}+\frac{3+2\varkappa^2+3\varkappa^4}{10\eta_3{}^4}\right]\frac{p^{\frac{1}{2}}}{1-p}$$

u. s. w.,

und somit nach geringen Umgestaltungen

$$(4.)\quad x = \frac{1}{\varkappa}\Big[S(p,x)+\Big(-\frac{1}{2\eta_3{}^4}+\frac{1+\varkappa^2}{2}\Big)S^3(p,x)$$
$$+\Big(\frac{1}{24\eta_3{}^8}-\frac{5(1+\varkappa^2)}{12\eta_3{}^4}+\frac{3+2\varkappa^2+3\varkappa^4}{8}\Big)S^5(p,x)+\cdots\Big]$$
$$+i\,\frac{C(p,x)D(p,x)}{\varkappa}\Big[\frac{1}{\eta_3{}^2}+\Big(-\frac{1}{6\eta_3{}^6}+\frac{1+\varkappa^2}{6\eta_3{}^2}\Big)S^2(p,x)$$
$$+\Big(\frac{1}{120\eta_3{}^{10}}-\frac{1+\varkappa^2}{12\eta_3{}^6}+\frac{3+2\varkappa^2+3\varkappa^2}{40\eta_3{}^2}\Big)S^4(p,x)+\cdots\Big]$$

oder

$$(5.)\quad \arg S(p,x) = \frac{1}{\varkappa}\Big[x+\Big(-\frac{1}{2\eta_3{}^4}+\frac{1+\varkappa^2}{2}\Big)x^3$$
$$+\Big(\frac{1}{24\eta_3{}^8}-\frac{5(1+\varkappa^2)}{12\eta_3{}^4}+\frac{3+2\varkappa^2+3\varkappa^4}{8}\Big)x^5+\cdots\Big]$$
$$+i\,\frac{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}{\varkappa}\Big[\frac{1}{\eta_3{}^2}+\Big(-\frac{1}{6\eta_3{}^6}+\frac{1+\varkappa^2}{6\eta_3{}^2}\Big)x^2$$
$$+\Big(\frac{1}{120\eta_3{}^{10}}-\frac{1+\varkappa^2}{12\eta_3{}^6}+\frac{3+2\varkappa^2+3\varkappa^4}{40\eta_3{}^2}\Big)x^4+\cdots\Big].$$

Das Bildungsgesetz dieser Reihe ist complicirt und durch die Formeln (15.) und (16.) von § 71 bestimmt. Was die Convergenz der Reihe anlangt, so ist dieselbe nach der Entwicklung für die Umgebung von $x=0$ evident; dieselbe erstreckt sich bis zu dem am nächsten gelegenen Verzweigungspunkte $x=\pm 1$ und $x=\pm\frac{1}{\varkappa}\cdot$ Wegen der Gleichung

$$S\left(p, -\frac{1}{x}\right) = S(p, x)$$

wird (5.) gleichzeitig auch eine Entwicklung für $-\frac{1}{x}$ darstellen, wobei nur der Quadratwurzel das umgekehrte Zeichen zu geben ist; die Bestimmung dieses Zeichens geht übrigens aus (4.) hervor.

3. Reihen für arg sin am x lassen sich mannichfache mit Hülfe von Differentiation aufstellen; am Einfachsten gelangt man vielleicht zu der folgenden. Wir setzen, was wegen des analytischen Charakters von

$$\arg\sin\operatorname{am} x \quad \text{und} \quad \sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}$$

in der Umgebung von $x = 0$ jedenfalls möglich ist:

$$(6.)\quad \arg\sin\operatorname{am} x = (a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots)\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)};$$

die ungeraden Potenzen lassen wir gleich weg, weil arg sin am x eine ungerade Function ist. Die Differentiation ergiebt

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}} = (a_1 + 3a_3 x^2 + 5a_5 x^4 + \cdots)\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}$$
$$+ (a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots)\frac{-(1+\varkappa^2)x + 2\varkappa^2 x^3}{\sqrt{(1-x)(1-\varkappa^2 x^2)}}$$

oder nach Entfernung der Nenner

$$(7.)\quad 1 = (a_1 + 3a_3 x^2 + 5a_5 x^4 + \cdots)(1 - (1+\varkappa^2)x^2 + \varkappa^2 x^4)$$
$$+ (a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots)(-(1+\varkappa^2)x + 2\varkappa^2 x^3).$$

Durch Ausmultipliciren und Coefficientenvergleichung folgt hieraus

$$1 = a_1,$$
$$0 = 3a_3 - 2a_1(1+\varkappa^2),$$
$$0 = 5a_5 - 4a_3(1+\varkappa^2) + 3a_1\varkappa^2,$$
$$0 = 7a_7 - 6a_5(1+\varkappa^2) + 5a_3\varkappa^2$$

u. s. w.,

allgemein

$$(8.)\quad 0 = (2n+1)a_{2n+1} - 2n a_{2n-1}(1+\varkappa^2) + (2n-1)a_{2n-3}\varkappa^2,$$

also

$$a_1 = 1,$$
$$a_3 = \frac{2(1+\varkappa^2)}{1\cdot 3},$$

$$a_5 = \frac{8 + 7\varkappa^2 + 8\varkappa^4}{1 \cdot 3 \cdot 5},$$

$$a_7 = \frac{48 + 40\varkappa^2 + 40\varkappa^4 + 48\varkappa^6}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7},$$

$$a_9 = \frac{384 + 312\varkappa^2 + 297\varkappa^4 + 312\varkappa^6 + 384\varkappa^8}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}$$

u. s. w.

und somit

$$(9.)\quad \arg\sin\operatorname{am} x = \left(x + \frac{2(1+\varkappa^2)}{1 \cdot 3}x^3 + \frac{8 + 7\varkappa^2 + 8\varkappa^4}{1 \cdot 3 \cdot 5}x^5 + \frac{48 + 40\varkappa^2 + 40\varkappa^4 + 48\varkappa^6}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}x^7 + \cdots\right)\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}.$$

Diese Reihe convergirt bis zu dem nächsten Unstetigkeitspunkte von

$$\frac{\arg\sin\operatorname{am} x}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}},$$

d. h. für $|x| < 1$ oder $|x| < \left|\frac{1}{\varkappa}\right|$, jenachdem 1 oder $\left|\frac{1}{\varkappa}\right|$ kleiner ist.

4. Wir wollen an dieser Stelle auch die Aufgabe lösen, die beiden Perioden Ω und Ω' nach Potenzen von $\varkappa$ zu entwickeln, was freilich nur für einen beschränkten Bezirk möglich ist, weil Ω und Ω' keine *eindeutigen* Functionen von $\varkappa$ sind. Da

$$(10.)\quad \Omega = 2\pi\vartheta_3^2 = 2\pi\left[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\cdots\right]^2 \cdot \left[(1+p)(1+p^3)(1+p^5)\cdots\right]^4,$$

$$(11.)\quad \varkappa^2 = \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} = 16p\left[\frac{(1+p^2)(1+p^4)(1+p^6)\cdots}{(1+p)(1+p^3)(1+p^5)\cdots}\right]^8$$

ist, so wird sich einerseits, wie schon durch mechanisches Ausmultipliciren zu erkennen ist, Ω nach Potenzen von p entwickeln lassen, während andrerseits für $\varkappa^2$ eine ebensolche Entwicklung möglich ist, die mit p anfängt; nach § 27 wird sich dann *einer* der zu einem $\varkappa^2$ gehörigen p-Werthe nach Potenzen von $\varkappa^2$ und somit schliesslich auch Ω nach Potenzen von $\varkappa^2$ entwickeln lassen. Wir supponiren

$$\Omega = a_0 + a_2\varkappa^2 + a_4\varkappa^4 + a_6\varkappa^6 + \cdots$$

und benutzen die Relation (36.) in § 71 zur Bestimmung der Coefficienten; es ist

$$\frac{d\Omega}{d\varkappa} = 2a_2\varkappa + 4a_4\varkappa^3 + 6a_6\varkappa^5 + \cdots,$$

$$\frac{d^2\Omega}{d\varkappa^2} = 2a_2 + 4\cdot 3a_4\varkappa^2 + 6\cdot 5a_6\varkappa^4 + \cdots$$

und somit

$$\begin{aligned}&(\varkappa - \varkappa^3)(2a_2 + 4\cdot 3a_4\varkappa^2 + 6\cdot 5a_6\varkappa^4 + \cdots)\\ &+ (1 - 3\varkappa^2)(2a_2\varkappa + 4a_4\varkappa^3 + 6a_6\varkappa^5 + \cdots)\\ &= a_0\varkappa + a_2\varkappa^3 + a_4\varkappa^5 + a_6\varkappa^7 + \cdots,\end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}&4a_2 = a_0,\\ &16a_4 = 9a_2,\\ &\quad\vdots\\ &2n(2n-1)a_{2n} - (2n-2)(2n-3)a_{2n-2} + 2na_{2n}\\ &\qquad - 3(2n-2)a_{2n-2} = a_{2n-2}\end{aligned}$$

oder

$$(2n)^2a_{2n} = (2n-1)^2a_{2n-2}.$$

Beachten wir noch, dass für $p = 0$, also $\varkappa = 0$ die Grösse Ω in 2π übergeht, so erhalten wir die einfache Entwicklung

$$(12.)\quad \Omega = 2\pi\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\varkappa^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\varkappa^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\varkappa^6 + \cdots\right],$$

die für $|\varkappa| \leqq 1$ convergirt und die gemäss der Constantenbestimmung für denjenigen Werth von Ω gilt, welcher dem mit $\varkappa$ gleichzeitig verschwindenden p-Werthe entspricht.

5. Da $\Omega' = \frac{\Omega\tau}{2}$ ist, müssen wir uns zunächst, um zu einer Reihe für Ω' zu gelangen, mit der Entwicklung von

$$\tau = \frac{1}{\pi i}\log p$$

beschäftigen. Nach den Methoden von § 27 ist aus (11.) zu erkennen, dass in der Umgebung von $p = 0$, $\varkappa = 0$ eine Entwicklung

$$p = \frac{\varkappa^2}{16}(1 + \alpha_2\varkappa^2 + \alpha_4\varkappa^4 + \cdots),$$

also

$$\begin{aligned}\log p &= \log\frac{\varkappa^2}{16} + \log(1 + \alpha_2\varkappa^2 + \alpha_4\varkappa^4 + \cdots)\\ &= 2\log\frac{\varkappa}{4} + \beta_2\varkappa^2 + \beta_4\varkappa^4 + \cdots\end{aligned}$$

möglich ist, so dass wir mit Rücksicht auf (12.)

$$\Omega' = \frac{\Omega}{\pi i} \log \frac{\varkappa}{4} + 2iR$$

setzen können, worin R eine für $\varkappa = 0$ verschwindende, nach Potenzen von $\varkappa^2$ fortschreitende Reihe bezeichnet. Setzen wir diesen Ausdruck in § 71, (37.) ein, so erhalten wir unter Benutzung von § 71, (36.) die Differentialgleichung

$$(13.)\quad \varkappa(1-\varkappa^2)\frac{d^2R}{d\varkappa^2} + (1-3\varkappa^2)\frac{dR}{d\varkappa} - \varkappa R = \frac{1-\varkappa^2}{\pi}\frac{d\Omega}{d\varkappa} - \frac{\varkappa\Omega}{\pi}.$$

Ohne besondere Schwierigkeiten führen wir mit Hülfe dieser Gleichungen die Reihenentwicklung für R aus und erhalten schliesslich:

$$(14.)\quad \Omega' = \frac{\Omega}{\pi i} \log \frac{\varkappa}{4} - 2i \left\{ \frac{1^2}{2^2}\varkappa^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2}\left(1 + \frac{2}{3 \cdot 4}\right)\varkappa^4 \right.$$
$$\left. + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}\left(1 + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{2}{5 \cdot 6}\right)\varkappa^6 + \cdots \right\}.$$

6. Die Riemann'sche Fläche für $y = \arg \sin \operatorname{am} x$ ist wieder sehr leicht aus der Parcellirung der y-Ebene für $x = \sin \operatorname{am} y$ herzuleiten. Ziehen wir in der y-Ebene Parallele zu der Abscissenaxe und zu der Ordinatenaxe, die resp. durch die Punkte $y = \left(k + \frac{1}{2}\right)\Omega'$ und $y = \left(\frac{k}{2} + \frac{1}{4}\right)\Omega$ gehen, so wird hierdurch die Ebene in doppelt unendlich viele Rechtecke zerlegt, falls wir vorläufig p als reell, also Ω und $\frac{\Omega'}{i}$ als reell und positiv annehmen; für die y-Werthe jedes Parallelogramms erhält sin am y jeden Werth einmal und nur einmal. Wenden wir für den Inhalt der Rechtecke die in Figur 22 gebrauchten Bezeichnungen an, so entspricht einem y-Werthe in $(0, 0)$ mittelst der Periodicitätsbeziehungen $z = y + m\Omega' + n\Omega$ und $z = \frac{\Omega}{2} - y + m\Omega' + n\Omega$ je einer in $(m, 2n)$ und $(m, 2n + 1)$.

Durch die Function $x = \sin \operatorname{am} y$ werden die Parallelen zur Ordinatenaxe, die durch $y = \frac{\Omega}{4} + k\Omega$ und $y = -\frac{\Omega}{4} + k\Omega$ gehen, als Gerade abgebildet, die resp. $x = 1$ mit $x = \frac{1}{\varkappa}$

(1, −3) (1, −2) (1, −1) (1, 0) (1, 1) (1, 2) (1, 3)

$\frac{3\Omega'}{2}$

$\frac{\Omega}{4}+\frac{\Omega'}{2}$ $\frac{\Omega'}{2}$ $\frac{\Omega}{4}+\frac{\Omega'}{2}$

$-\frac{7\Omega}{4}$ (0, −3) $-\frac{5\Omega}{4}$ (0, −2) $-\frac{3\Omega}{4}$ (0, −1) $-\frac{\Omega}{4}$ 0 (0, 0) $\frac{\Omega}{4}$ (0, 1) $\frac{3\Omega}{4}$ (0, 2) $\frac{5\Omega}{4}$ (0, 3) $\frac{7\Omega}{4}$

$\frac{\Omega}{4}-\frac{\Omega'}{2}$ $-\frac{\Omega'}{2}$ $\frac{\Omega}{4}-\frac{\Omega'}{2}$

(−1, −3) (−1, −2) (−1, −1) (−1, 0) (−1, 1) (−1, 2) (−1, 3)

$-\frac{3\Omega'}{2}$

y-Ebene.

∞ $-\frac{1}{\varkappa}$ −1 0 1 $\frac{1}{\varkappa}$ ∞

x-Fläche.

Fig. 22.

und $x = -1$ mit $x = -\frac{1}{\varkappa}$ verbinden; dagegen werden die durch $y = \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\Omega'}{2}$ laufenden Parallelen zur Abscissenaxe als eine Gerade abgebildet, die von $x = \frac{1}{\varkappa}$ auf der Abscissenaxe durchs Unendliche nach $x = -\frac{1}{\varkappa}$ geht (vergl. §§ 60, 5 und 70, 6).

Ins Besondere entsprechen, um nur die Hauptpunkte des Rechtecks (0, 0) ins Auge zu fassen, den Punkten

$$y = \frac{\Omega}{4},\ \frac{\Omega}{4} + \frac{\Omega'}{2},\ \frac{\Omega'}{2},\ -\frac{\Omega}{4} + \frac{\Omega'}{2},\ -\frac{\Omega}{4},\ -\frac{\Omega}{4} - \frac{\Omega'}{2},\ -\frac{\Omega'}{2},\ \frac{\Omega}{4} - \frac{\Omega'}{2}$$

die Punkte

$$x = 1,\ \frac{1}{\varkappa},\ \infty,\ -\frac{1}{\varkappa},\ -1,\ -\frac{1}{\varkappa},\ \infty,\ \frac{1}{\varkappa}.$$

Die Punkte $x = \pm 1$ und $x = \pm \frac{1}{\varkappa}$ sind ebenso wie bei $y = \arg S(p, x)$ Verzweigungspunkte; als Verzweigungsschnitte benutzen wir die eben gefundenen Geraden zwischen $x = 1$ und $x = \frac{1}{\varkappa}$. $x = -1$ und $x = -\frac{1}{\varkappa}$, $x = \frac{1}{\varkappa}$ und $x = -\frac{1}{\varkappa}$. Auf dem ersten Schnitte verbinden wir die Blätter (wir wählen wieder die Bezeichnung den zugehörigen Parcellen in der y-Ebene entsprechend) $(m, 2n)$ und $(m, 2n + 1)$, auf dem zweiten $(m, 2n)$ und $(m, 2n - 1)$ paarweise, auf dem dritten dagegen (wie schon eine Betrachtung des Verhaltens von $x = \sin \operatorname{am} y$ auf der Ordinatenaxe zeigt) jeweilig den oberen Rand von (m, n) mit dem unteren von $(m + 1, n)$.

Auch hier kann die Riemann'sche Fläche mannichfach variirt werden, wenn nur die Verzweigungspunkte und die Art der Zusammenhaltung beibehalten werden. Für complexe p bleibt das Resultat wesentlich das gleiche.

§ 75.

Die Transformation n^{ten} Grades*).

1. Die Transformation der elliptischen Transcendenten, soweit sie der Transformation der multiplicatorisch periodischen Functionen entspricht, lässt sich selbstverständlich wieder leicht aus der letzteren herleiten. Doch tritt hierbei insofern ein neues Element in die Betrachtung ein, als in

$$\sin\operatorname{am}(\tau, w) = S\left(e^{\pi i}, e^{\frac{2\pi i w}{\Omega}}\right)$$

die Grösse $\Omega = 2\pi\vartheta_3^2$ vorkommt, welche selbst bei einer Transformation von τ eine Anderung erleidet. Wir stellen im Folgenden nur die Transformationen von sin am (τ, w) zusammen, da bei denjenigen der übrigen elliptischen Functionen der nämliche „*Multiplicator*", d. h. derselbe Factor, mit dem das Argument bei der Transformation multiplicirt wird, auftritt, und das Übrige aus § 61 zu entnehmen ist.

2. Da aus dem Fundamentaladditionstheorem der Thetafunctionen (§ 69, (1.)) für $u = v = 0$ folgt

$$\vartheta^2(2\tau, 0) = \frac{\vartheta^2(\tau, 0) + \vartheta^2(\tau, 1)}{2}$$

oder

$$(1.) \qquad \vartheta_3^2(2\tau, 0) = \frac{\vartheta_3^2 + \vartheta_0^2}{2},$$

also

$$(2.) \qquad \frac{\vartheta_3^2(2\tau, 0)}{\vartheta_3^2} = \frac{1 + \varkappa_1}{2},$$

so haben wir nach § 61, (2.) und unter Berücksichtigung der Änderung, welche Ω bei der Transformation erleidet,

$$(3.) \quad \sin\operatorname{am}\left(2\tau, 2\frac{\vartheta_3^2(2\tau, 0)}{\vartheta_3^2} w\right) = \sin\operatorname{am}(2\tau, (1 + \varkappa_1) w)$$

$$= (1 + \varkappa_1) \frac{\sin\operatorname{am}(\tau, w) \cos\operatorname{am}(\tau, w)}{\Delta\operatorname{am}(\tau, w)}.$$

3. Aus § 61, (7.) geht, wenn

$$(4.) \qquad a = \frac{1}{n} \frac{\vartheta_3^2(\tau, 0)}{\vartheta_3^2(n\tau, 0)}$$

*) Die Bezeichnung „n^{ten} *Grades*" wird erst in § 76 erläutert werden.

gesetzt wird, die Gleichung

$$(5.)\quad \sin\operatorname{am}\left(n\tau, \frac{w}{a}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_3(n\tau, 0)}{\vartheta_2(n\tau, 0)} \frac{\vartheta_2^{\,n}}{\vartheta_3^{\,n}} \sin\operatorname{am}\left(\tau, w + \frac{\Omega}{n}\right)$$

$$\cdot \sin\operatorname{am}\left(\tau, w + \frac{2\Omega}{n}\right) \cdots \sin\operatorname{am}\left(\tau, w + \frac{(n-1\Omega}{n}\right)$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_3(n\tau, 0)}{\vartheta_2(n\tau, 0)} \cdot \frac{\vartheta_2^{\,n}}{\vartheta_3^{\,n}} \sin\operatorname{am}(\tau, w)$$

$$\cdot \frac{\sin^2\operatorname{am}(\tau, w) - \sin^2\operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega}{n}\right)}{1 - \varkappa^2 \sin^2\operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega}{n}\right) \sin^2\operatorname{am}(\tau, w)}$$

$$\cdot \frac{\sin^2\operatorname{am}(\tau, w) - \sin^2\operatorname{am}\left(\tau, \frac{2\Omega}{n}\right)}{1 - \varkappa^2 \sin^2\operatorname{am}\left(\tau, \frac{2\Omega}{n}\right) \sin^2\operatorname{am}(\tau, w)} \cdots$$

$$\cdot \frac{\sin^2\operatorname{am}(\tau, w) - \sin^2\operatorname{am}\left(\tau, \frac{(n-1)\Omega}{2n}\right)}{1 - \varkappa^2 \sin^2\operatorname{am}\left(\tau, \frac{(n-1)\Omega}{2n}\right) \sin^2\operatorname{am}(\tau, w)}$$

hervor.

Durch Nullsetzen von w erhalten wir, wenn wir beachten, dass

$$\left[\frac{\sin\operatorname{am}\left(n\tau, \frac{w}{a}\right)}{\sin\operatorname{am}(n\tau, w)}\right]_{w=0} = \frac{1}{a}$$

ist,

$$(6.)\quad \frac{1}{a} = n \frac{\vartheta_3^{\,2}(n\tau, 0)}{\vartheta_3^{\,2}(\tau, 0)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_3(n\tau, 0)}{\vartheta_2(n\tau, 0)} \frac{\vartheta_2^{\,n}}{\vartheta_3^{\,n}}$$

$$\cdot \sin\operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega}{n}\right) \sin\operatorname{am}\left(\tau, \frac{2\Omega}{n}\right) \cdots \sin\operatorname{am}\left(\tau, \frac{(n-1)\Omega}{n}\right)$$

oder mit Rücksicht auf § 61, (12.)

$$(7.)\quad \frac{1}{a} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{\sin\operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega}{n}\right) \sin\operatorname{am}\left(\tau, \frac{2\Omega}{n}\right) \cdots}{\cos\operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega}{n}\right) \cos\operatorname{am}\left(\tau, \frac{2\Omega}{n}\right) \cdots}$$

$$\frac{\sin\operatorname{am}\left(\tau, \frac{(n-1)\Omega}{n}\right) \Delta\operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega}{n}\right) \Delta\operatorname{am}\left(\tau, \frac{2\Omega}{n}\right) \cdots \Delta\operatorname{am}\left(\tau, \frac{(n-1)\Omega}{n}\right)}{\cos\operatorname{am}\left(\tau, \frac{(n-1)\Omega}{n}\right)}$$

oder, da

$$\sin \operatorname{am}\left(\tau, \frac{k\Omega}{n}\right) = -\sin \operatorname{am}\left(\tau, \frac{(n-k)\Omega}{n}\right)$$

ist,

$$(8.)\quad \frac{1}{a} = \left[\frac{\sin \operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega}{n}\right) \cdots \sin \operatorname{am}\left(\tau, \frac{(n-1)\Omega}{2n}\right) \varDelta \operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega}{n}\right) \varDelta \operatorname{am}\left(\tau, \frac{(n-1)\Omega}{2n}\right)}{\cos \operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega}{n}\right) \cdots \cos \operatorname{am}\left(\tau, \frac{(n-1)\Omega}{2n}\right)}\right]^2.$$

4. Aus § 52, (5.) geht hervor

$$\begin{aligned}\eta^2\left(p^{\frac{1}{2}}, 1\right) &= \eta^2(p, 1) + p^{\frac{1}{2}}\eta^2(p, p) \\ &= \eta_3^2 \pm \eta_2^2,\end{aligned}$$

je nachdem das Vorzeichen von $p^{\frac{1}{2}}$ gewählt wird. Nimmt man $p = e^{\pi i \tau}$ und für das in η_2^2 vorkommende $p^{\frac{1}{2}}$ früherer Festsetzung gemäss $e^{\frac{\pi i \tau}{2}}$, so haben wir die Gleichungen

$$(9.)\quad \begin{cases} \vartheta^2\left(\frac{\tau}{2}, 0\right) = \vartheta_3^2 + \vartheta_2^2, \\ \vartheta^2\left(\frac{\tau+2}{2}, 0\right) = \vartheta_3^2 - \vartheta_2^2, \end{cases}$$

also

$$(10.)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_3^2\left(\frac{\tau}{2}, 0\right)}{\vartheta_3^2} = 1 + \left(\dfrac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\right)^2 = 1 + \varkappa, \\ \dfrac{\vartheta_3^2\left(\frac{\tau+2}{2}, 0\right)}{\vartheta_3^2} = 1 - \varkappa \end{cases}$$

und hiernach

$$(11.)\quad \begin{cases} \sin \operatorname{am}\left(\frac{\tau}{2}, (1+\varkappa) w\right) = \dfrac{(1+\varkappa) \sin \operatorname{am}(\tau, w)}{1 + \varkappa \sin^2 \operatorname{am}(\tau, w)} \\ \text{und} \\ \sin \operatorname{am}\left(\frac{\tau+2}{2}, (1-\varkappa) w\right) = \dfrac{(1-\varkappa) \sin \operatorname{am}(\tau, w)}{1 - \varkappa \sin^2 \operatorname{am}(\tau, w)}. \end{cases}$$

5. Ferner ist, wenn wir nur den einfachsten Fall hinschreiben,

$$(12.)\quad \begin{cases} \sin \operatorname{am}\left(\frac{\tau}{n}, \frac{w}{a_1}\right) = \dfrac{\vartheta_3\left(\frac{\tau}{n}, 0\right)}{\vartheta_2\left(\frac{\tau}{n}, 0\right)} \dfrac{\vartheta_2^n}{\vartheta_3^n} \\ \cdot \sin \operatorname{am}(\tau, w) \sin \operatorname{am}\left(\tau, w - \frac{\Omega'}{n}\right) \sin \operatorname{am}\left(\tau, w + \frac{\Omega'}{n}\right) \end{cases}$$

$$
(12.)\quad \left\{\begin{aligned}
&\cdot \sin\operatorname{am}\left(\tau, w-\frac{2\Omega'}{n}\right)\sin\operatorname{am}\left(\tau, w+\frac{2\Omega'}{n}\right)\cdots\\
&\cdot \sin\operatorname{am}\left(\tau, w-\frac{(n-1)\Omega'}{2n}\right)\sin\operatorname{am}\left(\tau, w+\frac{(n-1)\Omega'}{2n}\right)\\
&=\frac{\vartheta_3\left(\frac{\tau}{n},0\right)}{\vartheta_2\left(\frac{\tau}{n},0\right)}\frac{\vartheta_2{}^n}{\vartheta_3{}^n}\\
&\qquad\cdot\sin\operatorname{am}(\tau,w)\frac{\sin^2\operatorname{am}(\tau,w)-\sin^2\operatorname{am}\left(\tau,\frac{\Omega'}{n}\right)}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}\left(\tau,\frac{\Omega'}{n}\right)\sin^2\operatorname{am}(\tau,w)}\\
&\qquad\cdot\frac{\sin^2\operatorname{am}(\tau,w)-\sin^2\operatorname{am}\left(\tau,\frac{2\Omega'}{n}\right)}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}\left(\tau,\frac{2\Omega'}{n}\right)\sin^2\operatorname{am}(\tau,w)}\cdots\\
&\qquad\cdot\frac{\sin^2\operatorname{am}(\tau,w)-\sin^2\operatorname{am}\left(\tau,\frac{(n-1)\Omega'}{2n}\right)}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}\left(\tau,\frac{(n-1)\Omega'}{2n}\right)\sin^2\operatorname{am}(\tau,w)};
\end{aligned}\right.
$$

durch Nullsetzen des Arguments folgt wieder

$$
(13.)\quad \frac{1}{a_1}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\vartheta_3\left(\frac{\tau}{n},0\right)}{\vartheta_2\left(\frac{\tau}{n},0\right)}\frac{\vartheta_2{}^n}{\vartheta_3{}^n}\left[\sin\operatorname{am}\left(\tau,\frac{\Omega'}{n}\right)\sin\operatorname{am}\left(\tau,\frac{2\Omega'}{n}\right)\cdots\right.
$$
$$
\left.\cdot\sin\operatorname{am}\left(\tau,\frac{(n-1)\Omega'}{2n}\right)\right]^2
$$

oder

$$
(14.)\quad \frac{1}{a_1}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}
$$
$$
\left[\frac{\sin\operatorname{am}\left(\tau,\frac{\Omega'}{n}\right)\cdots\sin\operatorname{am}\left(\tau,\frac{(n-1)\Omega'}{2n}\right)\Delta\operatorname{am}\left(\tau,\frac{\Omega'}{n}\right)\cdots\Delta\operatorname{am}\left(\tau,\frac{(n-1)\Omega'}{2n}\right)}{\cos\operatorname{am}\left(\tau,\frac{\Omega'}{n}\right)\cdots\cos\operatorname{am}\left(\tau,\frac{(n-1)\Omega'}{2n}\right)}\right]^2
$$

und direct

$$
(15.)\quad a_1=\frac{\vartheta_3{}^2(\tau,0)}{\vartheta_3{}^2\left(\frac{\tau}{n},0\right)}.
$$

§ 76.

Das allgemeine Transformationsproblem.

1. Bei den Transformationen, die wir in § 69 und § 75 durchführten, handelte es sich darum, elliptische Functionen

(resp. Thetafunctionen), welche den Parameter $n\tau$ oder $\frac{\tau}{n}$ besitzen, durch solche mit dem Parameter τ auszudrücken; wir stellen uns jetzt eine viel allgemeinere Aufgabe, welche die frühere als speciellen Fall in sich fasst. Dieselbe lautet: *Elliptische Functionen (resp. Thetafunctionen), deren Parameter*

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \tag{1.}$$

ist, wobei a, b, c, d ganze, reelle Zahlen bezeichnen, durch elliptische Functionen (resp. Thetafunctionen) mit dem Parameter τ auszudrücken. Dabei wird es nicht verlangt, dass die Functionen mit τ' das nämliche Argument wie diejenigen mit τ besitzen.

2. Es wird vor allen Dingen darauf ankommen, die ganzzahligen linearen Transformationen (1.) in geeigneter Weise einzutheilen und auf Normalfälle zu reduciren. In dieser Hinsicht ist die sog. „*Determinante*"*) der Transformation,

$$\Delta = ad - bc \tag{2.}$$

von Wichtigkeit, über die wir einige fundamentale Sätze beweisen.

a. Aus (1.) folgt umgekehrt

$$\tau = \frac{-d\tau' + b}{c\tau' - a}, \tag{3.}$$

und man sieht, *dass die Determinante dieser Umkehrung mit Δ identisch ist.*

b. Haben wir die Transformationen

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \tau'' = \frac{a_1\tau' + b_1}{c_1\tau' + d_1}$$

mit den Determinanten Δ und Δ_1, so folgt

$$\tau'' = \frac{(aa_1 + cb_1)\tau + ba_1 + db_1}{(ac_1 + cd_1)\tau + bc_1 + dd_1} \tag{4.}$$

mit der Determinante

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= (aa_1 + cb_1)(bc_1 + dd_1) - (ba_1 + db_1)(ac_1 + cd_1) \\ &= bcb_1c_1 + ada_1d_1 - adb_1c_1 - bca_1d_1 \\ &= (ad - bc)(a_1d_1 - b_1c_1) \end{aligned}$$

*) Wir setzen natürlich voraus, dass Zähler und Nenner von (1.) keinen von ± 1 verschiedenen, ganzzahligen gemeinsamen Theiler haben.

oder

(5.) $$\varDelta_2 = \varDelta \varDelta_1.$$

Dieses Resultat kann übrigens insofern illusorisch werden, als es häufig vorkommt, dass in (4.) die Coefficienten einen gemeinsamen Theiler erhalten, während dies bei den erzeugenden Substitutionen nicht der Fall war; dieser Theiler tritt in $\varDelta_2$ *quadratisch* auf; nach Wegheben desselben verliert (5.) seine Gültigkeit.

Ist $\varDelta = \varDelta_1 = \pm 1$, also auch $\varDelta_2 = \pm 1$, so ist ein solches Vorkommniss unmöglich*).

3. Bei der Construction der elliptischen Functionen mussten wir, um die Convergenz der betreffenden Reihen und Producte zu ermöglichen, die wesentliche Voraussetzung machen (§ 68, 1), dass in $\tau = \alpha + \beta i$ die Grösse β wesentlich positiv ist; es fragt sich, welche Beschränkung wir der Transformation (1.) auferlegen müssen, damit für τ' das Gleiche gilt. Da

$$\tau' = \frac{a\alpha + b + a\beta i}{c\alpha + d + c\beta i} = \frac{(a\alpha + b + a\beta i)(c\alpha + d - c\beta i)}{(c\alpha + d)^2 + c^2\beta^2}$$
$$= \frac{ac\alpha^2 + bc\alpha + ad\alpha + bd + ac\beta^2 + (ad - bc)\beta i}{(c\alpha + d)^2 + c^2\beta^2}$$

ist, so wird der rein imaginäre Theil von τ', dividirt durch i, dann und nur dann positiv sein, wenn

$$\varDelta = ad - bc$$

positiv ist. *Wir werden daher in der Folge nur Transformationen mit* ***positiver Determinante*** *in Betracht zu ziehen haben.*

4. Da die Determinante von (1.) für die Art der Durchführung der Transformation, wie sich herausstellen wird, von

---

*) Auch wenn nur die *eine* der Determinanten gleich ± 1 ist, kann ein solches Wegheben nicht stattfinden; denn wäre etwa $\varDelta = \pm 1$, $\varDelta_1 = n$ und nach vollzogener Vereinfachung $\varDelta_2 = m$, $|m| < |n|$, so würde durch Einsetzung der Umkehrung von $\tau' = \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}$ in (4.) $\tau'' = \dfrac{a_1\tau' + b_1}{c_1\tau' + d_1}$ mit der Determinante $\varDelta_1 = \pm m$ hervorgehen, die durch eine etwa mögliche Hebung nur verkleinert, nicht aber n gleich gemacht werden könnte. Entsprechend ist der Beweis, wenn $\varDelta = n$, $\varDelta_1 = \pm 1$ ist.

entscheidender Bedeutung ist, so wollen wir sagen, dass eine Transformation vom n^{ten} *Grade* sei, wenn $\varDelta = n$ ist; Transformationen des *ersten* Grades werden auch als *lineare* bezeichnet, wobei natürlich dieses Wort in einem anderen Sinne wie gewöhnlich gebraucht ist. Die beiden früher durchgeführten Transformationen $\tau' = n\tau$ und $\tau' = \frac{\tau}{n}$ sind beide vom n^{ten} Grade.

5. Sei nun die Transformation n^{ten} Grades

$$\left\{\begin{array}{l} \tau' = \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}, \\ ad - bc = n \end{array}\right. \tag{6.}$$

vorgelegt, so wollen wir, falls c an absolutem Betrag nicht grösser als a ist, mit dem Nenner derart in den Zähler dividiren, dass wir nur zusehen, wie oftmal c in a *ganzzahlig* enthalten ist; finden wir etwa

$$a = kc + a_1, \ |a_1| < |c|,$$

wobei es nicht darauf ankommt, ob $|kc|$ grösser oder kleiner als $|a|$ ist, so haben wir

$$\tau' = k + \frac{a\tau + b - kc\tau - kd}{c\tau + d} = k + \frac{a_1\tau + b - kd}{c\tau + d},$$

also wenn wir

$$\tau' = \tau_1 + k \tag{7.}$$

setzen:

$$\tau_1 = \frac{a_1\tau + b - kd}{c\tau + d} = \frac{a_1\tau + b_1}{c\tau + d}. \tag{8.}$$

Wir haben also die Transformation (6.) in die beiden (7.) und (8.) zerlegt, von denen die erstere linear ist, während die letzere wieder vom n^{ten} Grade sein muss, da sie aus (6.) durch die gleichfalls lineare Umkehrung von (7.) hervorgeht. In (8.) ist der dritte Coefficient dem absoluten Betrage nach grösser als der erste; wäre dies schon bei (6.) der Fall gewesen, so hätten wir uns die erste Umwandlung ersparen können.

Wir zerlegen nun weiter, indem wir

$$\tau_1 = -\frac{1}{\tau_2}, \tag{9.}$$

also

$$\tau_2 = \frac{c\tau - d}{a_1\tau + b_1} \tag{10.}$$

setzen; da die Determinante von (9.) wieder 1 ist, so ist auch die Transformation (10.) noch vom n^{ten} Grade; ihr erstes Glied ist dem absoluten Betrage nach grösser als das dritte. Jetzt können wir die obige Division wiederholen, also von Neuem eine Transformation

$$\tau_2 = \tau_3 + k_1, \tag{11.}$$

und dann wieder

$$\tau_3 = -\frac{1}{\tau_4} \tag{12.}$$

absondern u. s. w.; immer wird die restirende Transformation noch vom n^{ten} Grade sein. Bei diesem Verfahren wird der erste Coefficient beständig verkleinert, und da dieser Process bei endlichen ganzen Zahlen nicht ins Unendliche währen kann, so wird einmal der erste Coefficient Null werden müssen, so dass wir zu einer Transformation

$$\tau_\nu = -\frac{b_\nu}{c_\nu \tau + d_\nu} \tag{13.}$$

gelangen, deren Determinante

$$b_\nu c_\nu = n$$

ist. War die ursprüngliche Transformation (6.) linear, also $n = 1$, so muss

$$b_\nu = c_\nu = \pm 1,$$

somit

$$\tau_\nu = -\frac{1}{\tau + d_\nu}$$

sein; setzen wir noch

$$\tau_\nu = -\frac{1}{\tau_{\nu+1}},$$

so reducirt sich die Transformation schliesslich auf

$$\tau_{\nu+1} = \tau + d_\nu.$$

Ist dagegen n von 1 verschieden, so lassen wir

$$\tau_\nu = b_\nu \tau_{\nu+1} \tag{14.}$$

eintreten (ohne die Allgemeinheit zu beschränken, können wir in (13.) b_ν und somit auch c_ν als *positiv* voraussetzen), dessen Determinante gleich b_ν ist; die restirende Transformation

$$\tau_{\nu+1} = -\frac{1}{c_\nu \tau + d_\nu} \tag{15.}$$

ist vom Grade c_ν. Auf (15.) wenden wir weiter

$$\tau_{\nu+1} = -\frac{1}{\tau_{\nu+2}}$$

an und finden

$$\tau_{\nu+2} = c_\nu \tau + d_\nu,$$

woraus schliesslich durch

$$\tau_{\nu+2} = \tau_{\nu+3} + d_\nu$$

die Transformation

$$(16.) \qquad \tau_{\nu+3} = c_\nu \tau$$

mit der Determinante c_ν hervorgeht.

Bedenken wir nun noch, dass

$$\tau' = \tau + k$$

durch Iterirung von

$$\tau' = \tau + 1,$$

resp. dessen Umkehrung erhalten wird, so können wir das Resultat unserer Untersuchung folgendermassen zusammenfassen.

Jede lineare Transformation lässt sich durch Iterirung) und Combination der beiden*

$$\tau' = \tau + 1 \quad \textit{und} \quad \tau' = -\frac{1}{\tau}$$

erzeugen.

Eine Transformation n^{ten} *Grades lässt sich aus denselben beiden linearen Transformationen, verbunden mit zwei Transformationen*

$$\tau' = a\tau \quad \textit{und} \quad \tau' = b\tau,$$

wobei $ab = n$ *ist, zusammensetzen.*

Leicht kann man das Verfahren auch so modificiren, dass an Stelle der beiden letzten Transformationen $\tau' = \frac{\tau}{a}$ und $\tau' = \frac{\tau}{b}$ treten. Da nun die beiden Fälle $\tau' = a\tau$ und $\tau' = \frac{\tau}{b}$ bereits erledigt sind, brauchen wir uns uur noch mit den linearen Transformationen

$$\tau' = \tau + 1 \text{ und } \tau' = -\frac{1}{\tau}$$

zu beschäftigen.

---

*) Die Interirungen der *Umkehrungen* sind hierbei selbstverständlich einbegriffen.

§ 77.

Die lineare Transformation.

1. Die Transformation $\tau' = \tau + 1$ bietet keine Schwierigkeiten dar; es ist

$$p' = e^{\pi i \tau'} = e^{\pi} e^{\pi i \tau} = -p,$$

und wenn gebrochne Potenzen von p vorkommen, so ist auf die Bemerkung Rücksicht zu nehmen, dass $p^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\pi i \tau}{n}}$ gesetzt werden muss. Aus den betreffenden Productenentwicklungen folgt ohne Weiteres:

$$(1.)\quad \begin{cases} \eta\,(-p,x) = \eta(p,-x), \\ \eta_0(-p,x) = \eta_0(p,ix) = \eta_3(p,x), \\ \eta_1(-p,x) = e^{\frac{\pi i}{4}}\eta_1(p,x), \\ \eta_2(-p,x) = e^{\frac{\pi i}{4}}\eta_2(p,x), \\ \eta_3(-p,x) = \eta_3(p,ix) = \eta_0(p,x), \end{cases}$$

oder

$$(2.)\quad \begin{cases} \vartheta\,(\tau+1,w) = \vartheta(\tau,w+1), \\ \vartheta_0(\tau+1,w) = \vartheta_3(\tau,w), \\ \vartheta_1(\tau+1,w) = e^{\frac{\pi i}{4}}\vartheta_1(\tau,w), \\ \vartheta_2(\tau+1,w) = e^{\frac{\pi i}{4}}\vartheta_2(\tau,w), \\ \vartheta_3(\tau+1,w) = \vartheta_0(\tau,w). \end{cases}$$

Hieraus folgt weiter

$$(3.)\quad \begin{cases} S(-p,x) = \frac{\eta_0}{\eta_2}\,\frac{\eta_1(p,x)}{\eta_3(p,x)} = \varkappa_1\,\frac{S(p,x)}{D(p,x)}, \\ C(-p,x) = \frac{\eta_3}{\eta_2}\,\frac{\eta_2(p,x)}{\eta_3(p,x)} = \quad\frac{C(p,x)}{D(p,x)}, \\ D(-p,x) = \frac{\eta_3}{\eta_0}\,\frac{\eta_0(p,x)}{\eta_3(p,x)} = \quad\frac{1}{D(p,x)}, \end{cases}$$

und wenn man nun bedenkt, dass durch diese Transformation $\Omega = 2\pi\vartheta_3^{\,2}$ in $2\pi\vartheta_0^{\,2}$ übergeht,

$$(4.)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}(\tau+1, \varkappa_1 w) = \varkappa_1 \dfrac{\sin\operatorname{am}(\tau, w)}{\varDelta\operatorname{am}(\tau, w)}, \\ \cos\operatorname{am}(\tau+1, \varkappa_1 w) = \dfrac{\cos\operatorname{am}(\tau, w)}{\varDelta\operatorname{am}(\tau, w)}, \\ \varDelta\operatorname{am}(\tau+1, \varkappa_1 w) = \dfrac{1}{\varDelta\operatorname{am}(\tau, w)}. \end{cases}$$

2. Während die bis jetzt behandelten Transformationen sich in einfacher Weise bei den multiplicatorisch periodischen Transcendenten durchführen und dann auf die elliptischen Functionen übertragen liessen, ist dies bei der noch übrig bleibenden

$$\tau' = -\frac{1}{\tau}$$

nicht der Fall; wir haben hier ein eclatantes Beispiel, dass die doppeltperiodischen Functionen als die complicirteren Transcendenten auch Eigenschaften besitzen, für die sich bei den einfacheren multiplicatorisch periodischen kein Analogon findet.

Aus der Gleichung (14.) in § 68

$$(5.)\quad \vartheta(\tau, w) = \vartheta(\tau, 0) \prod_{-\nu-1}^{+\nu}{}^{n} \prod_{-\mu-1}^{+\mu}{}^{m} \left(1 - \frac{w}{2m+1+(2n+1)\tau}\right)$$

wird, wenn wir $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ einfügen:

$$(6.)\quad \vartheta\left(-\frac{1}{\tau}, w\right) = \vartheta\left(-\frac{1}{\tau}, 0\right) \prod_{-\nu-1}^{+\nu}{}^{n} \prod_{-\mu-1}^{+\mu}{}^{m} \left(1 - \frac{\tau w}{(2m+1)\tau-(2n+1)}\right).$$

Es ist klar, dass dieser Ausdruck mit

$$(7.)\quad \vartheta(\tau, \tau w) = \vartheta(\tau, 0) \prod_{-\nu-1}^{+\nu}{}^{n} \prod_{-\mu-1}^{+\mu}{}^{m} \left(1 - \frac{\tau w}{2m+1+(2n+1)\tau}\right)$$

sämmtliche Nullpunkte gemeinsam hat; denn beide Doppelproducte bestehen aus denselben Factoren. Da indessen die Reihenfolge der Factoren bei diesen Producten nicht ohne Einfluss ist, so dürfen wir nur schliessen, *dass der Quotient von* (6.) *und* (7.) *eine nirgends im Endlichen unendlich werdende analytische Function, mithin nach* § 47, (1.)

$$(8.)\quad \begin{aligned} \vartheta\left(-\frac{1}{\tau}, w\right) &= e^{\pi i(a_0+a_1 w+a_2 w^2+\cdots)}\,\vartheta(\tau, \tau w) \\ &= e^{\pi i\varphi(w)}\,\vartheta(\tau, \tau w) \end{aligned}$$

zu setzen ist. Um den Factor $e^{\pi i \varphi(w)}$ zu ermitteln, bedenken wir, dass *die transcendente ganze Function* $\vartheta(\tau, w)$ durch die beiden Relationen

(9.) $$\vartheta(\tau, w+2) = \vartheta(\tau, w)$$

und

(10.) $$\vartheta(\tau, w+2\tau) = e^{-\pi i(\tau+w)}\vartheta(\tau, w)$$

bis auf einen constanten Factor, der jedoch τ noch enthalten kann, bestimmt ist. Von (9.) und (10.) gelangt man nämlich zur Gleichung

(11.) $$\eta(p, p^2 x) = \frac{1}{px}\eta(p, x);$$

substituirt man

$$\eta(p, x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$
$$+ \frac{a_{-1}}{x} + \frac{a_{-2}}{x^2} + \cdots,$$

eine Form, die $\eta(p, x)$ haben muss, damit $\vartheta(\tau, w)$ eine transcendente ganze Function wird, so liefert (11.)

$$a_0 + a_1 p^2 x + a_2 p^4 x^2 + \cdots + \frac{a_{-1}}{p^2 x} + \frac{a_{-2}}{p^4 x^2} + \cdots$$

$$= \frac{a_0}{px} + \frac{a_1}{p} + \frac{a_2 x}{p} + \frac{a_3 x^2}{p} + \cdots + \frac{a_{-1}}{px^2} + \frac{a_{-2}}{px^3} + \cdots,$$

woraus sich in der That die Coefficienten bis auf einen constanten Factor bestimmen.

Wir haben nun nach (8.), (9.) und (10.)

$$\vartheta\left(-\frac{1}{\tau}, w+2\right) = e^{\pi i \varphi(w+2)}\vartheta(\tau, \tau w + 2\tau)$$
$$= e^{\pi i[\varphi(w+2)-(\tau+\tau w)]}\vartheta(\tau, w)$$
$$= \vartheta\left(-\frac{1}{\tau}, w\right) = e^{\pi i \varphi(w)}\vartheta(\tau, w),$$

also

$$\varphi(w+2) - \tau - \tau w = \varphi(w) + 2k$$

oder

(12.) $$\varphi(w+2) - \varphi(w) - 2k = \tau + \tau w.$$

Die Untersuchung von $\vartheta\left(-\frac{1}{\tau}, w+2\tau\right)$ liefert nichts hiervon Verschiedenes. Gelingt es, $\varphi(w)$ der Gleichung (12.) entsprechend zu bestimmen, so ist $\vartheta\left(-\frac{1}{\tau}, w\right)$ bis auf

eine multiplicatorische Constante gefunden. Versuchen wir es zunächst mit der Annahme, dass $k = 0$ und

$$\varphi(w) = a_1 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots + a_n w^n,$$

also eine algebraische ganze Function ist, so sehen wir leicht, dass $\varphi(w+2) - \varphi(w)$ vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist, woraus wir nach (12.) schliessen, dass $\varphi(w)$ den *zweiten* Grad besitzt. Nehmen wir

$$\varphi(w) = a_0 + a_1 w + a_2 w^2,$$

so muss

$$4a_2 w + 4a_2 + 2a_1 = \tau + \tau w,$$

also

$$a_2 = \frac{\tau}{4},\ a_1 = 0$$

sein, während a_0 unbestimmt bleibt, so dass wir setzen können:

$$\vartheta\left(-\frac{1}{\tau}, w\right) = C e^{\frac{\pi i \tau}{4} w^2} \vartheta(\tau, \tau w). \tag{13.}$$

Die Hauptsache der ganzen Untersuchung ist nun die Bestimmung der Grösse C, die als eine Function von τ, $C = \psi(\tau)$, anzusehen ist. Setzen wir in (13.) $w = 0$, dann $w = 1$, so erhalten wir unter Benutzung der Abkürzungen

$$p = e^{\pi i \tau},\ q = e^{\frac{-\pi i}{\tau}},\ p^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\pi i \tau}{n}},\ q^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{-\pi i}{n\tau}}:$$

$$\psi(\tau) = \frac{\vartheta\left(-\frac{1}{\tau}, 0\right)}{\vartheta(\tau, 0)} = \prod_1^\infty{}_n \frac{(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2}{(1-p^{2n})(1+p^{2n-1})^2} \tag{14.}$$

und

$$\psi(\tau) = \frac{\vartheta\left(-\frac{1}{\tau}, 1\right)}{e^{\frac{\pi i \tau}{4}} \vartheta(\tau, \tau)} = \frac{\eta(q, -1)}{p^{\frac{1}{4}} \eta(p, p)} \tag{15.}$$

$$= \frac{1}{2p^{\frac{1}{4}}} \prod_1^\infty{}_n \frac{(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})^2}{(1-p^{2n})(1+p^{2n})^2}.$$

Wird in (15.) $\frac{\tau}{2}$ für τ, also $p^{\frac{1}{2}}$ für p, q^2 für q eingesetzt, so finden wir

$$\psi\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{1}{2p^{\frac{1}{8}}} \prod_1^\infty{}_n \frac{(1-q^{4n})(1-q^{4n-2})^2}{(1-p^n)(1+p^n)^2}. \tag{16.}$$

Durch Multiplication von (14.) und (15.) und Quadratwurzelausziehen folgt weiter

$$(17.)\qquad \psi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}\,p^{\frac{1}{8}}} \prod_1^{\infty}{}_n \frac{(1-q^{2n})\,(1+q^{2n-1})\,(1-q^{2n-1})}{(1-p^{2n})\,(1+p^{2n-1})\,(1+p^{2n})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\,p^{\frac{1}{8}}} \prod_1^{\infty}{}_n \frac{(1-q^{2n})\,(1-q^{4n-1})}{(1-p^{2n})\,(1+p^{n})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\,p^{\frac{1}{8}}} \prod_1^{\infty}{}_n \frac{(1-q^{4n})\,(1-q^{4n-2})^2}{(1-p^{n})\,(1+q^{n})^2};$$

das Vorzeichen von $\sqrt{2}$ zu bestimmen ist an dieser Stelle nicht nöthig; es genügt die Bemerkung, dass $\sqrt{2}$ für alle Werthe von τ, für welche die Entwicklungen convergiren, das *gleiche* Zeichen haben muss, da $\psi(\tau)$ auf diesem Gebiete eine eindeutige, analytische Function ist, wie die Form (14.) unmittelbar zeigt.

Vergleichen wir (16.) und (17.), so erhalten wir die Functionalgleichung

$$\psi\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{2}}$$

oder

$$(18.)\qquad \psi(2\tau) = \psi(\tau)\sqrt{2}$$

oder, wenn wir

$$(19.)\qquad f(\tau) = \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{\tau}}$$

setzen:

$$(20.)\qquad f(2\tau) = f(\tau);$$

aus (14.) folgt ausserdem

$$(21.)\qquad \psi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{\psi(\tau)}.$$

Bei der Einführung von $f(\tau)$ ist zu bemerken, dass $\sqrt{\tau}$ innerhalb des Convergenzbezirkes von $\psi(\tau)$ eine *eindeutige* Function ist. $\psi(\tau)$ convergirt nämlich nur, wenn $|p| < 1$ (*nicht* $|p| = 1$), d. h. wenn in $\tau = \alpha + \beta i$ die Grösse β wesentlich positiv und von Null verschieden, ausserdem τ endlich ist; die Verzweigungspunkte von $\sqrt{\tau}$, $\tau = 0$ und $\tau = \infty$ fallen also nicht in diesen Bereich. $f(\tau)$ ist mithin gleichfalls eine eindeutige, analytische Function von τ in der Halbebene, die oberhalb der Abscissenaxe liegt.

Um noch eine weiterere Functionalgleichung herzuleiten, setzen wir in (13.) $w = -\frac{1}{\tau} - \frac{1}{3}$ und erhalten

$$\psi(\tau) = \frac{\vartheta\left(-\frac{1}{\tau}, -\frac{1}{\tau} - \frac{1}{3}\right)}{e^{\frac{\pi i \tau}{4}\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{3}\right)^2} \vartheta\left(\tau, -1 - \frac{\tau}{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(1 + e^{\frac{\pi i}{3}}\right) q^{\frac{1}{4}}}{e^{\frac{\pi i}{6}} p^{\frac{1}{36}}} \prod_{1}^{\infty}{}_{n} \frac{\left(1 - q^{2n}\right)\left(1 + e^{\frac{\pi i}{3}} q^{2n}\right)\left(1 + e^{\frac{-\pi i}{3}} q^{2n}\right)}{\left(1 - p^{2n}\right)\left(1 - p^{2n - \frac{2}{3}}\right)\left(1 - p^{2n - \frac{4}{3}}\right)}$$

$$= \frac{1 + e^{\frac{\pi i}{3}}}{e^{\frac{\pi i}{6}}} \frac{q^{\frac{1}{4}}}{p^{\frac{1}{36}}} \prod_{1}^{\infty}{}_{n} \frac{\left(1 - q^{6n}\right)}{\left(1 - p^{\frac{2n}{3}}\right)}$$

oder, da

$$\frac{1 + e^{\frac{\pi i}{3}}}{e^{\frac{\pi i}{6}}} = e^{\frac{\pi i}{6}} + e^{\frac{-\pi i}{6}} = 2 \cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

ist:

$$\psi(\tau) = \sqrt{3}\, \frac{q^{\frac{1}{4}}}{p^{\frac{1}{36}}} \prod_{1}^{\infty}{}_{n} \frac{\left(1 - q^{6n}\right)}{\left(1 - p^{\frac{2n}{3}}\right)}.$$

Setzen wir 3τ statt τ, also p^3 statt p, $q^{\frac{1}{3}}$ statt q, so folgt

$$\text{(22.)} \qquad \psi(3\tau) = \sqrt{3}\, \frac{q^{\frac{1}{12}}}{p^{\frac{1}{12}}} \prod_{1}^{\infty}{}_{n} \frac{\left(1 - q^{2n}\right)}{\left(1 - p^{2n}\right)}.$$

Vertauschen wir τ mit $-\frac{1}{\tau}$, also p mit q, und nehmen beiderseits die reciproken Werthe, so finden wir nach (21.)

$$\text{(23.)} \qquad \frac{1}{\psi\left(-\frac{3}{\tau}\right)} = \psi\left(\frac{\tau}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{q^{\frac{1}{12}}}{p^{\frac{1}{12}}} \prod_{1}^{\infty}{}_{n} \frac{\left(1 - q^{2n}\right)}{\left(1 - p^{2n}\right)}$$

und somit durch Vergleichung von (22.) und (23.):

$$\psi(3\tau) = 3\psi\left(\frac{\tau}{3}\right)$$

oder

$$\text{(24.)} \qquad \psi(9\tau) = 3\psi(\tau)$$

oder

$$\text{(25.)} \qquad f(9\tau) = f(\tau).$$

Aus den Gleichungen (20.) und (25.) ist ersichtlich, dass $f(\tau)$ die multiplicatorischen Perioden 2 und 9 besitzt, die sich nicht auf eine einzige zurückführen lassen, da nicht $2^{k_1} = 9^{k_2}$ ist. Da ferner $f(\tau)$ in seinem ganzen Stetigkeitsbereiche den Charakter einer ganzen Function trägt, so schliessen wir nach § 65, 8, dass es eine *von τ unabhängige Constante* ist; wir setzen

$$f(\tau) = c, \text{ also } \psi(\tau) = c\sqrt{\tau}.$$

Nehmen wir in (14.) $\tau = i$, so wird $p = q$, also

$$\psi(i) = 1,$$

so dass wir

$$c = \frac{1}{\sqrt{i}},$$

also

$$\psi(\tau) = \sqrt{\frac{\tau}{i}} = \sqrt{-i\tau}$$

zu setzen haben, wobei das Zeichen der innerhalb des Convergenzintervalls *eindeutigen* Function $\sqrt{-i\tau}$ so zu wählen ist, dass für $\tau = i$

$$\sqrt{-i\tau} = +1$$

wird. Sonach ist

$$(26.) \qquad \vartheta\left(-\frac{1}{\tau}, w\right) = \sqrt{-i\tau}\, e^{\frac{\pi i\tau w^2}{4}}\, \vartheta(\tau, \tau w).$$

3. Auf die vier Thetafunctionen überträgt sich das erlangte Resultat folgendermassen:

$$(27.) \quad \begin{cases} \vartheta_0\left(-\frac{1}{\tau}, w\right) = \vartheta\left(-\frac{1}{\tau}, 2w+1\right) \\ \qquad = \sqrt{-i\tau}\, e^{\frac{\pi i\tau(2w+1)^2}{4}}\, \vartheta(\tau, \tau(2w+1)) \\ \qquad = \sqrt{-i\tau}\, e^{\pi i\tau w^2}\, \vartheta_2(\tau, \tau w), \\ \vartheta_1\left(-\frac{1}{\tau}, w\right) = -i\sqrt{-i\tau}\, e^{\pi i\tau w^2}\, \vartheta_1(\tau, \tau w), \\ \vartheta_2\left(-\frac{1}{\tau}, w\right) = \sqrt{-i\tau}\, e^{\pi i\tau w^2}\, \vartheta_0(\tau, \tau w), \\ \vartheta_3\left(-\frac{1}{\tau}, w\right) = \sqrt{-i\tau}\, e^{\pi i\tau w^2}\, \vartheta_3(\tau, \tau w). \end{cases}$$

Berücksichtigt man ferner, dass $\Omega = 2\pi\vartheta_3^2$ durch die Transformation $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ in $-2\pi i\tau\vartheta_3^2$ übergeht, so erhält man:

$$(28.)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}\left(-\frac{1}{\tau}, iw\right) = i\,\frac{\sin\operatorname{am}(\tau, w)}{\cos\operatorname{am}(\tau, w)}, \\ \cos\operatorname{am}\left(-\frac{1}{\tau}, iw\right) = \frac{1}{\cos\operatorname{am}(\tau, w)}, \\ \varDelta\operatorname{am}\left(-\frac{1}{\tau}, iw\right) = \frac{\varDelta\operatorname{am}(\tau, w)}{\cos\operatorname{am}(\tau, w)}. \end{cases}$$

4. Durch die letzten Untersuchungen wird auch eine Frage erledigt, welche sich gleich Anfangs bei der Reduction der elliptischen Functionen auf die multiplicatorisch periodischen darbietet (s. § 65, 3, Anm.). Genügt nämlich $F(w)$ den Gleichungen

$$F(w + \Omega) = F(w),$$
$$F(w + \Omega') = F(w),$$

so kann man $F(w)$ dadurch aus einer multiplicatorisch periodischen Function $f(x)$ herleiten, dass man

$$x = e^{\frac{2\pi i w}{\Omega}},\ p = e^{\frac{2\pi i \Omega'}{\Omega}},\ F(w) = f(x)$$

setzt; in der That ist dann

$$f(px) = f(x).$$

Soll p der Bedingung $|p| < 1$ genügen, so muss der reelle Theil von $\frac{i\Omega'}{\Omega}$ wesentlich negativ sein, trifft dies nicht zu, so braucht man nur $-\Omega'$ statt Ω' zu wählen, weshalb man ohne die Allgemeinheit zu beschränken die erstere Annahme machen kann.

Setzt man aber in $f(x)$

$$x = e^{\frac{-2\pi i w}{\Omega'}},\ q = e^{\frac{-2\pi i \Omega}{\Omega'}},$$

(hier muss nämlich $-\Omega'$ statt Ω' genommen werden, um $|q| < 1$ zu machen), so erhält man wiederum eine Function $F(w)$, welche gleichfalls den Gleichungen

$$F_1(w + \Omega) = F_1(w),$$
$$F_1(w + \Omega') = F_1(w)$$

genügt, und man kann fragen, wie sich $F_1(w)$ zu $F(w)$ verhält. Diese Frage ist durch das Vorhergehende für die einfachsten elliptischen Functionen beantwortet, da $F_1(w)$ aus $F(w)$ hervorgeht, wenn man, abgesehen von einer Änderung des Arguments, $\frac{\Omega'}{\Omega}$ durch $-\frac{\Omega}{\Omega'}$, d. h. τ durch $-\frac{1}{\tau}$ ersetzt.

5. Stellen wir sämmtliche Transformationsresultate zusammen, so finden wir das bemerkenswerthe Ergebniss, *dass durch jede lineare Transformation eine jede Thetafunction in eine andere verwandelt wird, die den ursprünglichen Parameter enthält, multiplicirt mit einer Exponentialfunction. Dagegen lässt sich eine Thetafunction, deren Parameter durch eine Transformation n^{ten} Grades aus τ hervorgegangen ist, durch ein Product von n Thetafunctionen mit dem Parameter τ darstellen**).

§ 78.

Die Modulfunctionen.

1. Die multiplicatorisch periodischen und die elliptischen Functionen, sowie die mit ihnen in Beziehung stehenden Transcendenten sind nicht allein im Allgemeinen analytische Functionen ihres *Arguments*, sondern sie enthalten auch einen *variablen Parameter*, als den wir zuerst $p = e^{\pi i \tau}$ ansahen, für den wir aber in der Folge immer die Grösse τ wählen wollen. Die Transformationen, die wir mit diesem Parameter vornahmen, zeigten uns, dass sich die Thetafunctionen verhältnissmässig wenig ändern, wenn man auf τ eine *lineare*, d. h. eine solche Transformation ausübt, die sich aus den beiden

$$\tau' = \tau + 1 \quad \text{und} \quad \tau' = -\frac{1}{\tau}$$

zusammensetzen lässt. Wenn wir nun bedenken, dass der Ausgangspunkt unserer gesammten speciellen analytischen Untersuchungen der war, dass wir Functionen aufzustellen suchten, die bei linearen (im weiteren Sinne) Transformationen ungeändert bleiben, und wir schon bei den multiplicatorisch periodischen Transcendenten uns veranlasst sahen, auch Functionen, die sich (wie die η-Functionen) bei derartigen Transformationen nur verhältnissmässig wenig ändern, in Betracht zu ziehen, so liegt es sehr nahe, die Thetafunctionen nun auch als *Functionen von τ* nach dieser Richtung hin zu betrachten und zu untersuchen, ob sich aus ihnen nicht *perio-*

*) Das Letztere folgt leicht mit Hülfe der Resultate dieses und der beiden vorigen Paragraphen.

dische Functionen höherer Art herleiten lassen. Zu diesem Zwecke setzen wir vorläufig $w = 0$ und beschäftigen uns mit den Functionen von τ, die wir so erhalten. Wir schreiben in der Folge

$$\vartheta(\tau, 0) = \vartheta(\tau), \quad \vartheta_\alpha(\tau, 0) = \vartheta_\alpha(\tau)$$

und erhalten nach § 77

$$(1.)\quad \begin{cases} \vartheta(\tau + 2) = \vartheta(\tau), \\ \vartheta_0(\tau + 1) = \vartheta_3(\tau), \\ \vartheta_2(\tau + 1) = e^{\frac{\pi i}{4}} \vartheta_2(\tau), \\ \vartheta_3(\tau + 1) = \vartheta_0(\tau) \end{cases}$$

und

$$(2.)\quad \begin{cases} \vartheta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\,\vartheta(\tau), \\ \vartheta_0\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\,\vartheta_2(\tau), \\ \vartheta_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\,\vartheta_0(\tau), \\ \vartheta_3\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\,\vartheta_3(\tau). \end{cases}$$

2. Wir erkennen, dass bei der Transformation $\tau' = -\frac{1}{\tau}$, von einer Vertauschung der Thetafunctionen unter einander abgesehen, der Factor $\sqrt{-i\tau}$ abgesondert wird, ganz ähnlich, wie die η-Functionen bei der Multiplication des Arguments mit p^2, resp. p einen Factor ausscheiden; durch diese Analogie werden wir darauf hingewiesen, auch hier *Quotienten* zweier Functionen der eben besprochenen Art zu betrachten. Zunächst wenden wir uns zur Untersuchung der Grössen $\sqrt{\varkappa}$ und $\sqrt{\varkappa_1}$, bei denen wir jetzt eine (von der früheren abweichende) Argumentsbezeichnung eintreten lassen. Es ist

$$(3.)\qquad \sqrt{\varkappa(\tau)} = \frac{\vartheta_2(\tau)}{\vartheta_3(\tau)} = 2p^{\frac{1}{4}}\,\frac{[(1+p^2)(1+p^4)(1+p^6)\cdots]^2}{[(1+p)(1+p^3)(1+p^5)\cdots]^2}$$

und

$$(4.)\qquad \sqrt{\varkappa_1(\tau)} = \frac{\vartheta_0(\tau)}{\vartheta_3(\tau)} = \frac{[(1-p)(1-p^3)(1-p^5)\cdots]^2}{[(1+p)(1+p^3)(1+p^5)\cdots]^2},$$

wobei wieder $p^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{\pi i \tau}{4}}$ ist.

Die Formeln für die lineare Transformation dieser Functionen lauten

$$
(5.)\quad \begin{cases}
\sqrt{\varkappa(\tau+1)} = e^{\frac{\pi i}{4}} \sqrt{\dfrac{\varkappa(\tau)}{\varkappa_1(\tau)}}, \\
\sqrt{\varkappa\left(-\dfrac{1}{\tau}\right)} = \sqrt{\varkappa_1(\tau)}, \\
\sqrt{\varkappa_1(\tau+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{\varkappa_1(\tau)}}, \\
\sqrt{\varkappa_1\left(-\dfrac{1}{\tau}\right)} = \sqrt{\varkappa(\tau)}.
\end{cases}
$$

Die Vorzeichen der vorkommenden Wurzelgrössen sind durch die Gleichungen (3.) und (4.) eindeutig bestimmt.

3. Da sich die Functionen $\sqrt{\varkappa(\tau)}$ und $\sqrt{\varkappa_1(\tau)}$, abgesehen von dem Factor $2p^{\frac{1}{4}}$, als *Quadrate* darstellen, so liegt es nahe, die *Quadratwurzeln* aus diesen Grössen in die Untersuchung einzuführen; in der That werden dieselben in der Theorie der Modulargleichungen eine wichtige Rolle spielen. Wir setzen mit Herrn Hermite, indem wir die Vorzeichen derart eindeutig bestimmen, dass $p^{\frac{1}{8}} = e^{\frac{\pi i \tau}{8}}$ und für $\sqrt{2}$ der *positive* Werth gewählt werden soll,

$$
(6.)\qquad \varphi(\tau) = \sqrt{2}\, p^{\frac{1}{8}} \frac{(1+p^2)(1+p^4)(1+p^6)\cdots}{(1+p)(1+p^3)(1+p^5)\cdots},
$$

$$
(7.)\qquad \psi(\tau) = \frac{(1-p)(1-p^3)(1-p^5)\cdots}{(1+p)(1+p^3)(1+p^5)\cdots}.
$$

Auch für diese Ausdrücke lassen sich leicht die auf die lineare Transformation bezüglichen Formeln herleiten; unmittelbar ergiebt sich aus der Form derselben

$$
(8.)\quad \begin{cases}
\varphi(\tau+1) = e^{\frac{\pi i}{8}} \sqrt{2}\, p^{\frac{1}{8}} \dfrac{(1+p^2)(1+p^4)(1+p^6)\cdots}{(1-p)(1-p^3)(1-p^5)\cdots} = e^{\frac{\pi i}{8}} \dfrac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)}, \\
\psi(\tau+1) = \dfrac{1}{\psi(\tau)},
\end{cases}
$$

ferner

$$
(9.)\quad \begin{cases}
\varphi(\tau+2) = e^{\frac{\pi i}{4}} \varphi(\tau), \\
\psi(\tau+2) = \psi(\tau).
\end{cases}
$$

Durch Wurzelausziehen aus der zweiten und vierten der Formeln (5.) finden wir

$$\varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \pm\,\psi(\tau),$$

$$\psi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \pm\,\varphi(\tau),$$

und wir haben nur noch die Vorzeichen festzustellen. Setzen wir $\tau = i$, also $\tau = -\frac{1}{\tau}$, so werden

$$(10.)\quad \begin{cases} \varphi(i) = \sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{8}}\dfrac{(1+e^{-2\pi})(1+e^{-4\pi})(1+e^{-6\pi})\cdots}{(1+e^{-\pi})(1+e^{-3\pi})(1+e^{-5\pi})\cdots} \\ \text{und} \\ \psi(i) = \dfrac{(1-e^{-\pi})(1-e^{-3\pi})(1-e^{-5\pi})\cdots}{(1+e^{-\pi})(1+e^{-3\pi})(1+e^{-5\pi})\cdots} \end{cases}$$

positive Grössen, da es ihre sämmtlichen Factoren sind. Hieraus ist ersichtlich, dass die oberen Zeichen die richtigen sind, weil nur so für $\tau = -\frac{1}{\tau} = i$ Übereinstimmung herrschen kann. Wir haben

$$(11.)\quad \begin{cases} \varphi\left(-\dfrac{1}{\tau}\right) = \psi(\tau), \\ \psi\left(-\dfrac{1}{\tau}\right) = \varphi(\tau), \end{cases}$$

zwei Gleichungen, die wesentlich identisch sind.

4. Nach den Formeln (9.) und (11.) lässt sich unmittelbar eine Function construiren, welche die beiden Perioden

$$(12.)\qquad \tau' = \tau + 2 \quad \text{und} \quad \tau' = -\frac{1}{\tau}$$

besitzt. Es ist nämlich klar, dass $\varphi^8(\tau)$ und $\psi^8(\tau)$ oder $\varkappa^2(\tau)$ und $\varkappa_1^{\,2}(\tau)$ für die erstere Transformation ungeändert bleiben, während sie für die zweite in einander übergehen; jede symmetrische Function beider Ausdrücke besitzt daher die verlangte Eigenschaft. Alle symmetrische Functionen von $\varkappa^2(\tau)$ und $\varkappa_1^{\,2}(\tau)$ lassen sich aber durch die beiden einfachsten derselben, nämlich durch $\varkappa^2(\tau) + \varkappa_1^{\,2}(\tau) = 1$ und $\varkappa^2(\tau)\varkappa_1^{\,2}(\tau)$ ausdrücken, so dass uns $\varkappa^2(\tau)\varkappa_1^{\,2}(\tau)$ als der zweckmässigste Repräsentant für die Functionen mit den Perioden (12.) erscheint.

Setzen wir

$$(13.)\qquad \chi(\tau)=\varphi(\tau)\psi(\tau)$$

$$=\sqrt{2}p^{\frac{1}{8}}\frac{(1+p^2)(1+p^4)(1+p^6)\cdots(1-p)(1-p^3)(1-p^5)\cdots}{[(1+p)(1+p^3)(1+p^5)\cdots]^2}$$

$$=\sqrt{2}p^{\frac{1}{8}}\frac{(1+p^2)(1+p^4)(1+p^6)\cdots}{(1+p)(1+p^2)(1+p^3)\cdots[(1+p)(1+p^3)(1+p^5)\cdots]^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}p^{\frac{1}{8}}}{[(1+p)(1+p^3)(1+p^5)\cdots]^3},$$

so haben wir

$$(14.)\qquad \begin{cases}\chi(\tau+1)=e^{\frac{\pi i}{8}}\dfrac{\varphi(\tau)}{\psi^2(\tau)},\\[2mm] \chi(\tau+2)=e^{\frac{\pi i}{4}}\chi(\tau),\\[2mm] \chi\left(-\dfrac{1}{\tau}\right)=\chi(\tau)\end{cases}$$

und $\chi^8(\tau)$ hat die beiden Perioden (12.). Weiter unten werden wir uns davon überzeugen, dass ihm keine anderen linearen Perioden zukommen.

Da $\chi(\tau)$ nach (13.) ein im Wesentlichen *kubischer* Ausdruck ist, so kann man aus ihm die Kubikwurzel ziehen und

$$(15.)\qquad X(\tau)=\frac{\sqrt[6]{2}\,p^{\frac{1}{24}}}{(1+p)(1+p^3)(1+p^5)\cdots}$$

setzen, worin $\sqrt[6]{2}$ positiv zu nehmen ist. Mit Leichtigkeit findet man (und zwar die erste Gleichung unmittelbar aus (13.), die zweite aus (14.) unter Beachtung des Werthes für $\tau=i$):

$$(16.)\qquad \begin{cases}X(\tau+2)=e^{\frac{\pi i}{12}}X(\tau),\\[2mm] X\left(-\dfrac{1}{\tau}\right)=X(\tau).\end{cases}$$

5. Es hat aber auch keine Schwierigkeit, eine Function herzustellen, welche für

$$(17.)\qquad \tau'=\tau+1\quad\text{und}\quad \tau'=-\frac{1}{\tau},$$

d. h. für alle *linearen* (im engeren Sinne) Transformationen ungeändert bleibt. Bei einer Betrachtung der Gleichungen

(1.) und (2.) ergiebt sich nämlich sofort, dass jede ganze, symmetrische Function n^{ten} Grades von

$$\vartheta_0^8(\tau),\ \vartheta_2^8(\tau),\ \vartheta_3^8(\tau)$$

durch die Transformation $\tau' = \tau + 1$ nicht geändert wird, während sie bei $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ den Factor τ^{4n} absondert; der Quotient zweier solchen symmetrischen Functionen gleichen Grades hat also die Perioden (17.). Die einfachsten dieser symmetrischen Ausdrücke, aus denen sich alle übrigen rational herleiten lassen, sind

$$\vartheta_0^8(\tau) + \vartheta_2^8(\tau) + \vartheta_3^8(\tau),$$
$$\vartheta_2^8(\tau)\vartheta_3^8(\tau) + \vartheta_3^8(\tau)\vartheta_0^8(\tau) + \vartheta_0^8(\tau)\vartheta_2^8(\tau),$$
$$\vartheta_0^8(\tau)\vartheta_2^8(\tau)\vartheta_3^{(8)},$$

die jedoch wegen der Relation

$$\vartheta_3^4 = \vartheta_0^4 + \vartheta_2^4$$

auf zwei reducirt werden können.

Der einfachste verwendbare Quotient, auf den sich die beiden andern zurückführen lassen, ist

$$(18.)\qquad \frac{(\vartheta_0^8 + \vartheta_2^8 + \vartheta_3^8)^3}{\vartheta_0^8\vartheta_2^8\vartheta_3^8} = \frac{(\varkappa^4 + \varkappa_1^4 + 1)^3}{\varkappa^4\varkappa_1^4}$$
$$= \frac{[(\varkappa^2 + \varkappa_1^2)^2 + 1 - 2\varkappa^2\varkappa_1^2]^3}{\varkappa^4\varkappa_1^4} = \frac{(2 - 2\varkappa^2\varkappa_1^2)^3}{\varkappa^4\varkappa_1^4} = 8\,\frac{(1 - \varkappa^2\varkappa_1^2)^3}{\varkappa^4\varkappa_1^4},$$

und wir wollen

$$(19.)\qquad J(\tau) = \frac{(1 - \varkappa^2\varkappa_1^2)^3}{\varkappa^4\varkappa_1^4} = \frac{(1 - \varkappa^2 + \varkappa^4)^3}{\varkappa^2(1 - \varkappa^2)^2},$$

die sogenannte „*absolute Invariante*“ der elliptischen Functionen, als Normalform betrachten.

6. Wir sind also hiermit zu einer neuen doppeltperiodischen Function gelangt, welche die beiden Periodicitätsgleichungen — um zur Variabeln x zurückzukehren —

$$(20.)\qquad y = x + 1 \quad \text{und} \quad y = -\frac{1}{x}$$

besitzt. Diese beiden nicht vertauschbaren Perioden erzeugen nach § 76 durch Iterirung und Combination eine *Gruppe* von Perioden, deren allgemeine Form

$$(21.)\qquad y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

ist, worin a, b, c, d ganze Zahlen bezeichnen, welche der Gleichung

$$(22.) \qquad ad - bc = 1$$

genügen. Man versteht nämlich allgemein unter einer *Gruppe* einen Complex von Perioden (Transformationen), welcher so beschaffen ist, dass die Iterirung und Combination beliebiger Elemente dieses Complexes wieder Elemente desselben hervorbringt. Eine Gruppe, wie die vorliegende, kann wieder *Untergruppen* enthalten, d. h. solche Gruppen, deren Elemente in der Hauptgruppe sämmtlich vorkommen, ohne jedoch deren Gesammtheit auszumachen. In der That enthält die Gruppe (20.) oder (21.) unzählige Untergruppen, die noch keineswegs alle ermittelt sind. So sind z. B. die Gruppen, die durch

$$(23.) \qquad y = x + k, \quad y = -\frac{1}{x},$$

k ganzzahlig, erzeugt werden, Untergruppen derselben. Wir bezeichnen sämmtliche Functionen, welche die Gruppe (20.) oder eine Untergruppe derselben (die sich nicht gerade auf eine *einfache* Periode reducirt) als Perioden besitzen, als *„elliptische Modulfunctionen"* oder kurzweg als *„Modulfunctionen"*. Dieselben gehören zu jenen höheren periodischen Transcendenten, deren Existenz wir bereits früher erwähnten; wir geben die Theorie derselben hier nur in den Anfangsgründen, während wir ihre eingehendere Behandlung in einen zweiten Theil der vorliegenden Arbeit verweisen müssen.

7. Die Modulfunctionen besitzen alle unendlich viele wesentliche Discontinuitätspunkte; für diejenigen mit der Gruppe (21.) ist sogar der Nachweis leicht, dass die Abscissenaxe eine *Unstetigkeitslinie* sein muss, so dass eine Fortsetzung der Function über dieselbe hinaus unmöglich ist. Aus der Existenz des Discontinuitätspunktes $x = \infty$ folgt nämlich durch $y = -\frac{1}{x}$, dass auch $x = 0$, also weiter $x = k$ solche x sind. Durch beliebig oftmalige Aufeinanderfolge der Perioden $y = x + k_\alpha$ und $y = -\frac{1}{x}$ finden wir, dass alle durch

$$(24.)\qquad x = k_0 - \cfrac{1}{k_1 - \cfrac{1}{k_2 - \cfrac{1}{k_3 - \cdots}}}$$

dargestellten Punkte wesentliche Discontinuitätspunkte sind. Bemerkt man nun, dass sich jede rationale, positive oder negative Zahl in die Form (24.) setzen lässt, so ist ersichtlich, *dass die betreffende Modulfunction für alle reellen rationalen x, d. h. für unendlich viele, sich überall unendlich dicht an einander schliessende Punkte der Abscissenaxe wesentlich unstetig wird.*

In Folge der in § 68, 1 gemachten Festsetzung lässt sich daher wenigstens ein Theil der Modulfunctionen nur über die oberhalb der Abscissenaxe gelegene Hälfte der Zahlenebene als analytische Function ausbreiten.

8. Wir wollen nun einen Blick auf die verschiedenen Perioden werfen, welche in der Gruppe

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad ad - bc = 1,$$

(die übrigens auch in mannichfacher Weise aus zwei anderen Perioden wie $y = x + 1$ und $y = -\frac{1}{x}$ erzeugt werden kann) enthalten sind. Aus § 34, (14.) wird in unserem Falle

$$(25.)\quad p = -1 + \frac{(a+d)^2}{2} \pm \frac{a+d}{2}\sqrt{a^2 - 2ad + d^2 + 4bc}$$

$$= -1 \pm \frac{(a+d)^2}{2} \pm \frac{a+d}{2}\sqrt{(a+d)^2 - 4}\,.$$

Ist nun

$$(a+d)^2 - 4 = 0,$$

so wird $p = 1$, und die Periode muss nach § 34 auf eine *additive* reducirt werden. Haben wir

$$(a+d)^2 - 4 > 0,$$

so wird p *reell* und $|p|$ von 1 verschieden; ist dagegen

$$(a+d)^2 - 4 < 0,$$

so erhalten wir für p einen *complexen* Werth, und es ist

$$|p| = \sqrt{\left[-1 + \frac{(a+d)^2}{2}\right]^2 + \frac{(a+d)^2}{4}\left[4 - (a+d)^2\right]} = 1,$$

so dass wir es mit einer Periode zu thun haben, die nach einer endlichen Zahl von Iterirungen zum Ausgangswerthe zurückführt (andernfalls wäre die Gruppe unmöglich). Da nun $(a+d)^2$ eine ganze Quadratzahl ist, so kann dieser Fall nur für

$$(a+d)^2 = 0 \quad \text{und} \quad (a+d)^2 = 1$$

eintreten. Trifft die erste Relation zu, so ist

$$p = -1;$$

beim Bestehen der zweiten aber ist

$$p = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm\frac{2\pi i}{3}},$$

so dass im ersten Falle die Periode nach *einfacher* Iterirung, im zweiten nach *doppelter* den Ausgangswerth liefert.

Bezeichnet man mit Herrn Klein Perioden, welche sich resp. auf multiplicatorische, additive und rückläufig multiplicatorische reduciren lassen, als *hyperbolische, parabolische und elliptische*, so ist

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad ad - bc = 1$$

a. *hyperbolisch*, wenn

$$(a+d)^2 - 4 > 0,$$

b. *parabolisch*, wenn

$$(a+d)^2 - 4 = 0,$$

c. *elliptisch*, wenn

$$(a+d)^2 - 4 < 0$$

ist.

Als einfachste Beispiele der beiden in der Gruppe vorkommenden Arten von elliptischen Perioden führen wir

$$y = -\frac{1}{x} \quad \text{und} \quad y = -\frac{1}{x \pm 1}$$

an.

Es ist von grossem Interesse, für diese Art von Periodicität eine Gebietseintheilung der Ebene der complexen Zahlen herzustellen; doch sparen wir uns dieselbe für eine eingehendere Darstellung der höheren Transcendenten auf.

9. Nunmehr ist es leicht zu entscheiden, für welche linearen Transformationen, also für welche *Untergruppe* von (20.) oder (21.) die Ausdrücke

$$\chi^8(\tau) = \varkappa^2(\tau)\varkappa_1^2(\tau),\quad \varphi^8(\tau) = \varkappa^2(\tau) \quad\text{und}\quad \psi^8(\tau) = \varkappa_1^2(\tau)$$

ungeändert bleiben. Aus

$$J(\tau) = \frac{[1 - \chi^8(\tau)]^3}{\chi^{16}(\tau)} \tag{26.}$$

folgt, dass zu jedem $J(\tau)$ höchstens drei verschiedene $\chi^8(\tau)$ gehören, da sich $\chi(\tau)$ aus $J(\tau)$ durch Auflösung der Gleichung (26.) berechnet, dass also $\chi^8(\tau)$ für alle Transformationen der Gruppe (21.) höchstens drei verschiedene Werthe annimmt, die wir als

$$\chi^8(\tau),\ \chi_1{}^8(\tau),\ \chi_2{}^8(\tau)$$

unterscheiden wollen. Die drei verschiedenen Werthe sind aber wirklich vorhanden, da nach Obigem

$$\chi^8(\tau + 1) = -\frac{\varphi^8(\tau)}{\psi^{16}(\tau)} = \chi_1{}^8(\tau)$$

und

$$\chi_1{}^8\left(-\frac{1}{\tau}\right) = -\frac{\varphi^8\left(-\frac{1}{\tau}\right)}{\psi^{16}\left(-\frac{1}{\tau}\right)} = \frac{\psi^8(\tau)}{\varphi^{16}(\tau)} = \chi_2{}^8(\tau)$$

ist und man aus den Beziehungen zwischen $\varkappa^2(\tau)$ und $\varkappa_1{}^2(\tau)$ leicht erkennt, dass diese drei Ausdrücke nicht identisch sind. Wir haben die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{lll} \chi^8(\tau+1)=\chi_1{}^8(\tau), & \chi^8(\tau+2)=\chi^8(\tau), & \chi^8\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\chi^8(\tau), \\ \chi_1{}^8(\tau+1)=\chi^8(\tau), & \chi_1{}^8(\tau+2)=\chi_1{}^8(\tau), & \chi_1{}^8\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\chi_2{}^8(\tau), \\ \chi_2{}^8(\tau+1)=\chi_2{}^8(\tau), & \chi_2{}^8(\tau+2)=\chi_2{}^8(\tau), & \chi_2{}^8\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\chi_1{}^8(\tau). \end{array}\right. \tag{27.}$$

Dass $\chi^8(\tau)$ für sämmtliche Combinationen von $\tau' = \tau + 2$ und $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ ungeändert bleibt, wurde bereits oben bemerkt; wir wollen aber auch nachweisen, *dass dies für keine andere lineare Transformation der Fall ist.* Jede lineare Transformation lässt sich nämlich aus $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ und solchen der Form $\tau' = \tau + k$ derart zusammensetzen, dass Transforma-

tionen beider Art abwechselnd auf einander folgen. Denkt man sich nun eine Transformation $\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$, welche $\chi(\tau)$ in sich selbst überführen soll, in dieser Weise zerlegt und die Partialtransformationen nach einander ausgeführt, so kann im Laufe dieses Processes $\chi^8(\tau)$ entweder beständig unverändert bleiben, oder vorübergehend die Werthe $\chi_1{}^8(\tau)$ und $\chi_2{}^8(\tau)$ annehmen. Das Erstere trifft nach Tabelle (27.) nur zu, wenn k immer eine gerade Zahl ist, d. h. wenn die Transformation eben der Gruppe $\tau' = \tau + 2$, $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ angehört. Im anderen Falle wollen wir die Sache etwas eingehender verfolgen. Wir beginnen den Process mit $\tau' = \tau + 1$ (etwa vorhergehende Partialtransformationen gehören jedenfalls der erledigten Gruppe an) und gelangen von $\chi^8(\tau)$ zu $\chi_1{}^8(\tau)$; lassen wir $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ folgen, so kommen wir zu $\chi_2{}^8(\tau)$, bei dem wir auch nach einer weiteren Transformation $\tau' = \tau + k_1$ bleiben, worin k_1 beliebig ganzzahlig ist; dagegen führt uns eine nochmalige Anwendung von $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ zu $\chi_1{}^8(\tau)$ zurück. Jetzt haben wir die Wahl, durch Anwendung von $\tau' = \tau + k_2$ mit ungeradem k_2 zu $\chi^8(\tau)$ zurückzukehren, oder durch dieselbe Substitution mit geradem k_2 bei $\chi_1{}^8(\tau)$ zu bleiben und nun ganz wie oben wieder zu $\chi_2{}^8(\tau)$ zu gelangen u. s. w., bis wir endlich durch ein*) $\tau' = \tau - 1$ den Process abschliessen. Den letzteren complicirteren Fall können wir deshalb ausser Acht lassen, weil er leicht auf eine wiederholte Anwendung des ersteren zurückführbar ist; denn man kann z. B. die Reihe, in der die Transformationen von links nach rechts nacheinander anzuwenden sind,

$$\tau' = \tau + 1,\ \tau' = -\frac{1}{\tau},\ \tau' = \tau + k_1,\ \tau' = -\frac{1}{\tau},\ \tau' = \tau + 2m,$$

$$\tau' = -\frac{1}{\tau},\ \tau' = \tau + k_2,\ \tau' = -\frac{1}{\tau},\ \tau' = \tau - 1,$$

---

*) Es genügt, diese speciellere Transformation an Stelle der allgemeineren $\tau' = \tau + k_\nu$ mit ungeradem k_ν zu verwenden, da wir schliesslich noch eine ebensolche mit geradem k zufügen können, ohne das Resultat zu modificiren.

durch die drei folgenden ersetzen:

$$\tau' = \tau + 1,\ \tau' = -\frac{1}{\tau},\ \tau' = \tau + k_1,\ \tau' = -\frac{1}{\tau},\ \tau' = \tau - 1;$$
$$\tau' = \tau + 2m;$$
$$\tau' = \tau + 1,\ \tau' = -\frac{1}{\tau},\ \tau' = \tau + k_2,\ \tau' = -\frac{1}{\tau},\ \tau' = \tau - 1,$$

wo die erste und dritte Reihe den Charakter des ersten Falls haben, während $\tau' = \tau + 2m$ der Gruppe $\tau' = \tau + 2$, $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ angehört. Wir haben daher nur noch zu zeigen, dass eine Transformation, $\xi_k(\tau)$, die aus

$$\tau' = \tau + 1,\ \tau' = -\frac{1}{\tau},\ \tau' = \tau + k,\ \tau' = -\frac{1}{\tau},\ \tau' = \tau - 1$$

zusammengesetzt ist, ebenfalls in jener Gruppe vorkommt. Zunächst sieht man ein, dass sich $\xi_k(\tau)$, wie wir schon in der Bezeichnung andeuteten, als $\pm k$fache Iterirung von $\xi_{\pm 1}(\tau)$, d. h. von der Reihe

$$\tau' = \tau + 1,\ \tau' = -\frac{1}{\tau},\ \tau' = \tau \pm 1,\ \tau' = -\frac{1}{\tau},\ \tau' = \tau - 1$$

darstellen lässt; denn bei Iterirung von $\xi_{\pm 1}(\tau)$ zerstören sich immer die beiden letzten und die beiden ersten Glieder, die aufeinander folgen, gegenseitig. Nun ist aber

$$\xi_{+1}(\tau) = -\frac{1}{-\frac{1}{\tau+1}+1} - 1 = -\frac{2\tau+1}{\tau} = -\frac{1}{\tau} - 2,$$

$$\xi_{-1}(\tau) = -\frac{1}{-\frac{1}{\tau+1}-1} - 1 = -\frac{1}{\tau+2},$$

so dass $\xi_{+1}(\tau)$ durch Aufeinanderfolge von $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ und $\tau' = \tau - 2$, $\xi_{-1}(\tau)$ durch Aufeinanderfolge von $\tau' = \tau + 2$ und $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ entstanden gedacht werden können.

Das Resultat lautet:

$\chi^8(\tau)$ besitzt die Perioden

$$\tau' = \tau + 2 \quad \text{und} \quad \tau' = -\frac{1}{\tau},$$

während alle nicht zu dieser Gruppe gehörigen linearen Transformationen den Werth der Function ändern.

10. Da

(28.) $\chi^8(\tau) = \varkappa^2(\tau)\varkappa_1^2(\tau) = \varkappa^2(\tau) - \varkappa^4(\tau) = \varphi^8(\tau) - \varphi^{16}(\tau)$

ist, so kann $\varphi^8(\tau)$ nur bei solchen linearen Transformationen ungeändert bleiben, die auch $\chi^8(\tau)$ ungeändert lassen, d. h. bei solchen der Gruppe

(29.) $$\tau' = \tau + 2, \quad \tau' = -\frac{1}{\tau};$$

andererseits ist aus (18.) ersichtlich, dass einem $\chi^8(\tau)$ höchstens zwei verschiedene $\varphi^8(\tau)$ entsprechen, dass also $\varphi^8(\tau)$ für alle Transformationen der letzten Gruppe höchstens zwei Werthe annehmen kann; diese sind

$$\varphi^8(\tau) \quad \text{und} \quad \varphi^8\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \psi^8(\tau).$$

Ausserdem haben wir

$$\varphi^8(\tau + 2) = \varphi^8(\tau),$$
$$\psi^8(\tau + 2) = \psi^8(\tau).$$

Um nun die Gruppe von Perioden zu ermitteln, für welche $\varphi^8(\tau)$ ungeändert bleibt, untersuchen wir wieder die Folge von Elementarperioden, aus denen sich eine hierhergehörige Periode zusammensetzen lässt. Soll bei successiver Anwendung der Transformationen (29.) $\varphi^8(\tau)$ in keinem Stadium des Processes in $\psi^8(\tau)$ übergehen, so darf $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ gar nicht auftreten. Andernfalls führt uns die letztere Transformation von $\varphi^8(\tau)$ zu $\psi^8(\tau)$, während die folgende $\tau' = \tau + 2k$ keinen Einfluss ausübt und dann $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ wieder $\varphi^8(\tau)$ hervorbringt; dieser Process kann sich nach Einschiebung von Transformationen $\tau' = \tau + 2k_1$ beliebig oft wiederholen; die Folge $\xi_k'(x)$:

$$\tau' = -\frac{1}{\tau}, \quad \tau' = \tau + 2k, \quad \tau' = -\frac{1}{\tau}$$

ist aber die $k$fache (positive oder negative) Iterirung von $\xi_1'(x)$

$$\tau' = -\frac{1}{\tau}, \quad \tau' = \tau + 2, \quad \tau' = -\frac{1}{\tau}.$$

Wir berechnen

$$\xi_1'(x) = -\frac{\tau}{2\tau - 1}$$

und erhalten das Resultat:

Die Function $\varphi^8(\tau)$ (*und hiermit auch* $\psi^8(\tau) = 1 - \varphi^8(\tau)$) *besitzt die Perioden*

$$\tau' = \tau + 2, \quad \tau' = -\frac{\tau}{2\tau - 1},$$

während sie für keine anderen linearen Transformationen ungeändert bleibt.

11. Schliesslich wollen wir noch feststellen, welche Perioden $\chi(\tau)$ und $\varphi(\tau)$ selbst zukommen; die sich ergebenden Gruppen lassen sich zwar leicht definiren, sind jedoch nicht auf zwei Transformationen zurückführbar. $\chi(\tau)$ bleibt für $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ ungeändert, wird aber durch $\tau' = \tau + 2$ in $e^{\frac{\pi i}{4}}\chi(\tau)$ umgewandelt. Wir schliessen, *dass* $\chi(\tau)$ *für alle Transformationen der Gruppe*

$$\tau' = \tau + 2, \quad \tau' = -\frac{1}{\tau}$$

ungeändert bleibt, in denen die erste Transformation $8k$*mal auftritt, wobei die Umkehrungen derselben negativ gezählt werden.* Weiter erkennt man, dass $\varphi^8(\tau)$ für $\tau' = -\frac{\tau}{2\tau - 1}$ ungeändert bleibt, während die Transformation $\tau' = \tau + 2$ wie bei $\chi(\tau)$ wirkt; wir ziehen den Schluss, *dass* $\varphi(\tau)$ *für alle Transformationen der Gruppe*

$$\tau' = \tau + 2, \quad \tau' = -\frac{\tau}{2\tau - 1}$$

ungeändert bleibt, bei denen $\tau' = \tau + 2$ $8k$*mal auftritt.*

§ 79.

Die Modulargleichungen.

1. Nachdem wir im vorigen Paragraphen das Verhalten der wichtigsten Modulfunctionen *linearen* Transformationen gegenüber kennen gelernt haben, untersuchen wir jetzt, welche Relationen dieselben bei Transformationen *höheren Grades* aufweisen. Um grössere Complicationen zu vermeiden, beschränken wir uns auf Transformationen zweiten und n^{ten} Grades, wo n eine ungerade Primzahl bedeutet. Die übrigen Fälle lassen sich auf diese beiden zurückführen. Auch wollen wir an dieser Stelle nur die Functionen $\varphi(\tau)$ ausführlicher behandeln, während die umfassenden Betrachtungen, die sich

an die übrigen Modulfunctionen, namentlich $J(\tau)$ anknüpfen, in die Theorie der höheren periodischen Transcendenten verwiesen werden müssen.

2. In § 61, (6.) fanden wir bei etwas andrer Bezeichnung

$$\varkappa\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{2\sqrt{\varkappa(\tau)}}{1+\varkappa(\tau)}$$

oder

$$\varphi^4\left(\frac{\tau}{2}\right) = \pm \frac{2\varphi^2(\tau)}{1+\varphi^4(\tau)}.$$

Um das Vorzeichen zu bestimmen, wählen wir wieder $\tau = i$ und erkennen leicht, dass $\varphi\left(\frac{i}{2}\right)$ dasselbe Zeichen wie $\varphi(i)$ (nämlich das positive) hat, so dass wir

$$\text{(1.)} \qquad \varphi^4\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{2\varphi^2(\tau)}{1+\varphi^4(\tau)}$$

zu nehmen haben. Setzen wir $v = \varphi\left(\frac{\tau}{2}\right)$, $u = \varphi(\tau)$, so folgt

$$\text{(2.)} \qquad v^4(1+u^4) - 2u^2 = 0;$$

diese Gleichung hat für v vier Lösungen, welche mit

$$\text{(3.)} \quad \begin{cases} \varphi\left(\frac{\tau}{2}\right),\ \varphi\left(\frac{\tau}{2}+4\right) = i\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right),\ \varphi\left(\frac{\tau}{2}+8\right) = -\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right), \\ \varphi\left(\frac{\tau}{2}+12\right) = -i\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right) \end{cases}$$

übereinstimmen.

Andererseits entsprechen einem v auch vier u-Werthe, die, wie aus der Form der Gleichung und aus den Formeln (8.) und (11.) von § 78 hervorgeht*), durch

$$\text{(4.)} \quad \begin{cases} \varphi(\tau),\ \varphi(\tau+8) = -\varphi(\tau),\ \varphi\left(-\frac{\tau}{\tau-1}\right) = \frac{1}{\varphi(\tau)}, \\ \varphi\left(-\frac{\tau+8}{\tau+7}\right) = -\frac{1}{\varphi(\tau)} \end{cases}$$

dargestellt sind.

---

*) Es ist ins Besondere

$$\varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \psi(\tau), \quad \varphi\left(-\frac{1}{\tau+1}\right) = \psi(\tau+1) = \frac{1}{\psi(\tau)},$$

$$\varphi\left(-\frac{1}{-\frac{1}{\tau}+1}\right) = \varphi\left(-\frac{\tau}{\tau-1}\right) = \frac{1}{\varphi(\tau)} \quad \text{u. s. w.}$$

3. Bezeichnet n eine ungerade Primzahl, so folgt aus den Gleichungen (23.) und (12.) von § 61 durch Wurzelausziehen

$$\varphi\left(\frac{\tau}{n}\right) = \pm\,\varphi^n(\tau)\,\frac{C\left(p, p^{\frac{1}{n}}\right)C\left(p, p^{\frac{2}{n}}\right)\cdots C\left(p, p^{\frac{n-1}{2n}}\right)}{D\left(p, p^{\frac{1}{n}}\right)D\left(p, p^{\frac{2}{n}}\right)\cdots D\left(p, p^{\frac{n-1}{2n}}\right)}$$

$$= \pm\,\varphi^n(\tau)\,\frac{\cos\operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega'}{n}\right)\cos\operatorname{am}\left(\tau, \frac{2\Omega'}{n}\right)\cdots\cos\operatorname{am}\left(\tau, \frac{n-1}{2n}\Omega'\right)}{\Delta\operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega'}{n}\right)\Delta\operatorname{am}\left(\tau, \frac{2\Omega'}{n}\right)\cdots\Delta\operatorname{am}\left(\tau, \frac{n-1}{2n}\Omega'\right)}$$

und

$$\varphi(n\tau) = \pm\,\varphi^n(\tau)\,\frac{C(p, \alpha)C(p, \alpha^2)\cdots C\left(p, \alpha^{\frac{n-1}{2}}\right)}{D(p, \alpha)D(p, \alpha^2)\cdots D\left(p, \alpha^{\frac{n-1}{2}}\right)}$$

$$= \pm\,\varphi^n(\tau)\,\frac{\cos\operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega}{n}\right)\cos\operatorname{am}\left(\tau, \frac{2\Omega}{n}\right)\cdots\cos\operatorname{am}\left(\tau, \frac{n-1}{2n}\Omega\right)}{\Delta\operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega}{n}\right)\Delta\operatorname{am}\left(\tau, \frac{2\Omega}{n}\right)\cdots\Delta\operatorname{am}\left(\tau, \frac{n-1}{2n}\Omega\right)}.$$

Um die noch unbestimmten Vorzeichen festzustellen, können wir wieder $\tau = i$ setzen. Es wird dann

$$\frac{C\left(e^{-\pi}, e^{-\frac{k\pi}{n}}\right)}{D\left(e^{-\pi}, e^{-\frac{k\pi}{n}}\right)} = \frac{\eta_3(e^{-\pi})}{\eta_2(e^{-\pi})}\,\frac{\eta_2\left(e^{-\pi}, e^{-\frac{k\pi}{n}}\right)}{\eta_3\left(e^{-\pi}, e^{-\frac{k\pi}{n}}\right)}$$

positiv, da in der Productentwicklung dieses Ausdrucks nur positive Factoren auftreten, während $\varphi\left(\frac{i}{n}\right)$ und $\varphi(i)$ positiv sind; in der ersten Formel ist somit das positive Zeichen zu wählen. Lassen wir in der zweiten Formel die positiven Factoren unberücksichtigt, so sehen wir erstens, wenn wir aus den einzelnen $C(p, \alpha^k)$ und $D(p, \alpha^k)$ die entsprechenden Factoren zusammenziehen, dass Producte von dem Typus

$$(1+p\alpha^2)(1+p\alpha^4)\cdots(1+p\alpha^{n-1})\left(1+\frac{p}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{p}{\alpha^4}\right)\cdots\left(1+\frac{p}{\alpha^{n-1}}\right)$$

$$= (1+p\alpha)(1+p\alpha^2)(1+p\alpha^3)\cdots(1+p\alpha^{n-1}) = \frac{1+p^n}{1+p}$$

positiv sind, und zweitens nach § 62, 4, dass das ebenfalls auftretende Product

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)\cdots\left(\alpha^{\frac{n-1}{2}}+\frac{1}{\alpha^{\frac{n-1}{2}}}\right)$$

$$=2^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{2\pi}{n}\cos\frac{4\pi}{n}\cdots\cos\frac{(n-1)\pi}{n}$$

das Zeichen

$$(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$$

besitzt. Wir haben daher

$$(5.)\quad \varphi\left(\frac{\tau}{n}\right)=\varphi^n(\tau)\,\frac{C\left(p,p^{\frac{1}{n}}\right)C\left(p,p^{\frac{2}{n}}\right)\cdots C\left(p,p^{\frac{n-1}{2n}}\right)}{D\left(p,p^{\frac{1}{n}}\right)D\left(p,p^{\frac{2}{n}}\right)\cdots D\left(p,p^{\frac{n-1}{2n}}\right)}$$

$$=\varphi^n(\tau)\,\frac{\cos\operatorname{am}\left(\tau,\frac{\Omega'}{n}\right)\cos\operatorname{am}\left(\tau,\frac{2\Omega'}{n}\right)\cdots\cos\operatorname{am}\left(\tau,\frac{n-1}{2n}\Omega'\right)}{\varDelta\operatorname{am}\left(\tau,\frac{\Omega'}{n}\right)\varDelta\operatorname{am}\left(\tau,\frac{2\Omega'}{n}\right)\cdots\varDelta\operatorname{am}\left(\tau,\frac{n-1}{2n}\Omega'\right)}.$$

und

$$(6.)\quad \varphi(n\tau)=(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\varphi^n(\tau)\,\frac{C(p,\alpha)C(p,\alpha^2)\cdots C\left(p,\alpha^{\frac{n-1}{2}}\right)}{D(p,\alpha)D(p,\alpha^2)\cdots D\left(p,\alpha^{\frac{n-1}{2}}\right)}$$

$$=(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\varphi^n(\tau)$$

$$\cdot\frac{\cos\operatorname{am}\left(\tau,\frac{\Omega}{n}\right)\cos\operatorname{am}\left(\tau,\frac{2\Omega}{n}\right)\cdots\cos\operatorname{am}\left(\tau,\frac{n-1}{2n}\Omega\right)}{\varDelta\operatorname{am}\left(\tau,\frac{\Omega}{n}\right)\varDelta\operatorname{am}\left(\tau,\frac{2\Omega}{n}\right)\cdots\varDelta\operatorname{am}\left(\tau,\frac{n-1}{2n}\Omega\right)}.$$

Setzen wir in (5.) $\tau+16k$ an Stelle von τ, so bleibt (§ 78, (9.)) $\varphi(\tau)$ und ebenso p und selbst $p^{\frac{1}{4}}$, ferner auch $\Omega=2\pi\vartheta_3{}^2(\tau)$ ungeändert, während $p^{\frac{1}{n}}e^{\frac{16k\pi}{n}}$ an Stelle von $p^{\frac{1}{n}}$, $\Omega'+16k\Omega$ an Stelle von Ω' tritt, und wir erhalten

$$(7.)\quad \varphi\left(\frac{\tau+16k}{n}\right)=\varphi^n(\tau)$$

$$\cdot\frac{\cos\operatorname{am}\left(\tau,\frac{\Omega'+8k\Omega}{n}\right)\cos\operatorname{am}\left(\tau,2\frac{\Omega'+8k\Omega}{n}\right)\cdots\cos\operatorname{am}\left(\tau,\frac{n-1}{2}\frac{\Omega'+8k\Omega}{n}\right)}{\varDelta\operatorname{am}\left(\tau,\frac{\Omega'+8k\Omega}{n}\right)\varDelta\operatorname{am}\left(\tau,2\frac{\Omega'+8k\Omega}{n}\right)\cdots\varDelta\operatorname{am}\left(\tau,\frac{n-1}{2}\frac{\Omega'+8k\Omega}{n}\right)}.$$

4. Aus den Formeln (2.), (3.), (5.) und (6.) von § 62 erkennt man ohne Schwierigkeit, dass sich

$$\frac{C(p, x^n)}{D(p, x^n)}$$

für beliebige n *rational* durch

$$\frac{C(p, x)}{D(p, x)}$$

ausdrücken lässt; man muss zu diesem Zwecke nur beachten, dass

$$S^2(p, x) = \frac{1 - \frac{C^2(p, x)}{D^2(p, x)}}{1 - \varkappa^2 \frac{C^2(p, x)}{D^2(p, x)}}$$

ist. Ausserdem tritt, wie bei einer successiven Entwicklung mit Hülfe der Multiplicationstheoreme ohne Weiteres einleuchtet, $\varkappa^2(\tau) = \varphi^8(\tau)$ *rational* in dem Ausdrucke für $\frac{C(p, x^n)}{D(p, x^n)}$ auf.

Übertragen wir diese Formeln auf die betreffenden elliptischen Functionen, so erkennen wir, dass die einzelnen Factoren der Brüche auf der rechten Seite von (5.), (6.) und (7.) sich durch den ersten Factor $\left(\text{nämlich } \frac{\cos \operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega'}{n}\right)}{\varDelta \operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega'}{n}\right)} \text{ u. s. w.}\right)$ und $\varphi^8(\tau)$ *rational* ausdrücken lassen, so dass wir erhalten

$$(8.)\quad \varphi\left(\frac{\tau + 16k}{n}\right) = \varphi^n(\tau) f\left[\varphi^8(\tau), \frac{\cos \operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega' + 8k\Omega}{n}\right)}{\varDelta \operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega' + 8k\Omega}{n}\right)}\right],$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots n - 1;$$

$$(9.)\quad \varphi(n\tau) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \varphi^n(\tau) f\left[\varphi^8(\tau), \frac{\cos \operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega}{n}\right)}{\varDelta \operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega}{n}\right)}\right],$$

worin f eine rationale (und zwar jedesmal dieselbe) Function ihrer beiden Argumente bezeichnet.

Aus der Form von (7.) geht hervor, dass $\varphi\left(\frac{\tau + 16k}{n}\right)$ ungeändert bleibt, wenn in dem Argumente der Grössen cos am

und Δ am der Werth $m \frac{\Omega' + 8k\Omega}{n}$, $m = 1, 2, 3, \cdots \frac{n-1}{2}$, an Stelle von $\frac{\Omega' + 8k\Omega}{n}$ tritt. Denn zunächst ist aus den Elementen der Zahlentheorie bekannt, dass die Grössen

$$1m,\ 2m,\ 3m,\ \cdots\ (n-1)m$$

für den Modul n die gleichen Reste wie

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ n-1$$

liefern, da m zu der grösseren Primzahl n relativ prim ist. Beachtet man ferner, dass

$$\cos\mathrm{am}\left[(n-l)m\,\frac{\Omega' + 8k\Omega}{n}\right]$$

$$= \cos\mathrm{am}\left[m(\Omega' + 8k\Omega) - lm\,\frac{\Omega' + 8k\Omega}{n}\right]$$

$$= \pm \cos\mathrm{am}\left(lm\,\frac{\Omega' + 8k\Omega}{n}\right)$$

ist und dass das Gleiche für Δ am gilt, derart, dass für entsprechende cos am und Δ am das *gleiche* Zeichen eintritt, so leuchtet die Richtigkeit des Behaupteten ein. Wir haben daher

$$(10.)\quad \varphi\left(\frac{\tau + 16k}{n}\right) = \varphi^n(\tau) f\left[\varphi^8(\tau), \frac{\cos\mathrm{am}\left(\tau, \frac{\Omega' + 8k\Omega}{n}\right)}{\Delta\mathrm{am}\left(\tau, \frac{\Omega' + 8k\Omega}{n}\right)}\right]$$

$$= \varphi^n(\tau) f\left[(\varphi^8\tau), \frac{\cos\mathrm{am}\left(\tau, 2\,\frac{\Omega' + 8k\Omega}{n}\right)}{\Delta\mathrm{am}\left(\tau, 2\,\frac{\Omega' + 8k\Omega}{n}\right)}\right]$$

$$= \cdots$$

$$= \varphi^n(\tau) f\left[\varphi^8(\tau), \frac{\cos\mathrm{am}\left(\tau, \frac{n-1}{2}\,\frac{\Omega' + 8k\Omega}{n}\right)}{\Delta\mathrm{am}\left(\tau, \frac{n-1}{2}\,\frac{\Omega' + 8k\Omega}{n}\right)}\right]$$

und in gleicher Weise

$$(11.)\quad (-1)\varphi^{\frac{n^2-1}{8}}(n\tau) = \varphi^n(\tau) f\left[\varphi^8(\tau), \frac{\cos\mathrm{am}\left(\tau, \frac{\Omega}{n}\right)}{\Delta\mathrm{am}\left(\tau, \frac{\Omega}{n}\right)}\right]$$

$$= \varphi^n(\tau) f\left[\varphi^8(\tau), \frac{\cos\mathrm{am}\left(\tau, \frac{2\Omega}{n}\right)}{\Delta\mathrm{am}\left(\tau, \frac{2\Omega}{n}\right)}\right]$$

$$= \cdots$$

$$= \varphi^n(\tau) f\left[\varphi^8(\tau), \frac{\cos\operatorname{am}\left(\tau, \frac{n-1}{2}\frac{\Omega}{n}\right)}{\Delta\operatorname{am}\left(\tau, \frac{n-1}{2}\frac{\Omega}{n}\right)}\right].$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$(12.)\quad \varphi^r\left(\frac{\tau+16k}{n}\right)$$

$$= \frac{2}{n-1}\varphi^{nr}(\tau)\sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}^m f^r\left[\varphi^8(\tau), \frac{\cos\operatorname{am}\left(\tau, m\frac{\Omega'+8k\Omega}{n}\right)}{\Delta\operatorname{am}\left(\tau, m\frac{\Omega'+8k\Omega}{n}\right)}\right],$$

$$(13.)\quad (-1)^{\frac{n^2-1}{8}r}\varphi^r(n\tau)$$

$$= \frac{2}{n-1}\varphi^{nr}(\tau)\sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}^m f^r\left[\varphi^8(\tau), \frac{\cos\operatorname{am}\left(\tau, \frac{m\Omega}{n}\right)}{\Delta\operatorname{am}\left(\tau, \frac{m\Omega}{n}\right)}\right].$$

Beachtet man nun weiter, dass der Ausdruck

$$\frac{\cos\operatorname{am}\left(\tau, \frac{2\mu\Omega'+\nu\Omega}{n}\right)}{\Delta\operatorname{am}\left(\tau, \frac{2\mu\Omega'+\nu\Omega}{n}\right)},$$

wenn man ν die Werthe $0, 1, 2, \cdots \frac{n-1}{2}$, μ dagegen im Allgemeinen $0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm \frac{n-1}{2}$, wenn jedoch $\nu = 0$ ist, nur $1, 2, 3, \cdots \frac{n-1}{2}$ durchlaufen lässt, dieselben Werthe wie

$$\frac{\cos\operatorname{am}\left(\tau, m\frac{\Omega'+8k\Omega}{n}\right)}{\Delta\operatorname{am}\left(\tau, m\frac{\Omega'+8k\Omega}{n}\right)} \quad \text{und} \quad \frac{\cos\operatorname{am}\left(\tau, \frac{m\Omega}{n}\right)}{\Delta\operatorname{am}\left(\tau, \frac{m\Omega}{n}\right)}$$

zusammen annimmt, wenn m und k die Werthe $1, 2, 3, \cdots \frac{n-1}{2}$ durchlaufen, so ist sofort ersichtlich, *dass*

$$(14.)\quad \varphi^r\left(\frac{\tau}{n}\right) + \varphi^r\left(\frac{\tau+16}{n}\right) + \varphi^r\left(\frac{\tau+2\cdot 16}{n}\right) + \cdots$$

$$+ \varphi^r\left(\frac{\tau+\frac{n-1}{2}\cdot 16}{2}\right) + (-1)^{\frac{n^2-1}{2}r}\varphi^r(n\tau)$$

$$= \frac{2}{n-1}\varphi^{nr}(\tau)\sum_{\mu,\nu} f^r\left[\varphi^8(\tau), \frac{\cos\operatorname{am}\left(\tau, \frac{2\mu\Omega'+\nu\Omega}{n}\right)}{\varDelta\operatorname{am}\left(\tau, \frac{2\mu\Omega'+\nu\Omega}{n}\right)}\right],$$

also eine symmetrische, rationale Function der $\frac{n^2-1}{2}$ *Grössen*

$$\frac{\cos\operatorname{am}\left(\tau, \frac{2\mu\Omega'+\nu\Omega}{n}\right)}{\varDelta\operatorname{am}\left(\tau, \frac{2\mu\Omega'+\nu\Omega}{n}\right)}$$

ist.

5. Hülfssatz: *Jede rationale, symmetrische Function der* $\frac{n^2-1}{2}$ *Grössen*

$$\frac{\cos\operatorname{am}\left(\tau, \frac{2\mu\Omega'+\nu\Omega}{n}\right)}{\varDelta\operatorname{am}\left(\tau, \frac{2\mu\Omega'+\nu\Omega}{n}\right)}$$

ist rational ausdrückbar durch $\varkappa^2(\tau) = \varphi^8(\tau)$.

Beweis: Bedenkt man, dass nach § 57, (4.)

$$S(p, ix) = \frac{C(p, x)}{D(p, x)}$$

ist, so erhält man aus § 62, (4.)

$$S(p, i^n x^n) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} S(p, ix^n)$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{C(p, x^n)}{D(p, x^n)} = n\frac{C(p, x)}{D(p, x)}\prod_{m,k}\frac{1 - \dfrac{C^2(p, x)}{D^2(p, x)\, S^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)}}{1 - \dfrac{\varkappa^2 C^2(p, x)}{D^2(p, x)\, S^2\left(p, \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)}},$$

eine Gleichung, die nach Wegmultipliciren des Nenners bis zum $n^{2\text{ten}}$ Grade in $\frac{C(p, x)}{D(p, x)}$ ansteigt und deren Coefficienten in $\varkappa^2$ rational werden, wie aus der successiven Entwicklung mittelst der Multiplicationstheoreme hervorgeht.

$\frac{C(p, x^n)}{D(p, x^n)}$ wird dann und nur dann nach den Formeln (17.), (18.), (19.) und (20.) von § 56 der Einheit gleich, wenn, von einem Factor p^{2r} abgesehen,

$$x = \alpha^\nu p^{\frac{2\mu}{n}}$$

ist, worin ν und μ die Werthe

$$0, 1, 2, \cdots n-1$$

durchlaufen. Die Gleichung $n^{2\text{ten}}$ Grades

$$(15.)\qquad (-1)^{\frac{n-1}{2}} = n\mathrm{X}\prod_{m,k} \frac{1-\dfrac{\mathrm{X}^2}{S^2\left(p,\ \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)}}{1-\varkappa^2\dfrac{\mathrm{X}^2}{S^2\left(p,\ \alpha^k p^{\frac{m}{n}}\right)}}.$$

hat daher gerade die n^2 Lösungen

$$\mathrm{X} = \frac{C\left(p,\ \alpha^\nu p^{\frac{2\mu}{n}}\right)}{D\left(p,\ \alpha^\nu p^{\frac{2\mu}{n}}\right)}.$$

Für $\nu = 0$, $\mu = 0$ haben wir ins Besondere

$$\mathrm{X}_1 = \frac{C(p, 1)}{D(p, 1)} = 1,$$

so dass (15.) durch $\mathrm{X} - 1$ dividirbar ist. Die übrig bleibende Gleichung vom $(n^2 - 1)^{\text{ten}}$ Grade lässt sich aber weiter in zwei gleiche Factoren zerfällen, da jede Wurzel doppelt vorkommt; denn nach den oben citirten Formeln von § 56 ist

$$\frac{C\left(p,\ \alpha^\nu p^{\frac{2\mu}{n}}\right)}{D\left(p,\ \alpha^\nu p^{\frac{2\mu}{n}}\right)} = \frac{C\left(p,\ \alpha^{-\nu} p^{-\frac{2\mu}{n}}\right)}{D\left(p,\ \alpha^{-\nu} p^{-\frac{2\mu}{n}}\right)} = \frac{C\left(p,\ \alpha^{n-\nu} p^{2-\frac{2\mu}{n}}\right)}{D\left(p,\ \alpha^{n-\nu} p^{2-\frac{2\mu}{n}}\right)}.$$

Wir leiten daher aus (15.) eine Gleichung

$$(16.)\qquad F(\mathrm{X}) = 0$$

her, welche gleichfalls noch in $\varkappa^2$ rational ist und welche die $\frac{n^2-1}{2}$ Lösungen

$$\frac{C\left(p,\ \alpha^\nu p^{\frac{2\mu}{n}}\right)}{D\left(p,\ \alpha^\nu p^{\frac{2\mu}{n}}\right)} = \frac{\cos\operatorname{am}\left(\tau,\ \dfrac{2\mu\Omega' + \nu\Omega}{n}\right)}{\Delta\operatorname{am}\left(\tau,\ \dfrac{2\mu\Omega' + \nu\Omega}{n}\right)}$$

besitzt, worin μ und ν die früher (z. B. bei Formel (14.)) benutzten Combinationen repräsentiren. Alle rationalen, symmetrischen Functionen der letzteren Grössen sind daher durch die Coefficienten von (16.), also auch durch $\varkappa^2(\tau) = \varphi^8(\tau)$ rational ausdrückbar.

6. Aus (14.) folgt mit Benutzung dieses Hülfssatzes unmittelbar, dass

$$(17.)\quad \varphi^r\left(\frac{\tau}{n}\right) + \varphi^r\left(\frac{\tau + 16}{n}\right) + \varphi^r\left(\frac{\tau + 2\cdot 16}{n}\right) + \cdots$$
$$+ \varphi^r\left(\frac{\tau + (n-1)\cdot 16}{n}\right) + (-1)^{\frac{n^2-1}{8}r}\varphi^r(n\tau)$$
$$= \varphi^{nr}(\tau)\,\Phi[\varphi^8(\tau)]$$

ist, worin Φ eine *rationale* Function bezeichnet.

Nach den Sätzen über die Potenzsummen in § 13, 2 ergiebt sich hieraus weiter, dass sämmtliche symmetrische Functionen der $(n+1)$ Grössen

$$(18.)\quad \varphi\left(\frac{\tau}{n}\right), \varphi\left(\frac{\tau + 16}{n}\right), \varphi\left(\frac{\tau + 2\cdot 16}{n}\right), \cdots$$
$$\varphi\left(\frac{\tau + (n-1)\cdot 16}{n}\right), (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\varphi(n\tau)$$

sich rational durch $\varphi(\tau)$ ausdrücken lassen, und zwar ist aus der Herleitungsweise dieser symmetrischen Functionen aus den Potenzreihen ersichtlich, dass eine homogene symmetrische Function r^{ten} Grades den Factor $\varphi^{nr}(\tau)$ aufweist, im Übrigen aber in $\varphi^8(\tau)$ rational ist.

Hieraus fliesst der fundamentale Satz:

Die $(n+1)$ *Grössen* (18.) *sind die Lösungen einer Gleichung* $(n+1)^{\text{ten}}$ *Grades, deren Coefficienten rational durch* $\varphi(\tau)$ *ausdrückbar sind.*

Diese Gleichung führt, wie auch die später einzuführenden analog gebildeten, den Namen *Modulargleichung.*

7. Aus (17.) ist ersichtlich, dass auch die Potenzsummen der zweiten, vierten und achten Potenzen der Grössen (18.) resp. durch $\varphi^2(\tau)$, $\varphi^4(\tau)$, $\varphi^8(\tau)$ rational ausdrückbar sind, *so dass auch diese zweiten, vierten und achten Potenzen der Grössen* (18.) *Gleichungen* $(n+1)^{\text{ten}}$ *Grades genügen, deren Coefficienten rationale Functionen von resp.* $\varphi^2(\tau)$, $\varphi^4(\tau)$, $\varphi^8(\tau)$ *sind.*

8. Auch wenn n keine Primzahl ist, sind Modulargleichungen vorhanden, die sich aus den eben als möglich nachgewiesenen leicht durch Elimination herleiten lassen; da dieselben jedoch keine hervorragende Bedeutung besitzen, glauben wir ihre Theorie übergehen zu können.

9. Um zu zeigen, dass die Modulargleichung für die

Grössen (18.) *irreductibel* ist, beweisen wir, dass jede Gleichung, welche *eine* dieser Grössen zur Wurzel hat und deren Coefficienten in $\varphi(\tau)$ rational sind, die *sämmtlichen* Grössen (18.) als Lösungen besitzt. Dies ist wiederum dargethan, wenn wir den Nachweis erbringen, dass diese *sämmtlichen* Grössen aus *einer* derselben, z. B. $\varphi\left(\frac{\tau}{n}\right)$, durch lineare Transformationen hergeleitet werden können, welche $\varphi(\tau)$, also die Coefficienten der Gleichung ungeändert lassen (s. hierüber § 78, 11).

Setzen wir $\tau' = \tau + 16k$ satt τ, wodurch $\varphi(\tau)$ nicht geändert wird, so gehen aus $\varphi\left(\frac{\tau}{n}\right)$ die Grössen

$$\varphi\left(\frac{\tau + 16}{n}\right), \varphi\left(\frac{\tau + 2\cdot 16}{n}\right), \cdots \varphi\left(\frac{\tau + (n-1)\cdot 16}{n}\right)$$

hervor, so dass nur noch $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\varphi(n\tau)$ durch eine passende Transformation herzuleiten ist. Substituiren wir in $\varphi\left(\frac{\tau + 16m}{n}\right)$, worin wir uns die geeignete Wahl von m noch vorbehalten, $-\frac{\tau}{2\tau - 1}$ statt τ, wodurch wieder $\varphi(\tau)$ keine Änderung erleidet, so wird daraus

$$\varphi\left[\frac{(32m-1)\tau - 16m}{2n\tau - n}\right].$$

Nun ist es immer möglich, m so zu bestimmen, dass

$$32m - 1 = kn$$

wird, worin k eine *ungerade* Zahl bezeichnet; wir haben eben nur die Congruenz

$$32m \equiv 1 \pmod{n}$$

aufzulösen. Da hiernach $kn + 1$ durch 32 theilbar ist, so muss, wenn $n = 4r + 1$ ist, $k = 4s + 3$ sein, wenn aber $n = 4r + 3$ ist, $k = 4s + 1$ sein, wie sich durch Ausführung der anderen Combinationen leicht ergiebt. Machen wir die erste Annahme, so ist

$$\varphi\left[\frac{(32m-1)\tau - 16m}{2n\tau - n}\right] = \varphi\left[\frac{kn\tau - \frac{kn+1}{2}}{2n\tau - n}\right]$$

$$= \varphi\left[\frac{1}{2}\,\frac{2kn\tau - kn - 1}{2n\tau - n}\right] = \varphi\left[\frac{k}{2} - \frac{1}{4n\tau - 2n}\right]$$

$$= \varphi\left[2(s+1) - \frac{1}{2} - \frac{1}{4n\tau - 2n}\right] = e^{\frac{(s+1)\pi i}{4}} \varphi\left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{4n\tau - 2n}\right]$$

$$= e^{\frac{(s+1)\pi i}{4}} \varphi\left[-\frac{2n\tau - n + 1}{4n\tau - 2n}\right]$$

oder mit Berücksichtigung, dass

$$\varphi\left(-\frac{\tau}{-2\tau - 1}\right) = \varphi(\tau)$$

ist,

$$\varphi\left[\frac{(32m - 1)\tau - 16m}{2n\tau - n}\right] = e^{\frac{(s+1)\pi i}{4}} \varphi\left[\frac{2n\tau - n + 1}{2}\right]$$

$$= e^{\frac{(s+1)\pi i}{4}} \varphi\left[n\tau - \frac{n-1}{2}\right] = e^{\frac{(s+1)\pi i}{4}} e^{\frac{-(n-1)\pi i}{16}} \varphi(n\tau)$$

$$= e^{\frac{(s+1-r)\pi i}{4}} \varphi(n\tau).$$

Ist $n = 4r + 3$, $k = 4s + 1$, so folgt

$$\varphi\left[\frac{(32m - 1)\tau - 16m}{2n\tau - n}\right] = \varphi\left[\frac{k}{2} - \frac{1}{4n\tau - 2n}\right]$$

$$= \varphi\left[2s + \frac{1}{2} - \frac{1}{4n\tau - 2n}\right] = e^{\frac{s\pi i}{4}} \varphi\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4n\tau - 2n}\right]$$

$$= e^{\frac{s\pi i}{4}} \varphi\left[\frac{2n\tau - n - 1}{4n\tau - 2n}\right]$$

oder, weil

$$\varphi\left(-\frac{\tau}{2\tau - 1}\right) = \varphi(\tau)$$

ist,

$$\varphi\left[\frac{(32m - 1)\tau - 16m}{2n\tau - n}\right] = e^{\frac{s\pi i}{4}} \varphi\left[\frac{2n\tau - n - 1}{2}\right]$$

$$= e^{\frac{s\pi i}{4}} e^{\frac{-(n+1)\pi i}{16}} \varphi(n\tau) = e^{\frac{(s-r-1)\pi i}{4}} \varphi(n\tau).$$

Untersuchen wir nun die vorkommenden Potenzen von e genauer! Im ersten Falle ist

$$kn + 1 = (4r + 1)(4s + 3) + 1 = 16r(s + 1) + 4(s + 1 - r)$$

durch 32, also

$$4r(s + 1) + s + 1 - r$$

durch 8 theilbar, woraus wir weiter schliessen, dass $s + 1 - r$ den Factor 4 enthalten muss, so dass $s + 1$ und r entweder beide gerade oder ungerade sind. Machen wir die erste An-

nahme, setzen also $n = 8\varrho + 1$, so ist $4r(s+1)$ durch 8, also auch $s + 1 - r$ durch 8 theilbar, somit

$$e^{\frac{(s+1-r)\pi i}{4}} = 1.$$

Sind dagegen r und $s+1$ ungerade, haben wir also $n = 8\varrho + 5$, so ist $4r(s+1)$ nicht durch 8, somit auch $s + 1 - r$ nicht durch 8 theilbar, so dass

$$e^{\frac{(s+1-r)\pi i}{4}} = -1$$

wird. — Im zweiten Falle muss

$$4s(r+1) + r + 1 - s$$

durch 8 und $r + 1 - s$ wieder durch 4 theilbar sein, so dass $r+1$ und s gleichzeitig gerade oder ungerade sind. Sind sie gerade, ist also $n = 8\varrho + 7$, so ist $4s(r+1)$, also auch $r + 1 - s$ durch 8 theilbar und

$$e^{\frac{(s-r-1)\pi i}{4}} = 1;$$

sind sie ungerade, also $n = 8\varrho + 3$, so ist $4s(r+1)$ und $r + 1 - s$ nicht durch 8 theilbar und

$$e^{\frac{(s-r-1)\pi i}{4}} = -1.$$

Diese vier Fälle lassen sich leicht zusammenfassen, wenn man bedenkt, dass

$$(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$$

gleich $+1$ oder gleich -1 wird, je nachdem einerseits $n = 8\varrho + 1$ oder $8\varrho + 7$, oder andrerseits $n = 8\varrho + 3$ oder $n = 8\varrho + 5$ ist; wir haben

$$\varphi\left[\frac{(32n-1)\tau - 16m}{2n\tau - n}\right] = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \varphi(n\tau).$$

Hiermit ist erwiesen, dass $\varphi\left(\frac{\tau}{n}\right)$ *durch Transformationen, die* $\varphi(\tau)$ *ungeändert lassen, in die übrigen Grössen* (18.) *übergeführt werden kann; die Irreductibilität der Modulargleichung ist also dargethan.*

10. Ehe wir zur wirklichen Aufstellung der Modulargleichungen übergehen, ist es von wesentlichem Vortheile, einige allgemeine Eigenschaften derselben kennen zu lernen.

Wir setzen in der Folge $u = \varphi(\tau)$ und schreiben für die Modulargleichung

(19.) $$F(v, u) = 0,$$

so dass v die $(n+1)$ Werthe

$$v_k = \varphi\left(\frac{\tau + k\cdot 16}{n}\right),\ v_\infty = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \varphi(n\tau)$$

erhält.

Bedenkt man, dass eine Lösung von (19.)

$$v_\infty = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \varphi(n\tau)$$

ist, während andererseits auch $v_1 = \varphi\left(\frac{\tau}{n}\right)$ zu den Lösungen gehört, so ist ersichtlich, dass sich

$$(-1)^{\frac{n^2-1}{8}} u = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \varphi(\tau)$$

durch dieselbe Gleichung aus $v_1 = \varphi\left(\frac{\tau}{n}\right)$ muss berechnen lassen, durch die v_∞ aus u hergeleitet wird. Unter Berücksichtigung der Irreductibilität der Modulargleichung folgt hieraus, *dass letztere ungeändert bleiben muss, wenn man u durch v, v durch $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}} u$ ersetzt.*

11. Es ist

$$\varphi\left(\frac{\tau}{\tau+1}\right) = \varphi\left(1 - \frac{1}{\tau+1}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}} \frac{\varphi\left(-\frac{1}{\tau+1}\right)}{\psi\left(-\frac{1}{\tau+1}\right)}$$

$$= e^{\frac{\pi i}{8}} \frac{\psi(\tau+1)}{\varphi(\tau+1)} = \frac{1}{\varphi(\tau)}$$

und andrerseits

$$\varphi\left(\frac{n\tau}{\tau+1}\right) = \varphi\left(n - \frac{n}{\tau+1}\right) = e^{\frac{n\pi i}{8}} \frac{\varphi\left(-\frac{n}{\tau+1}\right)}{\psi\left(-\frac{n}{\tau+1}\right)}$$

$$= e^{\frac{n\pi i}{8}} \frac{\psi\left(\frac{\tau+1}{n}\right)}{\varphi\left(\frac{\tau+1}{n}\right)}$$

oder, wenn wir k und m so bestimmen, dass

$1 + kn = 16m$, also $\frac{\tau+1}{n} = \frac{\tau + 16m - kn}{n} = \frac{\tau + 16m}{n} - k$ wird,

$$\varphi\left(\frac{n\tau}{\tau+1}\right) = e^{\frac{n\pi i}{8}} e^{\frac{k\pi i}{8}} \frac{1}{\varphi\left(\frac{\tau+16m}{n}\right)}$$
$$= e^{\frac{(n+k)\pi i}{8}} \frac{1}{\varphi\left(\frac{\tau+16m}{n}\right)}.$$

Setzen wir $n = 8r + \alpha$, $k = 8s + \beta$, wo α und β je eine der Zahlen 1, 3, 5, 7 bezeichnen, so folgt daraus, dass

$$kn + 1 = (8r + \alpha)(8s + \beta) + 1$$
$$= 64rs + 8r\beta + 8s\alpha + \alpha\beta + 1$$

durch 16 theilbar ist, dass $\alpha\beta + 1$ durch 8 theilbar sein muss, d. h. dass, wenn $\alpha = 1, 3, 5, 7$ ist, $\beta = 7, 5, 3, 1$ sein muss. Da ferner

$$8r\beta + 8s\alpha + \alpha\beta + 1$$

durch 16 theilbar ist, so finden wir für die Fälle $\alpha = 3, 5$, $\beta = 5, 3$, wo $\alpha\beta + 1 = 16$ wird, dass $r\beta$ und $s\alpha$, also auch r und s gleichzeitig gerade oder ungerade sein müssen, während für $\alpha = 1, 7$, $\beta = 7, 1$, wo $\alpha\beta + 1 = 8$ ist, $r\beta$ und $s\alpha$, also auch r und s verschiedene Zeichen haben. Im ersten Falle ist

$$n + k = 8r + 8s + 8$$

durch 8, aber nicht durch 16, im zweiten jedoch durch 16 theilbar, d. h. es ist wieder

$$e^{\frac{(n+k)\pi i}{8}} = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}},$$

also

$$(-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \varphi\left(\frac{n\tau}{\tau+1}\right) = \frac{1}{\varphi\left(\frac{\tau+16m}{n}\right)}.$$

Vertauscht man daher in der Modulargleichung τ mit $\frac{\tau}{\tau+1}$, d. h. $\varphi(\tau)$ mit $\frac{\tau}{\varphi(\tau)}$ oder u mit $\frac{1}{u}$ und gleichzeitig v mit $\frac{1}{v}$, so hat die neue Gleichung mit der ursprünglichen eine Lösung gemeinsam, ist also wegen der Irreductibilität mit ihr identisch.

Die Modulargleichung bleibt ungeändert, wenn man u mit $\frac{1}{u}$ und gleichzeitig v mit $\frac{1}{v}$ vertauscht.

12. Setzt man $-\frac{1}{\tau}$ an Stelle von τ, so ist

$$\varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \psi(\tau),$$
$$\varphi\left(-\frac{1}{n\tau}\right) = \psi(n\tau),$$

und man sieht genau wie soeben, *dass für $\psi(\tau)$ dieselbe Modulargleichung besteht wie für $\varphi(\tau)$.*

13. Denken wir uns das höchste Glied der Modulargleichung von jedem Coefficienten befreit, so stellt das letzte, von v freie Glied die Grösse

$$(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\varphi\left(\frac{\tau}{n}\right)\varphi\left(\frac{\tau+16}{n}\right)\varphi\left(\frac{\tau+2\cdot 16}{n}\right)\cdots\varphi\left(\frac{\tau+(n-1)\cdot 16}{n}\right)\varphi(n\tau)$$

oder nach (6.) und (7.) das Product (vgl. auch (14.))

$$\varphi^{n(n+1)}(\tau)\prod_{\mu,\nu}\frac{\cos\operatorname{am}\left(\tau,\ \frac{2\mu\Omega'+\nu\Omega}{n}\right)}{\Delta\operatorname{am}\left(\tau,\ \frac{2\mu\Omega'+\nu\Omega}{n}\right)}$$

dar; nach § 62, (13.) erhalten wir aber für das Product Π den Werth

$$(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{1}{\varkappa(\tau)}\right)^{\frac{n^2-1}{4}} = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{1}{\varphi(\tau)}\right)^{n^2-1}$$

und somit für das letzte Glied

$$(20.)\qquad (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\varphi(\tau)^{n+1} = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}u^{n+1}.$$

Denken wir uns nun die Nenner der Coefficienten der Modulargleichung wegmultiplicirt, so dass deren linke Seite eine ganze Function in v und u darstellt, so muss sie nach dem eben Gefundenen die Form

$$C_0v^{n+1} + C_1v^n + C_2v^{n-1} + \cdots + C_nv + (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}C_0u^{n+1} = 0$$

annehmen, worin die C_k *ganze* Functionen von u sind. Da aber eine gleichzeitige Vertauschung von u mit v und v mit $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}u$ die Modulargleichung nicht ändert, so wird C_0 eine von u unabhängige Constante sein müssen, so dass wir zu schreiben berechtigt sind:

$$(21.)\quad v^{n+1} + C_1v^n + C_2v^{n+1} + \cdots + C_nv + (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}u^{n+1} = 0.$$

14. Aus den Untersuchungen der Nummer 6 dieses Paragraphen geht hervor, dass

$$C_k = u^{nk} f_k(u^8)$$

ist, worin f_k eine *rationale* Function von u^8 ist, die aber, weil die C_k in (21.) *ganze* Functionen sind, nur eine Potenz von u^8 zum Nenner haben kann. Die Modulargleichung nimmt somit die Gestalt an

$$(22.)\quad \begin{aligned} & v^{n+1} + v^n u^{m_1}(a_0 + a_1 u^8 + a_2 u^{16} + \cdots) \\ & + v^{n-1} u^{m_2}(b_0 + b_1 u^8 + b_2 u^{16} + \cdots) \\ & + \cdots \\ & + v u^{m_n}(n_0 + n_1 u^8 + n_2 u^{16} + \cdots) + (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} u^{n+1} = 0, \end{aligned}$$

worin

$$m_k \equiv nk \pmod{8}$$

ist. Hierbei ist noch zu beachten, dass die Coefficienten der Gleichung wegen der (unvollkommenen) Symmetrie in u und v ausser dem letzten den Grad n nicht übersteigen können.

15. Nachdem wir so die Coefficienten der Modulargleichungen wesentlichen Beschränkungen unterworfen haben, bietet die Berechnung der noch unbestimmt gebliebenen Constanten in jedem einzelnen Falle keine Schwierigkeit dar. Der Ausdruck

$$\begin{aligned} u = \varphi(\tau) &= \sqrt{2}\, p^{\frac{1}{8}} \frac{(1+p^2)(1+p^4)(1+p^6)\cdots}{(1+p)(1+p^3)(1+p^5)\cdots} \\ &= \sqrt{2}\, p^{\frac{1}{8}} [(1+p^2)(1+p^4)(1+p^6)\cdots]^2 (1-p)(1-p^3)(1-p^5)\cdots \end{aligned}$$

lässt sich nämlich durch mechanisches Ausmultipliciren der unendlichen Producte, von dem Factor $p^{\frac{1}{8}}$ abgesehen, in eine nach Potenzen von p fortschreitende Reihe entwickeln, deren allgemeines Bildungsgesetz freilich auf diese Art nicht klargestellt wird; wir erhalten

$$(23.)\quad u = \varphi(\tau) = \sqrt{2}\, p^{\frac{1}{8}}(1 - p + 2p^2 - 3p^3 + 4p^4 - 6p^5 + 9p^6 \cdots).$$

Multipliciren wir diesen Ausdruck wiederholt mit sich selbst, so finden wir auch die Potenzen von (23.) bis auf beliebig viele Glieder. Für v können wir $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \varphi(n\tau)$ nehmen und haben dann

(24.) $v = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \sqrt{2}\, p^{\frac{n}{8}} (1 - p^n + 2p^{2n} - 3p^{3n} + 4p^{4n} - \cdots),$
sowie entsprechende Reihen für die Potenzen von v. Setzen wir nun diese Reihen in das Schema (23.) für die Modulargleichung ein, so heben sich die Irrationalitäten heraus, und wir finden die noch fehlenden Constanten durch Gleichsetzen gleich hoher Potenzen von p; natürlich genügt hierbei eine beschränkte Anzahl von Gliedern der Reihen.

Für $n = 3$ haben wir zu setzen

$$v^4 + av^2u^3 + bvu - u^4 = 0$$

oder

$$4p(1 - 4p^3 + \cdots) - 8ap(1 - 3p^3 - \cdots)(1 - 3p - \cdots)$$
$$- 2b(1 - p^3 + \cdots)(1 - p + 2p^2 - \cdots) - 4(1 - 4p - 4p^2 + \cdots) = 0,$$

woraus

$$-2b - 4 = 0,$$
$$4 - 8a + 2b + 16 = 0,$$

also

$$b = -2, \; u = 2$$

folgt, so dass schliesslich die Modulargleichung

$$v^4 + 2v^3u^3 - 2vu - u^4 = 0$$

oder

(25.) $$v^4 - u^4 - 2vu(1 - u^2v^2) = 0$$

resultirt.

Genau in derselben Weise finden wir für $n = 5$, 7 und 11:

(26.) $$v^6 - u^6 - 4uv(1 - u^4v^4) + 5u^2v^2(v^2 - u^2) = 0,$$

(27.) $$v^8 - 8u^7v^7 + 28u^6v^6 - 56u^5v^5 + 70u^4v^4 - 56u^3v^3 + 28u^2v^2 - 8uv + u^8 = 0,$$

(28.) $$v^{12} - u^3v^{11}(22 - 32u^8) + 44u^6v^{10} + 22uv^9(1 + 4u^8) + 165u^4v^8 + 132u^7v^7 + 44u^2v^6(1 - u^8) - 132u^5v^5 - 165u^8v^4 - 22u^3v^3(4 + u^8) - 44u^6v^2 - uv(32 - 22u^8) - u^{12} = 0.$$

16. Die Function $\varphi(\tau)$ ist keineswegs die einzige, für welche Functionalbeziehungen von dem Charakter der Modulargleichungen bestehen; vielmehr ist für *sämmtliche Modulfunctionen* die Existenz ähnlicher Gleichungen geradezu charakteristisch. Eine fundamentale Entwicklung derselben

gehört in die Theorie der höheren Transcendenten; hier sollen nur wenige Bemerkungen darüber Platz finden.

In Nummer 7 dieses Paragraphen bemerkten wir bereits, dass auch $\varphi^2(\tau)$, $\varphi^4(\tau)$ und $\varphi^8(\tau)$ Modulargleichungen ganz analoger Art befriedigen; andererseits hat es auch keine Schwierigkeit, für $\chi(\tau)$, $\chi^2(\tau)$, $\chi^4(\tau)$, $\chi^8(\tau)$ solche herzuleiten; doch glauben wir darauf nicht eingehen zu brauchen, da wir in jedem einzelnen Falle fast dieselben Schlüsse zu wiederholen hätten, wie bei $\varphi(\tau)$. Das weitaus grösste Interesse nehmen diejenigen Gleichungen für sich in Anspruch, denen die *„absolute Invariante“* $J(\tau)$ genügt; wir wollen ein paar Zeilen auf dieselben verwenden, da hier die eigentliche Natur der Modulargleichungen am Einfachsten und Prägnantesten hervortritt. Zunächst behaupten wir:

Jede rationale symmetrische Function der $(n+1)$ *Grössen (n bezeichnet wieder eine ungerade Primzahl)*

$$J\left(\frac{\tau}{n}\right), J\left(\frac{\tau+1}{n}\right), J\left(\frac{\tau+2}{n}\right), \cdots J\left(\frac{\tau+n-1}{n}\right), J(n\tau) \tag{29.}$$

bleibt für jede lineare Transformation ungeändert, besitzt also die beiden Perioden

$$\tau' = \tau + 1 \text{ und } \tau' = -\frac{1}{\tau}. \tag{30.}$$

Die $(n+1)$ *Grössen* (29.) *sind daher die Lösungen einer Gleichung* $(n+1)^{\text{ten}}$ *Grades, deren Coefficienten eindeutige Functionen mit den Perioden* (30.) *sind, und diese Gleichung ist irreductibel.*

Diese Behauptung ist erwiesen, wenn es sich zeigen lässt, dass jede lineare Transformation die Grössen (29.) ungeändert lässt oder nur untereinander vertauscht, und dass andererseits auch wirklich durch solche Transformationen jede der $(n+1)$ Grössen aus jeder hergeleitet werden kann. Das letztere ist unmittelbar ersichtlich, da $\tau' = \tau + k$ bei geeignetem k jede der n ersten Grössen in jede andere derselben überführt und $J(n\tau)$ ungeändert lässt, während wir durch $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ aus der ersten

$$J\left(-\frac{1}{n\tau}\right) = J(n\tau)$$

erhalten. Um weiter darzuthun, dass die Grössen (29.) durch *jede* lineare Transformation nur unter einander permutirt werden, genügt es, den Nachweis für die Elementartransformationen (30.) zu erbringen, auf die sich alle zurückführen lassen. Für die erste derselben, $\tau' = \tau + 1$, haben wir uns hiervon bereits überzeugt, so dass wir nur $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ noch näher zu betrachten haben. Durch diese Transformation gehen, wie wir schon bemerkten, $J\left(\frac{\tau}{n}\right)$ und $J(n\tau)$ in einander über, während aus $J\left(\frac{\tau+k}{n}\right)$ der Ausdruck $J\left(\frac{k\tau-1}{n\tau}\right)$ wird. Sind a, b, c und d ganze Zahlen, welche der Gleichung

$$ad - bc = 1$$

genügen, so ist

$$J\left(\frac{k\tau-1}{n\tau}\right) = J\left(\frac{a\frac{k\tau-1}{n\tau}+b}{c\frac{k\tau-1}{n\tau}+d}\right) = J\left(\frac{(ak+bn)\tau-a}{(ck+dn)\tau-c}\right),$$

und es fragt sich, ob sich a, b, c und d so bestimmen lassen, dass der letztere Ausdruck die Gestalt $J\left(\frac{\tau+m}{n}\right)$ annimmt. Zu diesem Zwecke müssen wir die ganzzahligen Gleichungen

$$\begin{aligned} ak + bn &= l, \\ -a &= ml, \\ ck + dn &= 0, \\ -c &= nl, \\ ad - bc &= 1 \end{aligned}$$

befriedigen. Da wegen der fünften Gleichung a und c keinen von 1 verschiedenen gemeinsamen Factor besitzen können, so muss*) $l = 1$, also

$$a = -m, \quad c = -n$$

und wegen der dritten Gleichung

$$d = k$$

sein. Die erste und letzte Gleichung, welche hierdurch identisch werden, liefern dann noch die Bedingung

*) Die Annahme $l = -1$ würde zu dem gleichen Resultate führen.

$$-mk + bn = 1,$$

aus der sich, da k und n relativ prim sind, für m und b unendlich viele brauchbare Werthepaare ergeben. $J\left(\frac{k\tau - 1}{n\tau}\right)$ ist also immer einem Ausdrucke $J\left(\frac{\tau + m}{n}\right)$ gleich. Dass auf diese Weise nicht mehrere Ausdrücke $J\left(\frac{\tau + k}{n}\right)$ und $J\left(\frac{\tau + k_1}{n}\right)$ in *denselben* $J\left(\frac{\tau + m}{n}\right)$ transformirt werden können, geht daraus hervor, dass sonst gleichzeitig

$$-mk + bn = 1$$

und

$$-mk_1 + b_1 n = 1,$$

also

$$-mk + bn = -mk_1 + b_1 n$$

oder

$$(b - b_1)n = (k - k_1)m$$

sein müsste. Dies ist aber nur möglich, wenn $k - k_1$ durch n theilbar ist, weil m und n relativ prim sind; solche k und k_1 aber, die sich nur um Vielfache von n unterscheiden, sind äquivalent.

Nachdem wir uns so direct überzeugt haben, dass die Coefficienten der Modulargleichung für die Invariante wieder Modulfunctionen sind, ist auch der Nachweis nicht schwer, dass sie *rationale* Functionen von $J(\tau)$ sind. Durch Betrachtungen, die denen von 3, 4 und 5 analog sind, gelingt es zuerst zu zeigen, dass die Coefficienten rationale Functionen von $\varkappa^2(\tau)$ sind, und dann lässt sich das Weitere durch die Bemerkung erledigen, dass diese Coefficienten nicht allein für die Gruppe von $\varkappa^2(\tau)$, sondern für *alle* linearen Transformationen ungeändert bleiben sollen. In v und u ist diese Modulargleichung, wenn wir die letzten Buchstaben in analoger Weise wie früher verwenden, vollständig symmetrisch. Die Coefficientenbestimmung kann schliesslich wieder durch Reihenentwicklungen geleistet werden.

§ 80.

Die Multiplicatorgleichungen.

1. Nachdem wir für die Modulfunctionen Functionaltheoreme in Gestalt der Modulargleichungen gefunden, wenden wir uns der Frage zu, *ob nicht auch für diejenigen Transcendenten, welche sich zu den Modulfunctionen verhalten wie die Thetafunctionen zu den elliptischen Functionen, ähnliche Theoreme bestehen.* Zu diesem Zwecke unterwerfen wir Ausdrücke wie

$$a\,\frac{\vartheta_\alpha^{2}(\tau')}{\vartheta_\alpha^{2}(\tau)},$$

worin τ' eine geeignete Transformation n^{ten} Grades von τ bezeichnet, der Untersuchung; um nicht zu weitläufig zu werden, beschränken wir uns auf Ausdrücke

$$(1.)\qquad \varepsilon\,\frac{\vartheta_3^{2}(\tau')}{\vartheta_3^{2}(\tau)},$$

worin ε eine Constante bedeutet, deren geeignete Wahl wir uns im speciellen Falle vorbehalten. Dass wir gerade diesen Quotienten in Betracht ziehen, beruht darauf, dass derselbe bei der Transformation der elliptischen Functionen eine Rolle spielt; in § 75 lernten wir den reciproken Werth desselben (von einem constanten Factor abgesehen) als *Multiplicator* kennen, und es ist daher üblich, die Gleichungen, denen Ausdrücke wie (1.) oder ähnliche genügen, als *Multiplicatorgleichungen* zu bezeichnen.

Für $n = 2$ ist die gegebene Aufgabe bereits durch die Gleichungen (2.) und (10.) von § 75 gelöst; es ist aus denselben ersichtlich, *dass sich* (1.) *durch* $\varkappa$, *also* $\vartheta_3^{2}(\tau')$ *durch* $\varkappa$ *und* $\vartheta_3^{2}(\tau)$ *ausdrückt; ein Verhältniss, das sich in der Folge als allgemein gültig herausstellen wird.*

Im weiteren Verlauf wollen wir unter n eine ungerade *Primzahl* verstehen, da wir uns später davon überzeugen werden, dass sich alle andern Fälle auf diesen und den vorhergehenden zurückführen lassen.

2. Wir setzen jetzt bestimmter, nöthigenfalls mit Bezeichnung des Argumentes, indem wir die reciproken Werthe von Ausdrücken (1.) zu Grunde legen,

$$(2.)\begin{cases} M_1 = \dfrac{\vartheta_3^2(\tau)}{\vartheta_3^2\left(\dfrac{\tau}{n}\right)},\ M_2 = \dfrac{\vartheta_3^2(\tau)}{\vartheta_3^2\left(\dfrac{\tau+16}{n}\right)},\ M_3 = \dfrac{\vartheta_3^2(\tau)}{\vartheta_3\left(\dfrac{\tau+2\cdot 16}{n}\right)}, \cdots \\ M_n = \dfrac{\vartheta_3^2(\tau)}{\vartheta_3^2\left(\dfrac{\tau+(n+1)\cdot 16}{n}\right)},\quad M_\infty = \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\dfrac{\vartheta_3^2(\tau)}{\vartheta_3^2(n\tau)} \end{cases}$$

und werden zeigen, *dass diese* $(n+1)$ *Multiplicatoren die Lösungen einer Gleichung* $(n+1)^{\text{ten}}$ *Grades sind, deren Coefficienten sich ganz und rational durch* $\varkappa^2(\tau)$ *darstellen lassen.*

Aus § 75, (14.) und (15.), (4.) und (8.) erhalten wir

$$M_1 = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$
$$\cdot\left\{\frac{\cos\operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega'}{n}\right)\cos\operatorname{am}\left(\tau, \frac{2\Omega'}{n}\right)\cdots\cos\operatorname{am}\left(\tau, \frac{(n-1)\Omega'}{2n}\right)}{\Delta\operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega'}{n}\right)\cdots\Delta\operatorname{am}\left(\tau, \frac{(n-1)\Omega'}{2n}\right)\sin\operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega'}{n}\right)\cdots\sin\operatorname{am}\left(\tau, \frac{(n-1)}{2n}\Omega'\right)}\right\}^2$$

und hieraus die allgemeinere Formel

$$(3.)\qquad M_{k+1} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$
$$\cdot\left\{\frac{\cos\operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega'+8k\Omega}{n}\right)\cos\operatorname{am}\left(\tau, 2\,\frac{\Omega'+8k\Omega}{n}\right)\cdots}{\Delta\operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega'+8k\Omega}{n}\right)\cdots\Delta\operatorname{am}\left(\tau, (n-1)\frac{\Omega'+8k\Omega}{n}\right)\sin\operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega'+8k\Omega}{n}\right)\cdots}\right.$$
$$\left.\frac{\cos\operatorname{am}\left(\tau, \frac{n-1}{2}\,\frac{\Omega'+8k\Omega}{n}\right)}{\sin\operatorname{am}\left(\tau, (n-1)\,\frac{\Omega'+8k\Omega}{n}\right)}\right\}^2$$

und weiter

$$(4.)\qquad M_\infty = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$
$$\cdot\left\{\frac{\cos\operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega}{n}\right)\cos\operatorname{am}\left(\tau, \frac{2\Omega}{n}\right)\cdots\cos\operatorname{am}\left(\tau, \frac{(n-1)\Omega}{2n}\right)}{\Delta\operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega}{n}\right)\cdots\Delta\operatorname{am}\left(\tau, \frac{(n-1)\Omega}{2n}\right)\sin\operatorname{am}\left(\tau, \frac{\Omega}{n}\right)\cdots\sin\operatorname{am}\left(\tau, \frac{(n-1)\Omega}{2n}\right)}\right\}^2.$$

Ganz wie im vorigen Paragraphen zeigen wir, dass alle rationalen symmetrischen Functionen der $(n+1)$ Grössen M sich rational durch $\varkappa^2(\tau)$ ausdrücken lassen, so dass zunächst dargethan ist, *dass die* M *einer Gleichung* $(n+1)^{\text{ten}}$ *Grades genügen, deren Coefficienten rationale Functionen von* $\varkappa^2(\tau)$ *sind.*

3. Um die *Irreductibilität* der Multiplicatorgleichung nachzuweisen, müssen wir zeigen, dass aus einer der Grössen M, etwa M_1, sich alle übrigen durch lineare Transformationen von τ herleiten lassen, die $\varkappa^2(\tau)$ nicht ändern, d. h. die der Gruppe

$$\tau' = \tau + 1, \quad \tau' = -\frac{\tau}{2\tau - 1} \tag{5.}$$

angehören.

Dass durch wiederholte Anwendung der ersten Transformation sämmtliche Grössen M_k, $k = 1, 2, 3, \cdots n$ aus M_1 hervorgehen, liegt auf der Hand; weiter ist

$$M_m\left(-\frac{\tau}{2\tau - 1}\right) = \frac{\vartheta_3^2\left(-\frac{\tau}{2\tau-1}\right)}{\vartheta_3^2\left(\frac{-\frac{\tau}{2\tau-1} + 16m}{n}\right)}$$

$$= \frac{\vartheta_3^2\left(-\frac{\tau}{2\tau-1}\right)}{\vartheta_3^2\left(\frac{(32m-1)\tau - 16m}{2n\tau - n}\right)}$$

oder, wenn wir m so bestimmen, dass

$$32m - 1 = kn \tag{6.}$$

wird:

$$M_m\left(-\frac{\tau}{2\tau - 1}\right) = \frac{\vartheta_3^2\left(-\frac{\tau}{2\tau-1}\right)}{\vartheta_3^2\left(\frac{kn\tau - \frac{kn+1}{2}}{2n\tau - n}\right)}. \tag{7.}$$

Ist nun $n = 4r + 1$, also $k = 4s + 3$ (vgl. die analoge Untersuchung des vorigen Paragraphen), so wird hieraus

$$M_m\left(-\frac{\tau}{2\tau - 1}\right) = \frac{\vartheta_3^2\left(-\frac{\tau}{2\tau-1}\right)}{\vartheta_3^2\left(\frac{k}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{2n\tau - n}\right)}$$

$$= \frac{\vartheta_3^2\left(-\frac{\tau}{2\tau-1}\right)}{\vartheta_3^2\left(2(s+1) - \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{2n\tau - 1}\right)} = \frac{\vartheta_3^2\left(-\frac{\tau}{2\tau-1}\right)}{\vartheta_3^2\left(2(s+1) - \frac{2n\tau - n + 1}{4n\tau - 2n}\right)}$$

$$= (1 - 2\tau) \frac{\vartheta_3^{\,2}}{\vartheta_3^{\,2}\left(-\frac{2n\tau - n + 1}{4n\tau - 2n}\right)},$$

wobei die Umwandlung des Zählers mit mehrfacher Hülfe der Formeln (1.) und (2.) von § 78 ausgeführt wird; behandeln wir auch den Nenner in gleicher Weise, so folgt weiter

$$M_m\left(-\frac{\tau}{2\tau - 1}\right) = \frac{1 - 2\tau}{n - 2n\tau} \frac{\vartheta_3^{\,2}(\tau)}{\vartheta_3^{\,2}\left(n\tau - \frac{n-1}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{n} \frac{\vartheta_3^{\,2}(\tau)}{\vartheta_3^{\,2}(n\tau)},$$

d. h.

$$M_m\left(-\frac{\tau}{2\tau - 1}\right) = M_\infty,$$

da in diesem Falle $(-1)^{\frac{n-1}{2}} = +1$ ist.

Haben wir $n = 4r + 3$, $k = 4s + 1$, so nimmt die Umformung die Gestalt an

$$M_m\left(-\frac{1}{2\tau - 1}\right) = \frac{\vartheta_3^{\,2}\left(-\frac{\tau}{2\tau - 1}\right)}{\vartheta_3^{\,2}\left(\frac{k}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{2n\tau - n}\right)}$$

$$= \frac{\vartheta_3^{\,2}\left(-\frac{\tau}{2\tau - 1}\right)}{\vartheta_3^{\,2}\left(2s + \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{2n\tau - n}\right)} = \frac{\vartheta_3^{\,2}\left(-\frac{\tau}{2\tau - 1}\right)}{\vartheta_3^{\,2}\left(2s + \frac{2n\tau - n - 1}{4n\tau - 2n}\right)}$$

$$= \frac{\vartheta_3^{\,2}\left(-\frac{\tau}{2\tau - 1}\right)}{\vartheta_3^{\,2}\left(\frac{2n\tau - n - 1}{4n\tau - 2n}\right)}$$

oder

$$M_m\left(-\frac{1}{2\tau - 1}\right) = \frac{1 - 2\tau}{1 + 2n\tau - n - 1} \frac{\vartheta_3^{\,2}(\tau)}{\vartheta_3^{\,2}\left(n\tau - \frac{n+1}{2}\right)}$$

$$= -\frac{1}{n} \cdot \frac{\vartheta_3^{\,2}(\tau)}{\vartheta_3^{\,2}(n\tau)} = M_\infty,$$

da hier $(-1)^{\frac{n-1}{2}} = -1$ ist.

4. Befreit man das höchste Glied der Multiplicatorgleichung von seinem Coefficienten, so sind die Coefficienten der anderen Glieder für endliche $\varkappa^2$ endlich, also ganze Functionen von $\varkappa^2$; denn (vgl. § 17, 5) keine der Grössen M wird, wie aus ihrer Productentwicklung hervorgeht, für $|p| < 1$ unendlich, während $\varkappa^2$ für diese p-Werthe *alle* endlichen Werthe annimmt. Mit Hülfe von § 74, (12.) und (14.) lässt sich nämlich für jedes endliche, von Null verschiedene $\varkappa^2$ $\Big($falls $|\varkappa^2| > 1$ ist, kann die in § 79, 11 angewandte Transformation $\tau' = \frac{\tau}{\tau + 1}$ benutzt werden$\Big)$ ein zugehöriges τ und p berechnen, während für $\varkappa^2 = 0$ auch $p = 0$ ist.

Ausserdem können wir *den letzten Coefficienten der Gleichung*, C_{n+1}, direct herleiten; es ist nämlich

$$C_{n+1} = M_1 M_2 M_3 \dots M_n M_\infty$$

$$= \prod_{\mu,\nu} \frac{\cos^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\mu\Omega' + \nu\Omega}{n}\right)}{\Delta^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\mu\Omega' + \nu\Omega}{n}\right) \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2\mu\Omega' + \nu\Omega}{n}\right)},$$

worin μ und ν dieselben Werthe wie in den Formeln des vorigen Paragraphen durchlaufen. Nach § 62, (7.) ist daher

$$C_{n+1} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}. \tag{8.}$$

5. Bezeichnet man mit M_k' die Grösse, die aus M_k durch Ersetzen von τ durch $n\tau$ hervorgeht, so ist nach (2.)

$$M_1' = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n M_\infty}. \tag{9.}$$

Ersetzt man daher in der Multiplicatorgleichung die Unbekannte M durch $\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{nM}$, $\varkappa(\tau)$ durch $\varkappa(n\tau)$, so hat die neue Gleichung mit der ursprünglichen eine, also wegen der Irreductibilität der letzteren alle Lösungen gemeinsam.

6. Wir untersuchen weiter, welche Änderung die Multiplicatorgleichung durch Ersetzung von τ durch $-\frac{1}{\tau}$, also von $\varkappa^2(\tau)$ durch $\varkappa_1^2(\tau) = 1 - \varkappa^2(\tau)$ erleidet. Es ist

$$(10.)\qquad M_\infty\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\cdot\frac{\vartheta_3^{\,2}\left(-\frac{1}{\tau}\right)}{\vartheta_3^{\,2}\left(-\frac{n}{\tau}\right)}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\vartheta_3^{\,2}(\tau)}{\vartheta_3^{\,2}\left(\frac{\tau}{n}\right)}$$
$$=(-1)^{\frac{n-1}{2}}M_1.$$

Durch Wiederholung der letzten Schlüsse folgt hieraus, *dass die Multiplicatorgleichung ungeändert bleibt, wenn man gleichzeitig M durch $(-1)^{\frac{n-1}{2}}M$, $\varkappa^2$ durch $\varkappa_1^{\,2}=1-\varkappa^2$ ersetzt.*

Hat dieses n die Form $n=4\nu+1$, so ist die Multiplicatorgleichung in $\varkappa^2$ und $1-\varkappa^2$ symmetrisch, d. h. ihre Coefficienten sind ganze Functionen von $\varkappa^2(1-\varkappa^2)$; ist dagegen $n=4\nu+3$, so haben nur die Coefficienten gerader Potenzen diese Eigenschaft, während die übrigen durch Vertauschung von $\varkappa^2$ und $1-\varkappa^2$ das Zeichen ändern, also ganze Functionen von $\varkappa^2(1-\varkappa^2)$, multiplicirt mit $\varkappa_1^{\,2}-\varkappa^2$ sind).*

7. Die Transformation

$$\tau'=-\frac{1}{-\frac{1}{\tau}+1}=-\frac{\tau}{\tau-1},$$

welche $\varkappa^2$ in $\frac{1}{\varkappa^2}$ überführt, übt auf M_∞ die folgende Wirkung aus. Es ist

$$M_\infty\left(-\frac{\tau}{\tau-1}\right)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\frac{\vartheta_3^{\,2}\left(-\frac{\tau}{\tau-1}\right)}{\vartheta_3^{\,2}\left(-\frac{n\tau}{\tau-1}\right)}$$

---

*) Eine ganze Function von x_1 und x_2 nämlich, welche sich durch Vertauschung dieser Grössen nicht ändert, also in ihnen symmetrisch ist, lässt sich durch x_1+x_2 und x_1x_2 rational ausdrücken, wie dies aus § 13 hervorgeht; da nun in unserem speciellen Falle $x_1=\varkappa^2$, $x_2=\varkappa_1^{\,2}$, $x_1+x_2=1$ ist, so wird sich jene Function rational durch $x_1x_2=\varkappa^2\varkappa_1^{\,2}=\varkappa^2(1-\varkappa^2)$ allein ausdrücken. Eine ganze Function dagegen, welche durch Vertauschung von x_1 mit x_2 das Zeichen ändert, wird in Folge von Division durch x_1-x_2 in eine der ersteren Art verwandelt. Diese Schlüsse werden nicht dadurch alterirt, dass $\varkappa$ und $\varkappa_1$ von einander *abhängig* sind, da man im ersten Falle die betreffenden Factoren immer leicht *formell* symmetrisch in beiden Grössen machen kann. Ist nämlich $f(x_1)=f(x_2)$, so haben wir auch

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=f(x_1)=f(x_2).$$

Ähnliches gilt für den zweiten Fall.

$$= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} \frac{\vartheta_3^2\left(-\frac{\tau}{\tau-1}\right)}{\vartheta_3^2\left(-(n+1)+1-\frac{n}{\tau-1}\right)} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} \frac{\vartheta_3^2\left(-\frac{\tau}{\tau-1}\right)}{\vartheta_3^2\left(-\frac{n}{\tau-1}+1\right)}$$

$$= \frac{-i(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\tau-1}{\tau}\vartheta_3^2\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right)}{n\vartheta_0^2\left(-\frac{n}{\tau-1}\right)} = \frac{-i(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\tau-1}{\tau}\vartheta_3^2\left(1-\frac{1}{\tau}\right)}{n\vartheta_0^2\left(-\frac{n}{\tau-1}\right)}$$

$$= \frac{-i(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\tau-1}{\tau}\vartheta_0^2\left(-\frac{1}{\tau}\right)}{n\vartheta_0^2\left(-\frac{n}{\tau-1}\right)} = \frac{-(-1)^{\frac{n-1}{2}}(\tau-1)\vartheta_2^2(\tau)}{n\vartheta_0^2\left(-\frac{n}{\tau-1}\right)}$$

$$= \frac{-(-1)^{\frac{n-1}{2}}(\tau-1)\vartheta_2^2(\tau)}{-i\frac{\tau-1}{n}\,n\vartheta_2^2\left(\frac{\tau-1}{n}\right)} = -i(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\vartheta_2^2(\tau)}{\vartheta_2^2\left(\frac{\tau-1}{n}\right)}$$

oder, wenn man beachtet, dass nach § 78, (1.)

$$\vartheta_2(\tau+n) = e^{\frac{n\pi i}{4}}\vartheta_2(\tau) = i(-1)^{\frac{n-1}{2}}\vartheta_2(\tau)$$

ist,

$$M_\infty\left(-\frac{\tau}{\tau-1}\right) = \frac{\vartheta_2^2(\tau)}{\vartheta_2^2\left(\frac{\tau-1}{n}+n\right)} = \frac{\vartheta_2^2(\tau)}{\vartheta_2^2\left(\frac{\tau+n^2-1}{n}\right)}$$

$$= \frac{\vartheta_3^2(\tau)}{\vartheta_3^2\left(\frac{\tau+n^2-1}{n}\right)} \cdot \frac{\vartheta_2^2(\tau)}{\vartheta_3^2(\tau)} \cdot \frac{\vartheta_3^2\left(\frac{\tau+n^2-1}{n}\right)}{\vartheta_2^2\left(\frac{\tau+n^2-1}{n}\right)}$$

oder, wenn

(11.) $$16k \equiv n^2 - 1 \pmod{4n}$$

ist,

(12.) $$M_\infty\left(-\frac{\tau}{\tau-1}\right) = \frac{\vartheta_3^2(\tau)}{\vartheta_3^2\left(\frac{\tau+16k}{n}\right)} \cdot \frac{\vartheta_2^2(\tau)}{\vartheta_3^2(\tau)} \cdot \frac{\vartheta_3^2\left(\frac{\tau+16k}{n}\right)}{\vartheta_2^2\left(\frac{\tau+16k}{n}\right)}$$

$$= M_{k+1}\frac{\varkappa(\tau)}{\varkappa\left(\frac{\tau+16k}{n}\right)}.$$

Die Multiplicatorgleichung bleibt daher ungeändert, wenn man in ihr gleichzeitig $\varkappa^2(\tau)$ *durch* $\frac{1}{\varkappa^2(\tau)}$ *und M durch*

$$M\frac{\varkappa(\tau)}{\varkappa\left(\frac{\tau+16k}{n}\right)}$$

ersetzt, wo k durch (11.) *bestimmt ist.*

8. Um für den *Grad der Coefficienten* der Multiplicatorgleichung einen *Maximalwerth* festzusetzen, beachten wir, dass nach dem eben Gesagten die Gleichung

$$M^{n+1}+f_1\varkappa^2(\tau)M^n+f_2\varkappa^2(\tau)M^{n-1}+\cdots$$
$$+f_n\varkappa^2(\tau)M+\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}=0$$

mit

$$M^{n+1}\frac{\varkappa^{n+1}(\tau)}{\varkappa^{n+1}\left(\frac{\tau+16k}{n}\right)}+f_1\left(\frac{1}{\varkappa^2(\tau)}\right)M^n\frac{\varkappa^n(\tau)}{\varkappa^n\left(\frac{\tau+16k}{n}\right)}+\cdots$$
$$+f_n\left(\frac{1}{\varkappa^2(\tau)}\right)M\frac{\varkappa(\tau)}{\varkappa\left(\frac{\tau+16k}{n}\right)}+\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}=0$$

übereinstimmen muss. Gehen wir nun zur Grenze $p=0$, also $\tau=i\infty$ über, so bleiben sämmtliche Werthe von M endlich; es wird

$$M_\nu=1,\ (\nu=1,2,3,\cdots n),\ M_\infty=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n};$$

dagegen wird
$$\left[\frac{\varkappa^\nu(\tau)}{\varkappa^\nu\left(\frac{\tau+16k}{n}\right)}\right]_{p=0}$$

unendlich wie
$$\left[\frac{p^{\frac{\nu}{2}}}{p^{\frac{\nu}{2n}}}\right]_{p=0}.$$

Soll nun
$$f_{n-\nu+1}\left(\frac{1}{\varkappa^2}\right)\frac{\varkappa^\nu(\tau)}{\varkappa^\nu\left(\frac{\tau+16k}{n}\right)}$$

für $p=0$ endlich bleiben, was nöthig ist, da M nicht unendlich wird, so muss, wenn m den Grad von $f_{n-\nu+1}(\varkappa^2)$ in $\varkappa^2$ bezeichnet,

(13.)
$$m<\frac{\nu}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

oder, wenn wir für ν den Maximalwerth n wählen,

$$(14.)\qquad m \leqq \frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) \quad \text{oder} \quad m \leqq \frac{n-1}{2} \quad \text{sein.}$$

9. Mit Hülfe der gefundenen Beschränkungen hat es nun nicht die geringste Schwierigkeit, die Multiplicatorgleichungen nach genau derselben Methode zu berechnen, die uns bei den Modulargleichungen zum Ziele führte. Ist z. B. $n=3$, so setzen wir

$$M^4 + a(1-2\varkappa^2)M^3 + bM^2 + c(1-2\varkappa^2)M - \tfrac{1}{3} = 0;$$

für $\varkappa^2$ und seine Potenzen fügen wir die Reihenentwicklungen ein, die wir im vorigen Paragraphen benutzten, während wir für M

$$M_\infty = -\tfrac{1}{3}\,\frac{(1+2p+2p^4+2p^9+\cdots)^2}{(1+2p^3+2p^{12}+2p^{27}+\cdots)^2}$$

wählen; multipliciren wir die Nenner weg, nehmen die mechanische Reihenentwicklung für die auftretenden Functionen von p vor, multipliciren schliesslich Alles aus und ordnen nach Potenzen von p, so liefert uns die Coefficientenvergleichung die Werthe für die noch unbekannten Constanten. Wir finden

$$(15.)\qquad M^4 - \tfrac{8}{3}(1-2\varkappa^2)M^3 + 2M^2 - \tfrac{1}{3} = 0$$

und ebenso für $n=5$

$$(16.)\qquad M^6 + \tfrac{1}{5}[256\varkappa^2(1-\varkappa^2) - 26]M^5 + 11M^4$$
$$- 12M^3 + 7M^2 - 2M + \tfrac{1}{5} = 0.$$

10. Es ist nicht unsere Absicht, die Theorie der Multiplicatorgleichungen auch für einen *zusammengesetzten* Transformationsgrad durchzuführen; wir beschränken uns auf einige Andeutungen. Ist $n = m\mu$, m eine Primzahl, so können wir $M_\phi = \dfrac{\vartheta_3^2(\tau)}{\vartheta_3^2\left(\dfrac{\tau}{n}\right)}$ als Lösung einer Gleichung $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades darstellen, deren Coefficienten in $\varkappa^2\left(\dfrac{\tau}{\mu}\right)$ rational und ganz sind. Bedenken wir nun, dass sich $\varkappa^2\left(\dfrac{\tau}{\mu}\right)$ nach dem vorigen Paragraphen aus einer algebraischen Gleichung berechnet, deren Coefficienten in $\varkappa^2(\tau)$ rational und ganz sind, so finden wir durch Elimination von $\varkappa^2\left(\dfrac{\tau}{\mu}\right)$ aus beiden Gleichungen,

dass M_1 auch die Lösung einer algebraischen Gleichung ist, deren Coefficienten in $\varkappa^2(\tau)$ rational sind. Mit den verschiedenen Lösungen dieser Gleichung wollen wir uns nicht weiter beschäftigen.

§ 81.

Die elliptischen Transcendenten als Functionen des Parameters.

1. Nachdem wir uns mit der Natur der Modulfunctionen vertraut gemacht und einige ihrer wesentlichsten Eigenthümlichkeiten entwickelt haben, scheint es geboten, einen Rückblick auf die eigentlichen elliptischen Transcendenten zu werfen, die uns jetzt als Functionen *zweier* Variabeln erscheinen. Man kann fragen: *welche Perioden besitzt irgend eine elliptische Function, als Function von τ aufgefasst?* Diese Frage ist für die Entwicklung dieser Functionen von Bedeutung. Früher pflegten wir bei den meisten Entwicklungen die Grösse p, also auch τ, in den Constanten auftreten zu lassen; doch lernten wir auch schon Relationen kennen, in denen die Modulfunction $\varkappa^2(\tau)$ auftritt, wie die Differentialrelationen für sin am w, cos am w, Δ am w, sowie die Potenzreihen für diese Grössen. Es ist leicht, die nothwendige — ob auch hinreichende, wollen wir hier unentschieden lassen — Bedingung für eine *eindeutige* Entwickelbarkeit einer Transcendenten nach irgend einer Modulfunction aufzustellen. *Jene Transcendente muss für dieselben Transformationen ungeändert bleiben, welche jene Modulfunction ungeändert lassen.*

2. Ohne Schwierigkeit überzeugen wir uns davon, dass sin am (τ, w) (und in gleicher Weise auch cos am (τ, w) und Δ am (τ, w)) als Functionen von τ für dieselbe Periodicitätsgruppe ungeändert bleiben, welche die Periodicität von $\varkappa^2(\tau)$ bezeichnet, d. h.

$$(1.)\qquad \tau' = \tau + 2, \quad \tau' = -\frac{\tau}{2\tau - 1}.$$

Dass nämlich die erste Periode sin am (τ, w) zukommt, geht unmittelbar daraus hervor, dass sich aus der Entwicklung für diese Function alle gebrochenen Potenzen von $p = e^{\pi i \tau}$ herausheben. Die zweite setzt sich aus der Folge

$$\tau' = -\frac{1}{\tau}, \quad \tau' = \tau + 2, \quad \tau' = -\frac{1}{\tau}$$

zusammen. Durch $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ geht $\sin \operatorname{am}(\tau, w)$ nach § 77, (28.) in

$$i \frac{\sin \operatorname{am}\left(\tau, \frac{w}{i}\right)}{\cos \operatorname{am}\left(\tau, \frac{w}{i}\right)} = -i \frac{\sin \operatorname{am}(\tau, iw)}{\cos \operatorname{am}(\tau, iw)}$$

über, durch $\tau' = \tau + 2$ wird dieser Ausdruck nicht geändert, und durch $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ wird er in

$$-i \frac{i \sin \operatorname{am}(\tau, w) \cos \operatorname{am}(\tau, w)}{\cos \operatorname{am}(\tau, w)} = \sin \operatorname{am}(\tau, w)$$

zurückgeführt. Hiermit ist das Vorkommen der Grösse $\varkappa^2(\tau)$ in den Formeln und Entwicklungen für $\sin \operatorname{am}(\tau, w)$, $\cos \operatorname{am}(\tau, w)$ und $\Delta \operatorname{am}(\tau, w)$ erklärt. Mit Recht hebt Herr Klein hervor, *dass $\varkappa^2(\tau)$, nicht $\varkappa(\tau)$ selbst die für die gewöhnlichen elliptischen Functionen charakteristische Grösse ist.*

Die Festsetzung der Constante C_1 in § 56, 1 und von Ω in § 70, 1 u. s. w. erweist sich jetzt aus einem neuen Gesichtspunkte als vortheilhaft; die drei elliptischen Functionen werden hierdurch zu eindeutigen Functionen von $\varkappa^2(\tau)$ gemacht.

3. Die *Thetafunctionen* besitzen diese Eigenschaft nicht; doch setzte Herr Weierstrass an ihre Stelle andere Transcendenten, die transcendente, ganze Functionen von $\varkappa^2(\tau)$ sind; wir haben auf dieselben bereits in § 73 hingewiesen. Mit Hülfe dieser Functionen lassen sich auch $\sin \operatorname{am}(\tau, w)$, $\cos \operatorname{am}(\tau, w)$ und $\Delta \operatorname{am}(\tau, w)$ als transcendente rationale Functionen von $\varkappa^2(\tau)$ und w darstellen.

Achter Abschnitt.

Die periodischen Functionen zweiter Gattung.

§ 82.

Einführung der einfach periodischen Functionen zweiter Gattung.

1. An die eigentlichen periodischen Functionen, die wir bis jetzt kennen gelernt haben, schliessen sich eng mehrere andere Gruppen von Functionen an; wir können nämlich nach solchen Functionen fragen, *die bei Transformationen des Arguments zwar nicht ungeändert bleiben, aber doch nur Änderungen einfacher Art erleiden.* Wir bezeichnen als *periodische Functionen zweiter Gattung* solche Functionen $F(x)$, die einer oder mehreren Gleichungen

$$F[\varphi_1(x)] = \psi_1[F(x)]$$

genügen, worin wir uns unter φ_1 und ψ_1 im allgemeinsten Falle *algebraische*, in dem speciellen jedoch, den wir allein weiter verfolgen wollen, *lineare* Functionen denken. Im Folgenden werden wir die Frage zu beantworten haben: *Welche eindeutigen, einfach oder mehrfach (linear) periodischen Functionen zweiter Gattung mit einer endlichen Anzahl wesentlicher Discontinuitätspunkte sind möglich?*

2. Man sieht, dass die Function*) $\varphi_1(x)$ denselben Umformungen und Reductionen unterworfen werden kann, wie bei den periodischen Functionen erster Gattung; aber auch die Function $\psi_1(x)$ ist denselben Transformationen zugänglich; denn setzen wir $\chi_1 F(x) = F_1(x)$, so haben wir

$$F_1[\varphi_1(x)] = \chi_1 F[\varphi_1(x)] = \chi_1 \psi_1 F(x) = \chi_1 \psi_1 \chi_{-1} F_1(x).$$

---

*) φ_1 und ψ_1 denken wir uns in der Folge immer als *lineare* Functionen.

Hiernach lassen sich alle eindeutigen, einfach periodischen Functionen zweiter Gattung auf eine der folgenden fünf Normalformen zurückführen:

(1.) $$F(x+1) = F(x) + 1,$$

(2.) $$F(x+1) = qF(x),$$

(3.) $$F(px) = F(x) + 1, \quad |p| < 1,$$

(4.) $$F(px) = qF(x), \quad |p| < 1,$$

(5.) $$F(px) = qF(x), \quad |p| = 1, \; |q| = 1.$$

Dass im Falle (3.) $|p| = 1$ auszuschliessen ist und dass auch $|p| = 1$, $|q| \lessgtr 1$ nicht zusammenbestehen können, wenn p eine genaue Einheitswurzel ist, geht unmittelbar daraus hervor, dass dann $F(p^k x)$ für alle ganzzahligen k nur eine *endliche* Anzahl von Werthen repräsentiren kann*); auch sieht man, dass im Falle (5.), auf den wir nicht weiter einzugehen brauchen, $q^k = p$ und p eine Einheitswurzel sein muss.

3. Eine Function der Art (1.) ist $f(x) = x$; bezeichnet ferner $F(x)$ eine beliebige Function dieser Klasse, so haben wir

$$F(x+1) - f(x+1) = F(x) - f(x),$$

d. h. $F(x) - f(x)$ ist eine additiv periodische Function erster Gattung. *Daher ist $F(x)$ im allgemeinsten Falle eine beliebige eindeutige Function mit der additiven Periode 1, vermehrt um x.*

4. Der Gleichung

$$F(x+1) = qF(x)$$

genügt

$$f(x) = e^{x \log q},$$

und wir haben

$$\frac{F(x+1)}{f(x+1)} = \frac{F(x)}{f(x)},$$

so dass sich $F(x)$ darstellt als eine eindeutige Function mit der additiven Periode 1, multiplicirt mit $e^{x \log q}$.

---

*) Ist $|p| = 1$, p keine genaue Einheitswurzel, so lässt sich leicht darthun, dass $F(x)$ für unendlich wenig verschiedene Argumente um Endliches verschiedene Werthe annehmen müsste, was natürlich auch ausgeschlossen werden muss.

Die Functionen (3.) und (4.) werden wir weiter unten in der allgemeinsten Weise construiren; sie sind von den Transcendenten, die wir bis jetzt kennen lernten, verschieden, stehen aber mit den multiplicatorisch periodischen Functionen erster Gattung in engem Zusammenhange.

5. Wenn eine Function der Gattungen (3.) und (4.) ausser $x = 0$ und $x = \infty$ einen wesentlichen Unstetigkeitspunkt besitzt, so hat sie deren unendlich viele, wie aus (3.) und (4.) unmittelbar hervorgeht. Dass die genannten Punkte auch wirklich in allen Fällen wesentliche Unstetigkeitspunkte sein müssten, lässt sich nicht behaupten, da im speciellen Falle auch eine rationale Function die Gleichung (4.) befriedigen kann. Die spätere allgemeine Construction der fraglichen Functionen wird übrigens ergeben, dass dieselben, jenen sehr unwesentlichen Ausnahmefall abgerechnet, wirklich $x = 0$ und $x = \infty$ zu wesentlichen Discontinuitätspunkten haben.

§ 83.

Einführung der mehrfach periodischen Functionen zweiter Gattung.

1. Soll eine eindeutige Function $F(x)$ zwei oder mehreren Gleichungen

$$F[\xi_1(x)] = \eta_1[F(x)],$$

$$F[\xi_1'(x)] = \eta_1'[F(x)]$$

u. s. w.

genügen und ξ_1 und ξ_1' sind vertauschbar, so erkennt man sofort, dass η_1 und η_1' dieselbe Eigenschaft besitzen müssen; denn es muss

$$F[\xi_1 \xi_1'(x)] = F[\xi_1' \xi_1(x)],$$

also

$$\eta_1 \eta_1' F(x) = \eta_1' \eta_1 F(x)$$

oder

$$\eta_1 \eta_1'(x) = \eta_1' \eta_1(x)$$

sein. Die hiernach möglichen Combinationen von vertauschbaren Perioden werden im Folgenden discutirt.

a.
$$F(x+1) = F(x),$$

$$F(x+n) = m + F(x).$$

Diese Transcendenten lassen sich aus den Functionen

$$f(px) = m + f(x)$$

herleiten, indem man $e^{2\pi ix}$ für x einsetzt und $p = e^{2\pi in}$ wählt. Der Fall, dass n reell ist, muss ausgeschlossen werden, wie höchst einfache Betrachtungen zeigen.

b.
$$F(x+1) = F(x),$$
$$F(x+n) = F(x),$$
$$F(x+n_1) = m_1 + F(x).$$

Nicht möglich, wenn zwischen 1, n und n_1 keine lineare, ganzzahlige Beziehung besteht, weil $F(x)$ als Argument in eine Function mit der additiven Periode m_1 eingesetzt sonst eine Function mit drei additiven, von einander unabhängigen Perioden hervorbringen würde.

c.
$$F(x+1) = 1 + F(x),$$
$$F(x+n) = m + F(x).$$

Bezeichnet $f(x)$ eine Function mit der additiven Periode 1, so muss $F(x)$ nach Früherem die Form haben

$$F(x) = x + f(x);$$

weiter folgt aus der zweiten Gleichung

$$x + n + f(x+n) = x + f(x) + m$$

oder

$$f(x+n) = m - n + f(x),$$

d. h. $f(x)$ muss eine Function der Art (a.) oder, wenn $m - n = 0$ ist, eine doppelt periodische Function sein.

d.
$$F(x+1) = F(x),$$
$$F(x+n) = m + F(x),$$
$$F(x+n_1) = m_1 + F(x).$$

Ist ohne lineare, ganzzahlige Beziehung zwischen 1, n, n_1 nicht möglich, weil durch Einsetzung von $F(x)$ in eine Function mit den additiven Perioden m und m_1 eine dreifach periodische Function hervorgebracht würde. Dieser Schluss bleibt auch im Wesentlichen richtig, wenn $\frac{m}{m_1}$ eine reelle, rationale Grösse ist; ist dasselbe irrational reell, so sind Näherungsschlüsse anwendbar.

e.
$$F(x+1) = 1 + F(x),$$
$$F(x+n) = m + F(x),$$
$$F(x+n_1) = m_1 + F(x).$$

Hier müsste wieder
$$F(x) = x + f(x)$$
sein und $f(x)$ den drei Gleichungen
$$f(x+1) = f(x),$$
$$f(x+n) = m - n + f(x),$$
$$f(x+n_1) = m_1 - n_1 + f(x)$$
genügen, was nach d. nicht möglich ist, wenn nicht gleichzeitig
$$m - n = 0,\ m_1 - n_1 = 0$$
oder
$$m = n,\ m_1 = n_1$$
wird, weil alsdann eine Constante die Stelle von $f(x)$ vertreten kann. In der That genügt $x + c$ unendlich vielen Beziehungen dieser Art.

f.
$$F(x+1) = F(x),$$
$$F(x+n) = qF(x).$$

Zurückführbar auf die Functionen
$$f(px) = qf(x);$$
Bedingungen wie bei a.

g.
$$F(x+1) = qF(x),$$
$$F(x+n_1) = q_1F(x).$$

Setzen wir $F(x) = e^{x\log q} f(x)$, wobei wieder $f(x)$ eine Function mit der additiven Periode 1 bezeichnen möge, so ist nach dem vorigen Paragraphen der ersten Gleichung in der allgemeinsten Weise Genüge geleistet; aus der zweiten wird
$$f(x+n_1) = q_1 e^{-n_1 \log q} f(x),$$
d. h. $f(x)$ ist eine Function der vorigen Art.

h.
$$F(x+1) = F(x),$$
$$F(x+n) = F(x),$$
$$F(x+n_1) = q_1F(x).$$

Würde in eine Function mit der multiplicatorischen Periode q_1 eingesetzt eine dreifach additiv periodische Function hervorbringen.

i. $$F(x+1) = F(x),$$
$$F(x+n) = qF(x),$$
$$F(x+n_1) = q_1 F(x).$$

Die Unmöglichkeit solcher Functionen folgt aus g. und h.

k. $$F(x+1) = qF(x),$$
$$F(x+n_1) = q_1 F(x),$$
$$F(x+n_2) = q_2 F(x).$$

Ebenso unmöglich nach g. und i.

l. $$F(px) = F(x),$$
$$F(p_1 x) = 1 + F(x).$$

m. $$F(px) = 1 + F(x),$$
$$F(p_1 x) = m_1 + F(x).$$

n. $$F(px) = F(x),$$
$$F(p_1 x) = q_1 F(x).$$

o. $$F(px) = qF(x),$$
$$F(p_1 x) = q_1 F(x).$$

Die vier letzten Fälle werden durch die Substitution $x = e^{w \log p}$ auf b., d., h. und i. zurückgeführt und sind daher unmöglich.

2. Über die nicht vertauschbaren Perioden bei Functionen zweiter Gattung können wir uns sehr kurz fassen, da uns hier ganz analoge Verhältnisse wie bei den Functionen erster Gattung entgegentreten. Haben ξ_1 und ξ_1' die Form $ax+b$, so können wir die Untersuchungen von § 66, 2, 3 und 4 wiederholen. Wir finden, dass dann $F(x)$ unendlich vielen, im Allgemeinen von einander unabhängigen Relationen

$$F(x+n) = \varepsilon[F(x)]$$

genügt, wo die verschiedenen $\varepsilon(x)$ nach Früherem vertauschbar, also alle gleichzeitig auf die Form $\varepsilon(x) = x + n$ oder $\varepsilon(x) = qx$ reducirbar sein müssen. Hieraus folgt — unwesentliche Ausnahmefälle abgerechnet — die Unmöglichkeit der fraglichen Functionen.

Im allgemeineren Falle ergiebt sich wieder das Vorhandensein unendlich vieler wesentlicher Discontinuitätspunkte; die hierbei vorkommenden Ausnahmen sind ohne sonderliches Interesse. Das Gesammtresultat des vorigen und des gegenwärtigen Paragraphen lautet:

Es giebt vier wesentlich selbständige Arten von periodischen Functionen zweiter Gattung mit einer endlichen Zahl wesentlicher Discontinuitätspunkte, nämlich die durch die Gleichungen

a. $$F(px) = qF(x),\ |p| < 1,$$

b. $$F(px) = 1 + F(x),\ |p| < 1,$$

c. $$F(x+1) = F(x),$$
$$F(x+n) = qF(x),$$

d. $$F(x+1) = F(x),$$
$$F(x+n) = 1 + F(x)$$

charakterisirten. Die Functionen a. und b. wollen wir als *multiplicatorisch periodische zweiter Gattung vom Typus* 1 *und* 2 *unterscheiden,* während wir die Transcendenten c. und d., die sich auf die beiden ersten zurückführen lassen, *als doppelt periodische Functionen vom Typus* 1 *und* 2 *bezeichnen.*

§ 84.

Die multiplicatorisch periodischen Functionen zweiter Gattung vom Typus 1.

1. Da eine eindeutige analytische Function $F(x)$, welche der Gleichung

(1.) $$F(px) = qF(x)$$

genügt, nach § 82, 5 höchstens zwei wesentliche Discontinuitätspunkte, nämlich $x = 0$ und $x = \infty$ besitzen kann, wenn sie deren nicht unendlich viele hat, so wird sie im allgemeinsten Falle eine *transcendente rationale Function im weiteren Sinne* sein. Machen wir zuerst die Annahme

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + \frac{a_{-1}}{x} + \frac{a_{-2}}{x^2} + \cdots,$$

so kann (1.) nur befriedigt sein, wenn alle Glieder bis auf eines verschwinden; wir haben dann

$$(2.) \qquad F(x) = a_k x^k$$

und $q = p^k$. Dies ist die einzige *algebraische rationale* Function, welche (1.) befriedigt.

2. In allen übrigen Fällen kann $F(x)$ keine Function sein, welche nirgends ausser in $x = 0$ und $x = \infty$ unendlich wird; da $\frac{1}{F(x)}$ dieselbe Eigenschaft besitzt, wird $F(x)$ auch Nullpunkte haben müssen. Wird aber $F(x)$ in $x = a$ Null oder unendlich, so ist wegen (1.) das Gleiche in den Punkten

$$a,\ ap,\ ap^2,\ \cdots \frac{a}{p},\ \frac{a}{p^2},\ \cdots$$

der Fall. Wir ziehen hieraus den Schluss (vgl. § 49), *dass $F(x)$ aus denselben Elementartranscendenten wie die multiplicatorisch periodischen Transcendenten erster Gattung zusammengesetzt ist.* Dass kein nirgends Null werdender Factor hinzutreten kann, lässt sich wie dort nachweisen.

Es ist

$$(3.) \qquad F(x) = C \frac{\varepsilon\left(p, -\frac{x}{a_1}\right) \varepsilon\left(p, -\frac{x}{a_2}\right) \cdots \varepsilon\left(p, -\frac{x}{a_n}\right)}{\varepsilon\left(p, -\frac{x}{b_1}\right) \varepsilon\left(p, -\frac{x}{b_1}\right) \cdots \varepsilon\left(p, -\frac{x}{b_n}\right)},$$

wobei

$$(4.) \qquad a_1 a_2 \cdots a_n = b_1 b_2 \cdots b_n q$$

ist. Die Zahl der Factoren in Zähler und Nenner ist die gleiche, kann jedoch — im Gegensatze zu den Functionen erster Gattung — auch 1 betragen.

3. Bezeichnet $f(x)$ ebenfalls eine Function, welche (1.) genügt, so hat

$$\frac{F(x)}{f(x)}$$

die multiplicatorische Periode p; man kann daher jede Function $F(x)$ durch irgend eine solche, multiplicirt mit einer multiplicatorisch periodischen Function erster Gattung, ausdrücken.

§ 85.

Partialbruchreihen und Potenzreihen.

1. Indem wir jetzt p^2 als Periode wählen und $\frac{1}{a}$ statt q schreiben, führen wir als einfachste hierher gehörige Transcendente

$$H_{\frac{1}{a}}(p, x) = \frac{\eta(p, ax)}{\eta(p, x)} \tag{1.}$$

ein. Es ist dann

$$H_{\frac{1}{a}}(p, x) = \frac{(1 + pax)(1 + p^3ax)\cdots\left(1 + \frac{p}{ax}\right)\left(1 + \frac{p^3}{ax}\right)\cdots}{(1 + px)(1 + p^3x)\cdots\left(1 + \frac{p}{x}\right)\left(1 + \frac{p^3}{x}\right)\cdots} \tag{2.}$$

und

$$H_{\frac{1}{a}}(p, x) = \frac{1 + p\left(ax + \frac{1}{ax}\right) + p^4\left(a^2x^2 + \frac{1}{a^2x^2}\right) + \cdots}{1 + p\left(x + \frac{1}{x}\right) + p^4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \cdots}, \tag{3.}$$

und es gilt die Relation

$$H_{\frac{1}{a}}(p, p^2x) = \frac{1}{a} H_{\frac{1}{a}}(p, x). \tag{4.}$$

2. Um $H_{\frac{1}{a}}(p, x)$ in eine Partialbruchreihe zu entwickeln, setzen wir

$$H_{\frac{1}{a}}(p, x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + \frac{A_{-1}}{x} + \frac{A_{-2}}{x^2} + \cdots$$
$$+ \frac{a_1}{1 + px} + \frac{a_3}{1 + p^3x} + \cdots + \frac{a_{-1}}{1 + \frac{p}{x}} + \frac{a_{-2}}{1 + \frac{p^3}{x}} + \cdots.$$

Dieser Ausdruck muss übereinstimmen mit

$$aH_{\frac{1}{a}}(p, p^2x) = a\left\{A_0 + a_{-1} + A_1p^2x + A_2p^4x^2 + \cdots\right.$$
$$+ \frac{A_{-1}}{p^2x} + \frac{A_{-2}}{p^4x^2} + \cdots + \frac{a_1}{1 + p^3x} + \frac{a_3}{1 + p^5x} + \cdots - \frac{a_{-1}}{1 + px}$$
$$\left. + \frac{a_{-3}}{1 + \frac{p}{x}} + \frac{a_{-5}}{1 + \frac{p^3}{x}} + \cdots\right\}.$$

Durch Coefficientenvergleichung finden wir, indem wir $a_1 = c$ setzen,

$$A_0 = \frac{c}{a-1}$$

$$a_{2k+1} = ca^k$$

$$a_{-(2k+1)} = -\frac{c}{a^{k+1}}.$$

Da indessen die so gebildete Reihe divergirt, fügen wir jedem Gliede eine Constante bei und untersuchen dann von Neuem, ob die erhaltene Reihe der Gleichung (4.) genügt, welche zusammen mit den Unendlichkeitspunkten die Function $H_{\frac{1}{a}}(p,x)$ bis auf einen constanten Factor bestimmt. Wir setzen

$$H_{\frac{1}{a}}(p,x) = C + c\left\{\left(\frac{1}{1+px} - \frac{1}{1+p}\right) + a\left(\frac{1}{1+p^3x} - \frac{1}{1+p^3}\right)\right.$$
$$+ a^2\left(\frac{1}{1+p^5x} - \frac{1}{1+p^5}\right) + \cdots - \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1+\frac{p}{x}} - \frac{1}{1+p}\right)$$
$$\left. - \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{1+\frac{p^3}{x}} - \frac{1}{1+p^3}\right) - \cdots\right\};$$

dies soll identisch sein mit

$$aH_{\frac{1}{a}}(p,p^2x) = aC - c + ac\left\{\left(\frac{1}{1+p^3x} - \frac{1}{1+p}\right)\right.$$
$$+ a\left(\frac{1}{1+p^5x} - \frac{1}{1+p^3}\right) + \cdots + \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1+px} + \frac{1}{1+p}\right)$$
$$\left. - \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{1+\frac{p}{x}} - \frac{1}{1+p^3}\right) - \cdots\right\},$$

was wirklich zutrifft, wenn wir setzen

$$C = aC - c + c\left\{\frac{2}{1+p} + a\left(\frac{1}{1+p^3} - \frac{1}{1+p}\right)\right.$$
$$+ a^2\left(\frac{1}{1+p^5} - \frac{1}{1+p^3}\right) + \cdots + \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1+p^3} - \frac{1}{1+p}\right)$$
$$\left. + \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{1+p^5} - \frac{1}{1+p^3}\right) + \cdots\right\}$$
$$= aC + c\left\{\frac{1-p}{1+p} + \frac{p(1-p^2)}{(1+p)(1+p^3)}\left(a + \frac{1}{a}\right) + \frac{p^3(1-p^2)}{(1+p^3)(1+p^5)}\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + \cdots\right\}.$$

woraus wir finden

$$C = \frac{c(1-p^2)}{1-a}\left\{\frac{1}{(1+p)^2} + \frac{p}{(1+p)(1+p^3)}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{p^3}{(1+p^3)(1+p^5)}\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right) + \cdots\right\}.$$

Doch bestimmen wir C und c einfacher in folgender Weise. Es ist

$$H_{\frac{1}{a}}(p,1) = \frac{\eta(p,a)}{\eta(p,1)} = C, \tag{5.}$$

woraus mit Hülfe von (3.) weiter folgt

$$H_{\frac{1}{a}}(p,-1) = \frac{\eta(p,-a)}{\eta(p,-1)}$$
$$= \frac{\eta(p,a)}{\eta(p,1)} + \frac{2c}{a^{\frac{1}{2}}}\sum_0^\infty{}_n \frac{p^{2n+1}}{1-p^{4n+2}}\left(a^{\frac{2n+1}{2}} - \frac{1}{a^{\frac{2n+1}{2}}}\right)$$

oder

$$\frac{\eta(p,-a)}{\eta(p,-1)} = \frac{\eta(p,a)}{\eta(p,1)} + \frac{ic\eta_2{}^2(p^2,1)}{a^{\frac{1}{2}}} S\left(p^2, a^{\frac{1}{2}}\right)$$

oder

$$c = \frac{ia^{\frac{1}{2}}\eta_0\left(p^2,a^{\frac{1}{2}}\right)\left[\eta(p,a)\eta(p,-1) - \eta(p,-a)\eta(p,1)\right]}{\eta_1\left(p^2,a^{\frac{1}{2}}\right)\eta_2(p^2,1)\eta_3(p^2,1)\eta(p,1)\eta(p,-1)}. \tag{6.}$$

Nun ist aber mit Berücksichtigung von

$$\eta(p,p^2x) = \frac{1}{px}\eta(p,x):$$

$$\eta(p,a)\eta(p,-1) - \eta(p,-a)\eta(p,1)$$
$$= pa\left[\eta(p,p^2a)\eta(p,-1) + \eta(p,-p^2a)\eta(p,1)\right]$$
$$= 2pa\eta^2(p^2,-p^2a)$$

und weiter

$$\eta_0\left(p^2,a^{\frac{1}{2}}\right) = \eta(p^2,-a),$$
$$\eta_1\left(p^2,a^{\frac{1}{2}}\right) = -ia^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}\eta(p^2,-p^2,a),$$
$$\eta^2\left(p^2,1\right) = p^{\frac{1}{2}}\eta(p^2,p^2),$$
$$\eta_3\left(p^2,1\right) = \eta(p^2,1).$$

Setzen wir dies Alles ein, so folgt

$$c = -2a\,\frac{\eta(p^2,-a)\eta(p^2,-p^2a)}{\eta(p^2,p^2)\eta(p^2,1)\eta(p,1)\eta(p,-1)}.$$

Weiter haben wir mit Hülfe der Transformationsformeln

$$\eta(p^2, -a)\eta(p^2, -p^2a) = \frac{\eta(p,p)}{2}\eta(p,-a),$$

$$\eta(p^2, 1)\eta(p^2, p^2) = \frac{\eta(p,p)}{2}\eta(p,p),$$

und es wird

(7.) $$c = -2a\frac{\eta(p,-pa)}{\eta(p,p)\eta(p,1)\eta(p,-1)} = -2ap^{\frac{1}{4}}\frac{\eta(p,-pa)}{\eta_0\,\eta_2\,\eta_3}$$

$$= -\frac{2ia^{\frac{1}{2}}\eta_1\left(p, a^{\frac{1}{2}}\right)}{\eta_0\,\eta_2\,\eta_3}.$$

Wir haben somit

(8.) $$H_{\frac{1}{a}}(p,x) = \frac{\eta(p,a)}{\eta(p,1)} - 2i\frac{\eta_1\left(p,a^{\frac{1}{2}}\right)}{\eta_0\,\eta_2\,\eta_3}\cdot$$

$$\cdot\sum_0^\infty{}_n\left\{a^{\frac{2n+1}{2}}\left(\frac{1}{1+p^{2n+1}x} - \frac{1}{1+p^{2n+1}}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{a^{\frac{2n+1}{2}}}\left(\frac{1}{1+\frac{p^{2n+1}}{x}} - \frac{1}{1+p^{2n+1}}\right)\right\}$$

oder

(9.) $$H_{\frac{1}{a}}(p,x) = \frac{\eta(p,a)}{\eta(p,1)} + 2i\frac{\eta_1\left(p,a^{\frac{1}{2}}\right)}{\eta_0\,\eta_2\,\eta_3}\left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$\cdot\sum_0^\infty{}_n\frac{p^{2n+1}}{1+p^{2n+1}}\left(\frac{a^{\frac{2n+1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{1+p^{2n+1}x} + \frac{\frac{1}{a^{\frac{2n-1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}}{1+\frac{p^{2n+1}}{x}}\right)$$

oder

(10.) $$H_{\frac{1}{a}}(p,x) = \frac{\eta(p,a)}{\eta(p,1)} + 2i\frac{\eta_1\left(p,a^{\frac{1}{2}}\right)}{\eta_0\,\eta_2\,\eta_3}\left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$\cdot\sum_0^\infty{}_n\frac{p^{2n+1}}{1+p^{2n+1}}\cdot\frac{a^{\frac{2n+1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{a^{\frac{2n+1}{2}}x^{\frac{1}{2}}} + p^{2n+1}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{2n+1}{2}}} + \frac{a^{\frac{2n+1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)}{1+p^{2n+1}\left(x+\frac{1}{x}\right)+p^{4n+2}}.$$

Diese Reihen convergiren für beliebige x, aber nur für solche a, welche der Bedingung genügen

$$\left|p^2\right| < \left|a\right| < \left|\frac{1}{p^2}\right|.$$

Liegt a ausserhalb dieser Grenzen, so können wir $a = \alpha p^{2k}$ setzen, so dass α jener Bedingung genügt, während k eine positive oder negative ganze Zahl ist. Es ist aber

$$H_{\frac{1}{a}}(p, x) = \frac{\eta(p, ax)}{\eta(p, x)} = \frac{\eta(p, \alpha p^{2k} x)}{\eta(p, x)} = \frac{C}{x^k} \frac{\eta(p, \alpha x)}{\eta(p, x)}$$

und jetzt hat die Umwandlung in eine Reihe keine Schwierigkeit mehr*).

3. Um eine Entwicklung nach steigenden und fallenden Potenzen von x herzustellen, gehen wir von (8.) aus und erhalten

$$H_{\frac{1}{a}}(p, x) = \frac{\eta(p, a)}{\eta(p, 1)} + 2i \frac{\eta_1\left(p, a^{\frac{1}{2}}\right)}{\eta_0 \eta_2 \eta_3}$$

$$\cdot \left\{ \sum_1^\infty {}^n (-1)^{n+1} p^n \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} x^n}{1 - p^{2n} a} - \frac{\frac{1}{a^{\frac{1}{2}} x^n}}{1 - \frac{p^{2n}}{a}} \right) \right.$$

$$\left. + \sum_1^\infty {}^n (-1)^n p^n \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{1 - p^{2n} a} - \frac{\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}}{1 - \frac{p^{2n}}{a}} \right) \right\}.$$

Nun ist aber

$$S\left(-p, ip^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{2i}{\eta_2^2(-p, 1)} \sum_0^\infty {}^n (-1)^{\frac{2n+1}{2}} p^{\frac{2n+1}{2}}$$

$$\cdot \left[\frac{ip^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}}{1 - p^{2n+2} a} + \frac{\frac{i}{p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}}}{1 - \frac{p^{2n}}{a}} \right]$$

$$= -\frac{2i}{\eta_2^2(-p, 1)} \sum_0^\infty {}^n (-1)^{n+1} \left[p^{n+1} \frac{a^{\frac{1}{2}}}{1 - p^{2n+2} a} + p^n \frac{\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}}{1 - \frac{p^{2n}}{a}} \right]$$

---

*) Die Irrationalität, die durch das Vorkommen von $a^{\frac{1}{2}}$ (ähnlich wie von $x^{\frac{1}{2}}$) in die Formel zu kommen scheint, ist nur eine scheinbare, da sie sich gegen die in $\eta_1\left(p, a^{\frac{1}{2}}\right)$ enthaltene hebt.

$$= -\frac{2i}{\eta_2^2(p,1)}\left\{\sum_1^\infty{}^n(-1)^n p^n\left[\frac{a^{\frac{1}{2}}}{1-p^{2n}a}-\frac{\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}}{1-\frac{p^{2n}}{a}}\right]-\frac{\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}}{1-\frac{1}{a}}\right\},$$

also

$$\sum_1^\infty{}^n(-1)^n p^n\left[\frac{a^{\frac{1}{2}}}{1-p^{2n}a}-\frac{\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}}{1-\frac{p^{2n}}{a}}\right] = -\frac{\eta_2^2}{2}\cdot S\left(-p, ip^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}\right)-\frac{a^{\frac{1}{2}}}{1-a}$$

$$= -\frac{\eta_0\,\eta_2}{2}\cdot\frac{\eta_1\left(p, ip^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}\right)}{\eta_3\left(p, ip^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}\right)}-\frac{a^{\frac{1}{2}}}{1-a}$$

$$= i\cdot\frac{\eta_0\,\eta_2}{2}\cdot\frac{\eta_3\left(p, a^{\frac{1}{2}}\right)}{\eta_1\left(p, a^{\frac{1}{2}}\right)}-\frac{a^{\frac{1}{2}}}{1-a} = i\,\frac{\eta_0\,\eta_2}{2}\cdot\frac{\eta(p, a)}{\eta_1\left(p, a^{\frac{1}{2}}\right)}-\frac{a^{\frac{1}{2}}}{1-a}.$$

Somit wird

$$(11.)\qquad H_{\frac{1}{a}}(p,x) = 2i\,\frac{\eta_1\left(p, a^{\frac{1}{2}}\right)}{\eta_0\,\eta_2\,\eta_3}$$

$$\cdot\left\{-\frac{a^{\frac{1}{2}}}{1-a}+\sum_1^\infty{}^n(-1)^{n+1}p^n\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{1-p^{2n}a}-\frac{\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}x^n}}{1-\frac{p^{2n}}{a}}\right)\right\},$$

eine Reihe, welche für beliebige a und für

$$|p| < |x| < \left|\frac{1}{p}\right|$$

convergirt und in Bezug auf den Parameter a eine Partialbruchreihe ist.

4. Einfacher ist die Entwicklung derjenigen Functionen vom Typus 1, welche den drei Transcendenten $S(p,x)$, $C(p,x)$ und $D(p,x)$ entsprechen und eine doppelte Reihe von Null- und Unendlichkeitspunkten besitzen. Wir definiren:

$$(12.)\qquad S_{\frac{1}{a^2}}(p,x) = \frac{\eta_3}{\eta_2}\,\frac{\eta_1(p, ax)}{\eta_0(p,x)}$$

$$(13.)\qquad C_{\frac{1}{a^2}}(p,x) = \frac{\eta_0}{\eta_2}\,\frac{\eta_2(p, ax)}{\eta_0(p,x)}$$

$$(14.)\qquad D_{\frac{1}{a^2}}(p,x) = \frac{\eta_0}{\eta_3}\,\frac{\eta_3(p, ax)}{\eta_0(p,x)}$$

und haben die Relationen:

(15.) $$S_{\frac{1}{a^2}}(p, px) = \frac{1}{a^2} S_{\frac{1}{a^2}}(p, x),$$

(16.) $$C_{\frac{1}{a^2}}(p, px) = -\frac{1}{a^2} C_{\frac{1}{a^2}}(p, x),$$

(17.) $$D_{\frac{1}{a^2}}(p, px) = -\frac{1}{a^2} D_{\frac{1}{a^2}}(p, x)$$

und

(18.) $$S_{\frac{1}{a^2}}(p, -x) = -S_{\frac{1}{a^2}}(p, x),$$

(19.) $$C_{\frac{1}{a^2}}(p, -x) = -C_{\frac{1}{a^2}}(p, x),$$

(20.) $$D_{\frac{1}{a^2}}(p, -x) = D_{\frac{1}{a^2}}(p, x),$$

durch welche in Verbindung mit den Unendlichkeitswerthen diese Functionen bis auf eine multiplicatorische Constante bestimmt sind, so dass sich die Partialbruchreihen aus ihnen herleiten lassen.

5. Mit Hülfe dieser Gleichungen finden wir ohne Schwierigkeit

$$S_{\frac{1}{a^2}}(p, x) = c \sum_0^\infty {}_n\, p^n \left[\frac{a^{2n+1} x}{1 - p^{2n+1} x} - \frac{\frac{1}{a^{2n+1} x}}{1 - \frac{p^{2n+1}}{x}} \right].$$

Setzen wir $x = 1$, so folgt

$$S_{\frac{1}{a^2}}(p, 1) = \frac{\eta_3}{\eta_2} \cdot \frac{\eta_1(p, a)}{\eta_0} = c \sum_0^\infty {}_n \frac{p^n}{1 - p^{2n+1}} \left(a^{2n+1} - \frac{1}{a^{2n+1}} \right)$$

$$= \frac{ic\eta_2{}^2 S(p, a)}{2p^{\frac{1}{2}}} = \frac{ic\eta_2 \eta_3 \eta_1(p, a)}{2p^{\frac{1}{2}} \eta_0(p, a)},$$

also

$$c = -\frac{2ip^{\frac{1}{2}} \eta_0(p, a)}{\eta_0 \eta_2{}^2}$$

und somit

(21.) $$S_{\frac{1}{a^2}}(p, x)$$

$$= -\frac{2i\eta_0(p, a)}{\eta_0 \eta_2{}^2} \sum_0^\infty {}_n\, p^{\frac{2n+1}{2}} \left[\frac{a^{2n+1} x}{1 - p^{2n+1} x^2} - \frac{\frac{1}{a^{2n+1} x}}{1 - \frac{p^{2n+1}}{x^2}} \right],$$

worin

$$\left|p^{\frac{1}{2}}\right| < |a| < \left|\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}\right|$$

sein muss. — Die zugehörige Potenzreihe lautet

(22.) $$S_{\frac{1}{a^2}}(p, x)$$

$$= -\frac{2i\eta_0(p, a)}{\eta_0 \eta_2^2} \sum_0^\infty {}_n\, p^{\frac{2n+1}{2}} \left[\frac{a x^{2n+1}}{1 - p^{2n+1} a^2} - \frac{\frac{1}{a x^{2n+1}}}{1 - \frac{p^{2n+1}}{a^2}}\right],$$

gültig für beliebige a und $\left|p^{\frac{1}{2}}\right| < |a| < \left|\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}\right|$. Bemerkenswerth ist, dass die Summen in (21.) und (22.) durch Vertauschung von Parameter und Argument ineinander übergehen; dies hat jedoch nichts Auffälliges, wenn man bedenkt, dass beide Entwicklungen für

$$\frac{i\eta_0 \eta_2 \eta_3 \eta_1(p, ax)}{2\eta_0(p, x)\eta_0(p, a)},$$

eine in a und x symmetrische Function, sind.

6. Ferner ergiebt sich

$$C_{\frac{1}{a^2}}(p, x)$$

$$= c \sum_0^\infty {}_n (-1)^n p^n \left[\frac{a^{2n+1} x}{1 - p^{2n+1} x^2} + \frac{\frac{1}{a^{2n+1} x}}{1 - \frac{p^{2n+1}}{x^2}}\right]$$

oder, da wir für $x = 1$

$$C_{\frac{1}{a^2}}(p, 1) = \frac{\eta_2(p, a)}{\eta_2}$$

$$= c \sum_0^\infty {}_n (-1)^n \frac{p^n}{1 - p^{2n+1}} \left(a^{2n+1} + \frac{1}{a^{2n+1}}\right)$$

$$= c \frac{\eta_2^2}{2p^{\frac{1}{2}}} S(p, ia) = c \frac{\eta_2^2 \eta_3 \eta_2(p, a)}{2p^{\frac{1}{2}} \eta_2 \eta_3(p, a)},$$

also

$$c = \frac{2p^{\frac{1}{2}} \eta_3(p, a)}{\eta_2^2 \eta_3}$$

erhalten:

(23.) $$C_{\frac{1}{a^2}}(p,x)$$

$$= \frac{2\eta_3(p,a)}{\eta_2^{\,2}\eta_3}\sum_0^\infty{}_n (-1)^n p^{\frac{2n+1}{2}}\left[\frac{a^{2n+1}x}{1-p^{2n+1}x^2}+\frac{\frac{1}{a^{2n+1}x}}{1-\frac{p^{2n+1}}{x^2}}\right]$$

$$\left(\left|p^{\frac{1}{2}}\right|<\left|a\right|<\left|\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}\right|\right)$$

und

(24.) $$C_{\frac{1}{a^2}}(p,x)$$

$$= \frac{2\eta_3(p,a)}{\eta_2^{\,2}\eta_3}\sum_0^\infty{}_n p^{\frac{2n+1}{2}}\left[\frac{ax^{2n+1}}{1+p^{2n+1}a^2}+\frac{\frac{1}{ax^{2n+1}}}{1+\frac{p^{2n+1}}{a^2}}\right]$$

$$\left(\left|p^{\frac{1}{2}}\right|<\left|a\right|<\left|\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}\right|\right).$$

7. Die Partialbruchreihe für $D_{\frac{1}{a^2}}(p,x)$ muss wieder durch Zufügung von Constanten zu den einzelnen Gliedern convergent gemacht werden; nachdem wir gefunden

$$D_{\frac{1}{a^2}}(p,x)$$

$$= A + c\sum_0^\infty{}_n (-1)^n \left[a^{2n+1}\left(\frac{1}{1-p^{2n+1}x^2}-\frac{1}{1-p^{2n+1}}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{a^{2n+1}}\left(\frac{1}{1-\frac{p^{2n+1}}{x^2}}-\frac{1}{1-p^{2n+1}}\right)\right],$$

haben wir

$$D_{\frac{1}{a^2}}(p,1) = \frac{\eta_3(p,a)}{\eta_3} = A,$$

$$D_{\frac{1}{a^2}}(p,i) = \frac{\eta_0\,\eta_0(p,a)}{\eta_3^{\,2}} = \frac{\eta_3(p,a)}{\eta_3} - 2c\sum_0^\infty{}_n (-1)^n\frac{p^{2n+1}}{1-p^{4n+2}}$$

$$\cdot\left(a^{2n+1}+\frac{1}{a^{2n+1}}\right)$$

$$= \frac{\eta_3(p,a)}{\eta_3} - c\eta_2^{\,2}(p^2,1)\,S(p^2,ia)$$

oder

$$\frac{\eta_3\eta_3(p,a)-\eta_0\eta_0(p,a)}{\eta_3^2}=c\eta_2(p^2,1)\eta_3(p^2,1)\frac{\eta_2(p^2,a)}{\eta_3(p^2,a)}$$

oder nach einer kleinen Umformung

$$\frac{2a^2p\eta^2(p^2,p^2a^2)}{\eta_3^2}=c\,\frac{ap\eta(p^2,p^2)\eta(p^2,1)\eta(p^2,p^2a^2)}{\eta(p^2,a^2)}$$

oder

$$c=\frac{2a\eta(p^2,p^2a^2)\eta(p^2,a^2)}{\eta(p^2,p^2)\eta(p^2,1)\eta_3^2}=\frac{2a\eta(p,pa^2)}{\eta(p,p)\eta_3^2}=\frac{2\eta_2(p,a)}{\eta_2\eta_3^2},$$

und es folgt

$$(25.)\quad D_{\frac{1}{a^2}}(p,x)=\frac{\eta_3(p,a)}{\eta_3}+\frac{2\eta_2(p,a)}{\eta_2\eta_3^2}$$

$$\cdot\sum_0^\infty{}_n(-1)^n\left[a^{2n+1}\left(\frac{1}{1-p^{2n+1}x^2}-\frac{1}{1-p^{2n+1}}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{a^{2n+1}}\left(\frac{1}{1-\frac{p^{2n+1}}{x^2}}-\frac{1}{1-p^{2n+1}}\right)\right].$$

oder

$$(26.)\quad D_{\frac{1}{a^2}}(p,x)=\frac{\eta_3(p,a)}{\eta_3}+\frac{2\eta_2(p,a)}{\eta_2\eta_3^2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

$$\cdot\sum_0^\infty{}_n(-1)^n\frac{p^{2n+1}}{1-p^{2n+1}}\left(\frac{a^{2n+1}x}{1-p^{2n+1}x^2}-\frac{\frac{1}{a^{2n+1}x}}{1-\frac{p^{2n+1}}{x^2}}\right)$$

$$\left(\left|p\right|<\left|a\right|<\left|\frac{1}{p}\right|\right)$$

und weiter

$$(27.)\quad D_{\frac{1}{a^2}}(p,x)=\frac{\eta_3(p,a)}{\eta_3}+\frac{2\eta_2(p,a)}{\eta_2\eta_3^2}$$

$$\cdot\sum_0^\infty{}_n p^n\left(\frac{ax^{2n}}{1+p^{2n}a^2}+\frac{\frac{1}{ax^{2n}}}{1+\frac{p^{2n}}{a^2}}\right)$$

$$-\sum_0^\infty{}_n p^n\left(\frac{a}{1+p^{2n}a^2}+\frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{p^{2n}}{a^2}}\right).$$

Nun ist aber

$$\sum_0^\infty {}_n\, p^n \left(\frac{a}{1+p^{2n}a^2} + \frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{p^{2n}}{a^2}} \right) = \frac{\eta_2{}^2}{2} S\left(p, ip^{\frac{1}{2}} a\right) + \frac{a}{1+a^2}$$

$$= \frac{\eta_2\,\eta_3\,\eta_3(p,a)}{2\,\eta_2(p,a)} + \frac{a}{1+a^2},$$

also

$$(28.)\qquad D_{\frac{1}{a^2}}(p,x)$$

$$= \frac{2\,\eta_2(p,a)}{\eta_2\,\eta_3{}^2} \left\{ -\frac{a}{1+a^2} + \sum_0^\infty {}_n\, p^n \left(\frac{a x^{2n}}{1+p^{2n}a^2} + \frac{\frac{1}{a x^{2n}}}{1+\frac{p^{2n}}{a^2}} \right) \right\}$$

$$= \frac{2\,\eta_2(p,a)}{\eta_2\,\eta_3{}^2} \left\{ \frac{a^2}{1+a^2} + \sum_0^\infty {}_n\, p^n \left(\frac{a x^{2n}}{1+p^{2n}a^2} + \frac{\frac{1}{a x^{2n}}}{1+\frac{p^{2n}}{a^2}} \right) \right\}$$

$$\left(\left|p^{\frac{1}{2}}\right| < |x| < \left|\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}\right| \right).$$

Übrigens lassen sich die Formeln für $D_{\frac{1}{a^2}}(p, x)$ auch aus denen für $H_{\frac{1}{a}}(p, x)$ herleiten, und umgekehrt.

§ 86.

Die doppelt periodischen Functionen zweiter Gattung vom Typus 1.

1. Setzen wir in den Formeln des vorigen Paragraphen $x = e^{\pi i w}$, $a = e^{\pi i b}$, $p = e^{\pi i \tau}$, so erhalten wir die entsprechenden *doppelt periodischen* Transcendenten und deren Entwicklungen, die zum Theil eine Weiterentwicklung zulassen. Wir setzen

$$(1.)\qquad H_1(\tau, b, w) = \frac{\vartheta(\tau, w+b)}{\vartheta(\tau, w)},$$

$$(2.)\qquad S_1(\tau, 2b, w) = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\,\frac{\vartheta_1(\tau, w+b)}{\vartheta_0(\tau, w)},$$

$$(3.)\qquad C_1(\tau, 2b, w) = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\,\frac{\vartheta_2(\tau, w+b)}{\vartheta_0(\tau, w)},$$

$$(4.)\qquad D_1(\tau, 2b, w) = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\,\frac{\vartheta_3(\tau, w+b)}{\vartheta_0(\tau, w)}.$$

2. Aus der Reihe § 85, (9.) wird, wenn wir beachten, dass

$$a^{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{p^{2n+1}}{1+p^{2n+1}}\,\frac{\left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)x^{\frac{1}{2}}}{1+p^{2n+1}x}$$

$$= a^{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{1}{p^{\frac{2n+1}{2}} + \frac{1}{p^{\frac{2n+1}{2}}}}\,\frac{x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}{p^{\frac{2n+1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{p^{\frac{2n+1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}}$$

$$= i\,\frac{a^{\frac{2n+1}{2}}}{2}\,\frac{\sin\frac{w\pi}{2}}{\cos\frac{2n+1}{2}\tau\pi\cdot\cos\left(\frac{2n+1}{2}\tau + \frac{w}{2}\right)\pi}$$

$$= i\,\frac{a^{\frac{2n+1}{2}}}{2}\left[\operatorname{cotg}\frac{2n+1}{2}\tau\pi - \operatorname{cotg}\left(\frac{2n+1}{2}\tau + \frac{w}{2}\right)\pi\right]$$

u. s. w. ist,

$$(5.)\qquad H_{\frac{1}{a}}(e^{\pi i\tau}, e^{\pi i w}) = H_1(\tau, b, w)$$

$$= \frac{\eta(p, a)}{\eta(p, 1)} - \frac{\eta_1\left(p, a^{\frac{1}{2}}\right)}{\eta_0\,\eta_2\,\eta_3}$$
$$\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, a^{\frac{2n+1}{2}}\left[\operatorname{cotg}\frac{2n+1}{2}\tau\pi - \operatorname{cotg}\left(\frac{2n+1}{2}\tau + \frac{w}{2}\right)\pi\right]$$

$$= \frac{\vartheta(\tau, b)}{\vartheta_3} - \frac{\vartheta_1\left(\tau, \frac{b}{2}\right)}{\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3}$$
$$\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, e^{\frac{2n+1}{2}b\pi i}\left[\operatorname{cotg}\frac{2n+1}{2}\tau\pi - \operatorname{cotg}\left(\frac{2n+1}{2}\tau + \frac{w}{2}\right)\pi\right].$$

Da aber für $\mu = \infty$

$$\operatorname{cotg}\pi z = \frac{1}{\pi}\sum_{-\mu}^{+\mu}{}_m\,\frac{1}{z+m}$$

ist, so folgt

$$(6.)\qquad H_{\frac{1}{a}}(e^{\pi i\tau}, e^{\pi iw}) = H_1(\tau, b, w)$$

$$= \frac{\vartheta(\tau, b)}{\vartheta_3} - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\vartheta_1\left(\tau, \frac{b}{2}\right)}{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}$$

$$\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n e^{\frac{2n+1}{2}b\pi i}\sum_{-\mu}^{+\mu}{}_m\left[\frac{1}{\frac{2n+1}{2}\tau+m} - \frac{1}{\frac{2n+1}{2}\tau+\frac{w}{2}+m}\right].$$

3. In ähnlicher Weise ergeben sich folgende Reihen:

$$(7.)\qquad S_{\frac{1}{a^2}}(e^{\pi i\tau}, e^{\pi iw}) = S_1(\tau, 2b, w)$$

$$= \frac{\vartheta_0(\tau, b)}{\vartheta_0\vartheta_2^2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\frac{e^{(2n+1)b\pi i}}{\sin\pi\left(\frac{2n+1}{2}\tau+w\right)}$$

und

$$(8.)\quad S_1(\tau, 2b, w) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\vartheta_0(\tau, b)}{\vartheta_0\vartheta_2^2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n e^{(2n+1)b\pi i}\sum_{-\mu}^{+\mu}{}_m\frac{(-1)^m}{\frac{2n+1}{1}\tau+w+m};$$

$$(9.)\quad C_1(\tau, 2b, w) = \frac{\vartheta_3(\tau, b)}{\vartheta_2^2\vartheta_3}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\frac{(-1)^n e^{(2n+1)b\pi i}}{\sin\pi\left(\frac{2n+1}{2}\tau+w\right)}$$

und

$$(10.)\qquad C_1(\tau, 2b, w)$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\vartheta_3(\tau, b)}{\vartheta_2^2\vartheta_3}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n e^{(2n+1)b\pi i}\sum_{-\mu}^{+\mu}{}_m\frac{(-1)^m}{\frac{2n+1}{2}\tau+w+m};$$

$$(11.)\qquad D_1(\tau, 2b, w)$$

$$= \frac{\vartheta_3(\tau, b)}{\vartheta_3} - i\frac{\vartheta_2(\tau, b)}{\vartheta_2\vartheta_3^2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\frac{e^{(2n+1)b\pi i}\sin w\pi}{\sin\frac{2n+1}{2}\tau\pi\cdot\sin\left(\frac{2n+1}{2}\tau+w\right)\pi}$$

oder

$$(12.)\qquad D_1(\tau, 2b, w) = \frac{\vartheta_3(\tau, b)}{\vartheta_3} - i\frac{\vartheta_2(\tau, b)}{\vartheta_0\vartheta_3^2}$$

$$\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n e^{(2n+1)b\pi i}\left[\operatorname{cotg}\frac{2n+1}{2} - \operatorname{cotg}\left(\frac{2n+1}{2}\tau+w\right)\pi\right]$$

und

(13.) $$D_1(\tau, 2b, w) = \frac{\vartheta_3(\tau, b)}{\vartheta_3} - \frac{i}{\pi} \cdot \frac{\vartheta_2(\tau, b)}{\vartheta_0 \vartheta_3^2}$$

$$\cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n e^{(2n+1)b\pi i} \sum_{-\mu}^{+\mu}{}_m \left[\frac{1}{\frac{2n+1}{2}\tau + m} - \frac{1}{\frac{2n+1}{2}\tau + w + m} \right].$$

§ 87.

Einführung der multiplicatorisch periodischen Functionen zweiter Gattung vom Typus 2.

1. Soll die eindeutige, analytische Function $F(x)$ der Gleichung

(1.) $$F(px) = 1 + F(x)$$

genügen, so werden wir, da $F(x)$ wieder keine nirgends unendlich werdende Function sein kann, dasselbe als Quotienten zweier unendlichen Potenzreihen mit positiven und negativen Potenzen annehmen dürfen. Wird $F(x)$ für $x = a$ unendlich, so ist dies wegen (1.) auch für

$$x = a,\ ap,\ ap^2,\ \cdots \frac{a}{p},\ \frac{a}{p^2},\ \cdots$$

der Fall, während für die Nullpunkte dieser Schluss nicht zutrifft; der Nenner wird daher ein Product von Functionen $\varepsilon\left(p, -\frac{x}{a}\right)$ sein, während der Zähler in anderer Weise zu bestimmen ist.

2. Befriedigt auch $f(x)$ die Gleichung (1.), so ist

$$F(x) - f(x)$$

multiplicatorisch periodisch; haben wir daher *eine* Function der fraglichen Art hergeleitet, so finden wir *alle* übrigen aus derselben durch Hinzufügen einer multiplicatorisch periodischen Function erster Gattung. Es erscheint hiernach gerechtfertigt, wenn wir vorläufig nur den einfachsten Fall weiter verfolgen.

3. Nehmen wir, indem wir p durch p^2 ersetzen,

(2.) $$F(x) = \frac{\varphi(x)}{\eta(p, x)},$$

so wird aus (1.)

$$\frac{\varphi(p^2x)}{\eta(p,p^2x)} = \frac{px\varphi(p^2x)}{\eta(p,x)} = 1 + \frac{\varphi(x)}{\eta(p,x)},$$

also

$$(3.) \qquad px\varphi(p^2x) = \eta(p,x) + \varphi(x).$$

Wenn wir nun

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + \frac{a_{-1}}{x} + \frac{a_{-2}}{x^2} + \cdots$$

setzen und die Reihenentwicklung

$$\eta(p,x) = 1 + p\left(x + \frac{1}{x}\right) + p^4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \cdots$$

einfügen, so giebt die Coefficientenvergleichung

$$a_kp^{2k+1} = p^{(k+1)^2} + a_{k+1},$$

also

$$a_0 = c,$$
$$a_1 = cp - p,$$
$$a_2 = cp^4 - 2p^4,$$
$$a_3 = cp^9 - 3p^9$$
$$\vdots$$
$$a_k = cp^{k^2} - kp^{k^2}$$

und somit

$$(4.) \qquad \varphi(x) = c\eta(p,x) - \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, np^{n^2}x^n.$$

Hierin können wir $c = 0$ setzen, da sonst doch nur zu $F(x)$ eine irrelevante additive Constante hinzutreten würde. Das zweite Glied können wir in einfacherer Form darstellen, wenn wir bedenken, dass

$$\eta'(p,x) = \frac{d\eta(p,x)}{dx} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, np^{n^2}x^{n-1}$$

ist; wir haben

$$(5.) \qquad \varphi(x) = -x\eta'(p,x).$$

In der Folge setzen wir

$$(6.) \qquad A(p,x) = x\frac{\eta'(p,x)}{\eta(p,x)}$$

und haben die Functionalgleichung

$$(7.) \qquad A(p,p^2x) = -1 + A(p,x).$$

§ 88.

Partialbruchreihen und Potenzreihen.

1. Ausser der soeben gefundenen Transcendenten

$$A(p, x) = x \frac{\eta'(p, x)}{\eta(p, x)}$$

führen wir noch vier andere Functionen ein, welche die Relation

$$(1.) \qquad F(px) = F(x) - 1$$

befriedigen:

$$(2.) \qquad A_0(p, x) = A(p, -x^2) = \frac{x}{2} \frac{\eta_0'(p, x)}{\eta_0(p, x)},$$

$$(3.) \qquad A_1(p, x) = \frac{1}{2} + A(p, -px^2) = \frac{x}{2} \frac{\eta_1'(p, x)}{\eta_1(p, x)},$$

$$(4.) \qquad A_2(p, x) = \frac{1}{2} + A(p, px^2) = \frac{x}{2} \frac{\eta_2'(p, x)}{\eta_2(p, x)},$$

$$(5.) \qquad A_3(p, x) = A(p, x^2) = \frac{x}{2} \frac{\eta_3'(p, x)}{\eta_3(p, x)}.$$

2. Um die Partialbruchreihe für $A(p, x)$ zu finden, setzen wir

$$A(p, x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^n A_n x^n + \sum_0^{\infty} {}^n \frac{a_{2n+1}}{1 + p^{2n+1} x} + \sum_0^{\infty} {}^n \frac{b_{2n+1}}{1 + \frac{p^{2n+1}}{x}},$$

führen diesen Ausdruck in

$$A(p, p^2 x) = A(p, x) - 1$$

ein und finden dann durch Coefficientenvergleichung

$$A_0 = c, \quad A_k = 0,$$
$$a_{2k+1} = 1,$$
$$b_{2k+1} = -1.$$

Die Reihe, an sich divergent, convergirt bei der Anordnung

$$c + \left(\frac{1}{1 + px} - \frac{1}{1 + \frac{p}{x}}\right) + \left(\frac{1}{1 + p^3 x} - \frac{1}{1 + \frac{p^3}{x}}\right) + \cdots;$$

doch müssen wir von Neuem untersuchen, ob sie auch wirklich der Bestimmungsgleichung genügt, da die obige Coefficientenbestimmung nur bei *absoluter* Convergenz gültig ist.

Brechen wir die Reihe bei einem beliebig weit entfernten Gliede ab, setzen wir also

$$\varphi(x) = c + \left(\frac{1}{1+px} - \frac{1}{1+\frac{p}{x}}\right) + \left(\frac{1}{1+p^3x} - \frac{1}{1+\frac{p^3}{x}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{1+p^{2n+1}x} - \frac{1}{1+\frac{p^{2n+1}}{x}}\right),$$

so ist

$$\varphi(p^2x) = c - 1 + \left(\frac{1}{1+p^3x} + \frac{1}{1+px}\right) + \left(\frac{1}{1+p^5x} - \frac{1}{1+\frac{p}{x}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{1+p^{2n+3}x} - \frac{1}{1+\frac{p^{2n+1}}{x}}\right)$$

$$= \varphi(x) - 1 + \left(\frac{1}{1+p^{2n+3}x} + \frac{1}{1+\frac{p^{2n+1}}{x}}\right)$$

oder, wenn $n = \infty$ wird,

$$\varphi(p^2x) = \varphi(x) + 1,$$

so dass also in der That die obige Gleichung nicht erfüllt ist; doch sehen wir, dass $-\varphi(x)$ derselben genügt, und wir können nun, weil $c = 0$ sein muss (durch Einsetzen von $x = 1$ überzeugt man sich davon, da $\eta'(p, 1) = 0$ ist), setzen

$$(6.)\qquad A(p, x) = \sum_0^\infty {}_n \left[\frac{1}{1+\frac{p^{2n+1}}{x}} - \frac{1}{1+p^{2n+1}x}\right]$$

oder

$$(7.)\qquad A(p, x) = \left(x - \frac{1}{x}\right) \sum_0^\infty {}_n \frac{p^{2n+1}}{1 + p^{2n+1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + p^{4n+2}}$$

oder auch, indem wir in (6.) von jedem Gliede 1 abziehen,

$$(8.)\qquad A(p, x) = \sum_0^\infty {}_n \frac{p^{2n+1}x}{1+p^{2n+1}x} - \sum_0^\infty {}_n \frac{\frac{p^{2n+1}}{x}}{1+\frac{p^{2n+1}}{x}};$$

(7.) und (8.) convergiren unabhängig von der Anordnung.

2. Als Potenzreihe ergiebt sich aus (6.)

$$(9.)\qquad A(p,x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{n} (-1)^{n+1} \frac{p^n\left(x^n - \frac{1}{x^n}\right)}{1-p^{2n}};$$

Convergenzbedingung: $\left|p\right| < \left|x\right| < \left|\frac{1}{p}\right|$.

3. Führen wir in die gefundenen Reihen an Stelle von x

$$-x^2, \quad -px^2, \quad px^2, \quad x^2$$

ein, so ergeben sich die weiteren:

$$(10.)\qquad A_0(p,x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{n} \left[\frac{1}{1-\frac{p^{2n+1}}{x^2}} - \frac{1}{1-p^{2n+1}x^2}\right],$$

$$(11.)\quad A_0(p,x) = -\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\sum_{0}^{\infty}{}_{n} \frac{p^{2n+1}}{1-p^{2n+1}\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)+p^{4n+2}},$$

$$(12.)\quad A_0(p,x) = -\sum_{0}^{\infty}{}_{n} \frac{p^{2n+1}x^2}{1-p^{2n+1}x^2} + \sum_{0}^{\infty}{}_{n} \frac{\frac{p^{2n+1}}{x^2}}{1-\frac{p^{2n+1}}{x^2}},$$

$$(13.)\qquad A_0(p,x) = -\sum_{1}^{\infty}{}_{n} \frac{p^n\left(x^{2n}-\frac{1}{x^{2n}}\right)}{1-p^{2n}};$$

$$(14.)\qquad A_1(p,x) = \frac{1}{2} + \left(\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{1}{1-p^2x^2}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{1-\frac{p^2}{x^2}} - \frac{1}{1-p^4x^2}\right) + \left(\frac{1}{1-\frac{p^4}{x^2}} - \frac{1}{1-p^6x^2}\right) + \cdots$$

oder, wenn man bedenkt, dass durch Zusammenstellen der Glieder, welche gleiche Potenzen von p enthalten, die Reihe sich um

$$\left[\frac{1}{1-\frac{p^{2n}}{x^2}}\right]_{n=\infty} = 1$$

vermehrt:

$$(15.)\quad A_1(p,x) = \frac{x^2+1}{2(x^2-1)} + \sum_{1}^{\infty}{}_{n} \left[\frac{1}{1-\frac{p^{2n}}{x^2}} - \frac{1}{1-p^{2n}x^2}\right],$$

$$(16.)\quad A_1(p,x) = \frac{x^2+1}{2(x^2-1)} - \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \sum_1^\infty {}_n \frac{p^{2n}}{1 - p^{2n}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + p^{4n}},$$

$$(17.)\quad A_1(p,x) = \frac{x^2+1}{2(x^2-1)} + \sum_1^\infty {}_n \frac{p^{2n}x^2}{1-p^{2n}x^2} - \sum_1^\infty {}_n \frac{\frac{p^{2n}}{x^2}}{1-\frac{p^{2n}}{x^2}},$$

$$(18.)\quad A_1(p,x) = \frac{x^2+1}{2(x^2-1)} - \sum_1^\infty {}_n \frac{p^{2n}}{1-p^{2n}}\left(x^{2n} - \frac{1}{x^{2n}}\right);$$

$$(19.)\quad A_2(p,x) = \frac{x^2-1}{2(x^2+1)} + \sum_1^\infty {}_n \left[\frac{1}{1+\frac{p^{2n}}{x^2}} - \frac{1}{1+p^{2n}x^2}\right],$$

$$(20.)\quad A_2(p,x) = \frac{x^2-1}{2(x^2+1)} + \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \sum_1^\infty {}_n \frac{p^{2n}}{1 + p^{2n}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + p^{4n}},$$

$$(21.)\quad A_2(p,x) = \frac{x^2-1}{2(x^2+1)} + \sum_1^\infty {}_n \frac{p^{2n}x^2}{1+p^{2n}x^2} - \sum_1^\infty {}_n \frac{\frac{p^{2n}}{x^2}}{1+\frac{p^{2n}}{x^2}},$$

$$(22.)\quad A_2(p,x) = \frac{x^2-1}{2(x^2+1)} + \sum_1^\infty {}_n (-1)^{n+1} \frac{p^{2n}}{1-p^{2n}}\left(x^{2n} - \frac{1}{x^{2n}}\right);$$

$$(23.)\quad A_3(p,x) = \sum_0^\infty {}_n \left[\frac{1}{1+\frac{p^{2n+1}}{x^2}} - \frac{1}{1+p^{2n+1}x^2}\right],$$

$$(24.)\quad A_3(p,x) = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \sum_0^\infty {}_n \frac{p^{2n+1}}{1 + p^{2n+1}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + p^{4n+2}},$$

$$(25.)\quad A_3(p,x) = \sum_0^\infty {}_n \frac{p^{2n+1}x^2}{1+p^{2n+1}x^2} - \sum_0^\infty {}_n \frac{\frac{p^{2n+1}}{x^2}}{1+\frac{p^{2n+1}}{x^2}},$$

$$(26.)\quad A_3(p,x) = \sum_1^\infty {}_n (-1)^{n+1} \frac{p^n\left(x^{2n} - \frac{1}{x^{2n}}\right)}{1-p^{2n}}.$$

§ 89.

Die doppelt periodischen Functionen zweiter Gattung vom Typus 2.

1. Setzen wir in den Formeln des vorigen Paragraphen $p = e^{\pi i \tau}$, $x = e^{\pi i w}$, so erhalten wir die *doppelt periodischen* Transcendenten zweiter Gattung vom Typus 2:

$$(1.)\qquad a(\tau, w) = \pi i A(p, x) = \frac{\vartheta'(\tau, w)}{\vartheta(\tau, w)},$$

$$(2.)\qquad a_0(\tau, w) = 2\pi i A_0(p, x) = \frac{\vartheta_0'(\tau, w)}{\vartheta_0(\tau, w)},$$

$$(3.)\qquad a_1(\tau, w) = 2\pi i A_1(p, x) = \frac{\vartheta_1'(\tau, w)}{\vartheta_1(\tau, w)},$$

$$(4.)\qquad a_2(\tau, w) = 2\pi i A_2(p, x) = \frac{\vartheta_2'(\tau, w)}{\vartheta_2(\tau, w)},$$

$$(5.)\qquad a_3(\tau, w) = 2\pi i A_3(p, x) = \frac{\vartheta_3'(\tau, w)}{\vartheta_3(\tau, w)}.$$

2. Die Partialbruchreihen für diese Functionen lassen folgende Weiterentwicklung zu:

$$(6.)\qquad a(\tau, w) = -\pi \sin w\pi \sum_0^\infty {}^n \frac{1}{\cos(2n+1)\tau\pi + \cos w\pi}$$

$$= -\frac{\pi}{2} \sum_0^\infty {}^n \frac{\sin w\pi}{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\tau + \frac{w}{2}\right)\pi \cdot \cos\left(\frac{2n+1}{2}\tau - \frac{w}{2}\right)\pi}$$

$$= -\frac{\pi}{2} \sum_0^\infty {}^n \left[\operatorname{tg}\left(\frac{2n+1}{2}\tau + \frac{w}{2}\right)\pi + \operatorname{tg}\left(-\frac{2n+1}{2}\tau + \frac{w}{2}\right)\pi\right]$$

$$= -\frac{\pi}{2} \sum_{-\nu-1}^{+\nu} {}^n \operatorname{tg}\left(\frac{2n+1}{2}\tau + \frac{w}{2}\right)\pi$$

und weiter

$$(7.)\qquad a(\tau, w) = \sum_{-\nu-1}^{+\nu} {}^n \sum_{-\mu-1}^{+\mu} {}^m \frac{1}{2m+1+(2n+1)\tau + w},$$

$$\mu = \infty,\ \nu = \infty;$$

$$(8.)\qquad a_0(\tau, w) = 2\pi \sin 2w\pi \sum_0^\infty {}^n \frac{1}{\cos(2n+1)\tau\pi - \cos 2w\pi}$$

$$= \pi \sum_0^\infty {}^n \frac{\sin 2w\pi}{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\tau + w\right)\pi \cdot \sin\left(-\frac{2n+1}{2}\tau + w\right)\pi}$$

$$= \pi \sum_{0}^{\infty}{}^{n} \left[\operatorname{cotg}\left(\frac{2n+1}{2}\tau + w\right)\pi + \operatorname{cotg}\left(-\frac{2n+1}{2}\tau + w\right)\pi\right]$$

$$= \pi \sum_{-\nu-1}^{+\nu}{}^{n} \operatorname{cotg}\left(\frac{2n+1}{2}\tau + w\right)\pi,$$

also

$$(9.) \qquad a_0(\tau, w) = \sum_{-\nu-1}^{+\nu}{}^{n} \sum_{-\mu}^{+\mu}{}^{m} \frac{1}{m + \frac{2n+1}{2}\tau + w};$$

$$(10.) \quad a_1(\tau, w) = \pi \operatorname{cotg} w\pi + 2 \sin 2w\pi \sum_{0}^{\infty}{}^{n} \frac{1}{\cos 2n\tau\pi - \cos 2w\pi}$$

$$= \pi \operatorname{cotg} w\pi + \pi \sum_{0}^{\infty}{}^{n} \frac{\sin 2w\pi}{\sin(n\tau + w)\pi \cdot \sin(-n\tau + w)\pi}$$

$$= \pi \operatorname{cotg} w\pi + \pi \sum_{0}^{\infty}{}^{n} [\operatorname{cotg}(n\tau + w)\pi + \operatorname{cotg}(-n\tau + w)\pi]$$

$$= \pi \sum_{-\nu}^{+\nu}{}^{n} \operatorname{cotg}(n\tau + w)\pi,$$

somit

$$(11.) \qquad a_1(\tau, w) = \sum_{-\nu}^{+\nu}{}^{n} \sum_{-\mu}^{-\mu}{}^{m} \frac{1}{m + n\tau + w};$$

$$(12.) \quad a_2(\tau, w) = -\pi \operatorname{tg} w\pi - 2\pi \sin 2w\pi \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n} \frac{1}{\cos 2n\tau\pi + \cos 2w\pi}$$

$$= -\pi \operatorname{tg} w\pi - \pi \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n} \frac{\sin 2w\pi}{\cos(n\tau + w)\pi \cdot \cos(-n\tau + w)\pi}$$

$$= -\pi \operatorname{tg} w\pi - \pi \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n} [\operatorname{tg}(n\tau + w)\pi + \operatorname{tg}(-n\tau + w)\pi]$$

$$= -\pi \sum_{-\nu}^{+\nu}{}^{n} \operatorname{tg}(n\tau + w)\pi,$$

also

$$(13.) \qquad a_2(\tau, w) = \sum_{-\nu}^{+\nu}{}^{n} \sum_{-\mu}^{+\mu}{}^{m} \frac{1}{\frac{2m+1}{2} + n\tau + w};$$

$$(14.) \quad a_3(\tau, w) = -2\pi \sin 2w\pi \sum_{0}^{\infty}{}^{n} \frac{1}{\cos(2n+1)\tau\pi + \cos 2w\pi}$$

$$= -\pi \sum_{0}^{\infty} \frac{\sin 2w\pi}{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\tau + w\right)\pi \cdot \cos\left(-\frac{2n+1}{2}\tau + w\right)\pi}$$

$$= -\pi \sum_{0}^{\infty}{}_{n} \left[\operatorname{tg}\left(\frac{2n+1}{2}\tau + w\right)\pi + \operatorname{tg}\left(-\frac{2n+1}{2}\tau + w\right)\pi\right]$$

$$= -\pi \sum_{-\nu-1}^{+\nu} \operatorname{tg}\left(\frac{2n+1}{2}\tau + w\right)\pi,$$

folglich

$$(15.)\qquad a_3(\tau, w) = \sum_{-\nu}^{+\nu}{}_{n} \sum_{-\mu}^{+\mu}{}_{m} \frac{1}{\frac{2m+1}{2} + \frac{2n+1}{2}\tau + w}.$$

3. Die trigonometrischen Reihen für diese Functionen lauten folgendermassen:

$$(16.)\qquad a(\tau, w) = -2\pi \sum_{1}^{\infty}{}_{n} (-1)^{n+1} \frac{p^n}{1-p^{2n}} \sin nw\pi,$$

$$(17.)\qquad a_0(\tau, w) = 4\pi \sum_{1}^{\infty}{}_{n} \frac{p^n}{1-p^{2n}} \sin 2nw\pi,$$

$$(18.)\qquad a_1(\tau, w) = \pi \operatorname{cotg} w\pi + 4\pi \sum_{1}^{\infty}{}_{n} \frac{p^n}{1-p^{2n}} \sin 2nw\pi,$$

$$(19.)\qquad a_2(\tau, w) = -\pi \operatorname{tg} w\pi - 4\pi \sum_{1}^{\infty}{}_{n} (-1)^{n+1} \frac{p^{2n}}{1-p^{2n}} \sin 2nw\pi,$$

$$(20.)\qquad a_3(\tau, w) = -4\pi \sum_{1}^{\infty}{}_{n} (-1)^{n+1} \frac{p^n}{1-p^{2n}} \sin 2nw\pi.$$

§ 90.

Weitere Relationen.

Wir leiten nun noch auf rein algebraischem Wege zwei Relationen her, deren zweite mit einer von Legendre und Jacobi aufgefundenen wesentlich übereinstimmt. (Vgl. Jacobi, *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum,* Gesammelte Werke p. 188.)

1. Nach § 88, (8.) ist

$$A(p^2, -x^2) = -\sum_{0}^{\infty}{}_{n} \frac{p^{4n+2}x^2}{1-p^{4n+2}x^2} + \sum_{0}^{\infty}{}_{n} \frac{\frac{p^{4n+2}}{x^2}}{1-\frac{p^{4n+2}}{x^2}}$$

und, da

$$2\frac{p^{4n+2}x^2}{1-p^{4n+2}x^2} = \frac{p^{2n+1}x}{1-p^{2n+1}x} - \frac{p^{2n+1}x}{1+p^{2n+1}x}$$

ist,

$$2A(p^2, -x^2) = \sum_0^\infty{}_n \frac{p^{2n+1}x}{1+p^{2n+1}x} - \sum_0^\infty{}_n \frac{\frac{p^{2n+1}}{x}}{1+\frac{p^{2n+1}}{x}}$$

$$-\sum_0^\infty{}_n \frac{p^{2n+1}x}{1-p^{2n+1}x} + \sum_0^\infty{}_n \frac{\frac{p^{2n+1}}{x}}{1-\frac{p^{2n+1}}{x}}$$

$$= A(p, x) + A(p, -x)$$

oder

$$(1.)\qquad A(p, -x) = -A(p, x) + 2A(p^2, -x^2).$$

Wendet man diese Gleichung wieder auf $A(p, -x^2)$ an (also p^{2n} und p^{2n+1}) und setzt dieses Verfahren fort, so erhält man

$$(2.)\qquad A(p, -x) = -A(p,x) - 2A(p^2,x^2) + 4A(p^4, -x^4)$$
$$= -A(p, x) - 2A(p^2, x^2) - 4A(p^4, x^4) - \cdots$$
$$- 2^n A(p^{2^n}, x^{2^n}) + 2^{n+1}A(p^{2^{n+1}}, -x^{2^{n+1}}).$$

Wenn

$$|p| < |x| < \left|\frac{1}{p}\right|$$

ist, so convergirt diese Reihe (wie mittelst des Cauchy'schen Kriteriums und der Entwicklungen für $A(p, x)$ nachgewiesen werden kann) für $n = \infty$, und wir dürfen schreiben

$$(3.)\qquad A(p, -x) = -A(p, x^2) - 2A(p^2, x^2) - 4A(p^4, x^4)$$
$$- 8A(p^8, x^8) - \cdots.$$

2. Setzen wir

$$\frac{i\eta_2{}^2(p^2, 1)}{2} S(p^2, x) = \varphi(p, x),$$

so ist

$$A(p^2, -x^2) + \varphi(p, x) = -\sum_0^\infty{}_n \frac{p^{4n+2}x^2}{1-p^{4n+2}x^2} + \sum_0^\infty{}_n \frac{\frac{p^{4n+2}}{x^2}}{1-\frac{p^{4n+2}}{x^2}}$$

$$+\sum_0^\infty{}_n \frac{p^{2n+1}x}{1-p^{4n+2}x^2} - \sum_0^\infty{}_n \frac{\frac{p^{2n+1}}{x}}{1-\frac{p^{4n+2}}{x^2}}$$

oder, da

$$\frac{p^{2n+1}x}{1-p^{4n+2}x^2} - \frac{p^{4n+2}x^2}{1-p^{4n+2}x^2} = \frac{p^{2n+1}x(1-p^{2n+1}x)}{1-p^{4n+2}x^2}$$

$$= \frac{p^{2n+1}x}{1+p^{2n+1}x}$$

ist,

$$A(p^2, -x^2) + \varphi(p, x) = \sum_0^\infty {}_n \frac{p^{2n+1}x}{1+p^{2n+1}x} - \sum_0^\infty {}_n \frac{\frac{p^{2n+1}}{x}}{1+\frac{p^{2n+1}}{x}}$$

$$= A(p, x),$$

oder

(4.) $$A(p, -x) = \varphi(p, -x) + A(p^2, -x^2).$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel ergiebt sich die unendliche Reihe

(5.) $$A(p, -x) = \varphi(p, -x) + \varphi(p^2, -x^2) + \varphi(p^4, -x^4) + \varphi(p^8, -x^8) + \cdots,$$

bei der vorausgesetzt werden muss, dass

$$\left|p\right| < \left|x\right| < \left|\frac{1}{p}\right|$$

ist.

§ 91.

Functionaltheoreme.

1. Ist

$$F(px) = aF(x),$$

so besitzt

(1.) $$\frac{F(x)F(y)}{F(xy)}$$

sowohl als Function von x als auch als solche von y die multiplicatorische Periode p; haben wir dagegen

$$F(px) = n + F(x),$$

so ist das Gleiche mit

(2.) $$F(x) + F(y) - F(xy)$$

der Fall. Beide Theoreme sind unmittelbar zu verificiren. Ubrigens lässt sich *nicht* umgekehrt behaupten, dass Functionen, die diesen Bedingungen genügen, auch umgekehrt multiplicatorisch periodisch zweiter Gattung sein müssen.

Die Übertragung dieser Resultate auf doppelt periodische Functionen liegt auf der Hand.

2. Bei den einfachen multiplicatorisch periodischen Functionen zweiter Gattung, die wir oben kennen lernten, hat es auch wirklich keine Schwierigkeit, die Ausdrücke (1.) und (2.) explicite durch multiplicatorisch periodische Transcendenten erster Gattung darzustellen; jedoch begnügen wir uns damit, diese Rechnung für zwei Transcendenten durchzuführen, die uns in der Theorie der elliptischen Integrale wieder begegnen werden.

Legen wir

$$\varphi(x) = \frac{\eta_0(p, ax)}{\eta_0(p, x)}$$

der Untersuchung zu Grunde, so ist ersichtlich, dass

$$\frac{\varphi(x)\varphi(y)}{\varphi(xy)} = \frac{\dfrac{\eta_0(p, ax)}{\eta_0(p, x)}\,\dfrac{\eta_0(p, ay)}{\eta_0(p, y)}}{\dfrac{\eta_0(p, axy)}{\eta_0(p, xy)}}$$

für $x = 1$ oder $y = 1$ oder $xy = \frac{1}{a}$ der Grösse

$$\frac{\eta_0(p, a)}{\eta_0}$$

gleich wird. Mit Rücksicht auf die Unendlichkeitspunkte und die Periodicität können wir daher setzen

$$\frac{\varphi(x)\varphi(y)}{\varphi(xy)} = \frac{\eta_0(p, a)}{\eta_0} + C\,\frac{\eta_1(p, x)\eta_1(p, y)\eta_1(p, axy)}{\eta_0(p, x)\eta_0(p, y)\eta_0(p, axy)}$$

$$= \frac{\eta_0(p, a)}{\eta_0} + cS(p, x)S(p, y)S(p, axy).$$

In der That besitzt

$$\frac{\varphi(x)\varphi(y)}{\varphi(xy)} - \frac{\eta_0(p, a)}{\eta_0}$$

dieselben Null- und Unendlichkeitspunkte und dieselbe Periodicität wie

$$cS(p, x)S(p, y)S(p, axy).$$

Um c zu bestimmen, wählen wir $x = y = i$ und erhalten

$$\frac{\eta_0^2(p, ia)\eta_0(p, -1)}{\eta_0^2(p, i)\eta_0(p, -a)} = \frac{\eta_3^2(p, a)\eta_0}{\eta_3^2\eta_0(p, a)}$$

$$= \frac{\eta_0(p, a)}{\eta_0} + cS^2(p, i)S(p, -a) = \frac{\eta_0(p, a)}{\eta_0} - cS(p, a)$$

oder mit Benutzung von

$$[2211] = (0033) - (3300):$$

$$\frac{\eta_0(p,a)}{\eta_0} - \frac{\eta_3^2(p,a)\eta_0}{\eta_3^2\eta_0(p,a)} = \frac{\eta_0^2(p,a)\eta_3^2 - \eta_3^2(p,a)\eta_0^2}{\eta_0\eta_3^2\eta_0(p,a)}$$

$$= \frac{\eta_2^2\eta_1^2(p,a)}{\eta_0\eta_3^2\eta_0(p,a)} = cS(p,a) = c\frac{\eta_3\eta_1(p,a)}{\eta_2\eta_0(p,a)},$$

also

$$c = \frac{\eta_2^3\eta_1(p,a)}{\eta_0\eta_3^3},$$

so dass wir schliesslich haben

$$(3.)\quad \frac{\varphi(x)\varphi(y)}{\varphi(xy)} = \frac{\eta_0(p,a)}{\eta_0} + \frac{\eta_2^3\eta_1(p,a)}{\eta_0\eta_3^3}S(p,x)S(p,y)S(p,axy).$$

3. Weiter wollen wir den Ausdruck

$$(4.)\quad A_0(p,x) + A_0(p,y) - A_0(p,xy)$$

$$= \frac{x}{2}\frac{\eta_0'(p,x)}{\eta_0(p,x)} + \frac{y}{2}\frac{\eta_0'(p,y)}{\eta_0(p,y)} - \frac{xy}{2}\frac{\eta_0'(p,xy)}{\eta_0(p,xy)},$$

den wir später ebenfalls zu benutzen haben, einer Untersuchung unterwerfen. Bemerken wir, dass

$$(5.)\quad \frac{x\eta_0'(p,x)}{2} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n}(-1)^n n p^{n^2} x^{2n}$$

$$+ \sum_{1}^{\infty}{}^{n}(-p\,1)^n n^{n^2}\left(x^{2n} - \frac{1}{x^{2n}}\right)$$

ist, so ist ersichtlich, dass (4.) für $x = 1$ oder $y = 1$ oder $xy = 1$ verschwindet. Wir setzen daher

$$A_0(p,x) + A_0(p,y) - A_0(p,xy)$$

$$= C\frac{\eta_1(p,x)\eta_1(p,y)\eta_1(p,xy)}{\eta_0(p,x)\eta_0(p,y)\eta_0(p,xy)}$$

$$= c\,S(p,x)S(p,y)S(p,xy).$$

Nehmen wir $x = p^{\frac{1}{2}}$, nachdem wir vorher beiderseits mit $\eta_0(p,x)$ multiplicirt haben, so finden wir

$$\frac{p^{\frac{1}{2}}\eta_0'\left(p,p^{\frac{1}{2}}\right)}{2} = c\frac{\eta_3\eta_1\left(p,p^{\frac{1}{2}}\right)}{\eta_2}S(p,y)S\left(p,p^{\frac{1}{2}}y\right)$$

oder, da

$$S\left(p,p^{\frac{1}{2}}y\right) = \frac{1}{\varkappa S(p,y)} = \frac{\eta_3^2}{\eta_2^2 S(p,y)}$$

ist,

$$\frac{p^{\frac{1}{2}}\eta_0'\left(p,p^{\frac{1}{2}}\right)}{2} = c\frac{\eta_3^3\eta_1\left(p,p^{\frac{1}{2}}\right)}{\eta_2^3}.$$

Da nun aus § 53, (15.) durch Differentiation und Einsetzen von $x = 1$

$$p^{\frac{1}{2}}\eta_0'\left(p, p^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{i}{p^{\frac{1}{4}}}\,\eta_1'$$

folgt, während

$$\eta_1\left(p, p^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{i}{p^{\frac{1}{4}}}\,\eta_0$$

ist, so erhalten wir

$$c = \frac{\eta_1'\eta_2^3}{2\,\eta_0\,\eta_3^3}$$

und somit

$$(6.)\qquad A_0(p, x) + A_0(p, y) - A_0(p, xy)$$

$$= \frac{\eta_1'\eta_2^3}{2\,\eta_0\,\eta_3^3}\,S(p, x)\,S(p, y)\,S(p, xy).$$

Die Theoreme, welche für die doppelt periodischen Functionen zweiter Gattung bestehen, folgen unmittelbar aus denen für die multiplicatorisch periodischen.

§ 92.

Differentiation.

1. Die gefundenen Functionaltheoreme liefern uns die Möglichkeit, die doppelt periodischen Functionen zweiter Gattung (und damit auch die multiplicatorisch periodischen) zu *differentiiren*.

Aus § 91, (6.) wird

$$a_0\left(\tau, \frac{2u}{\Omega}\right) + a_0\left(\tau, \frac{2v}{\Omega}\right) - a_0\left(\tau, \frac{2(u+v)}{\Omega}\right)$$

$$= \pi i\,\frac{\eta_1'\eta_2^3}{\eta^2\eta_3^3}\sin\operatorname{am}u\,\sin\operatorname{am}v\,\sin\operatorname{am}(u+v)$$

oder, wenn man die η durch die ϑ ersetzt und bedenkt, dass

$$\vartheta_1'(\tau, w) = \pi i e^{\pi i w}\eta_1'(p, e^{\pi i w}),$$

also

$$\vartheta_1' = \pi i \eta_1'$$

ist,

$$(1.)\qquad a_0\left(\tau, \frac{2u}{\Omega}\right) + a_0\left(\tau, \frac{2v}{\Omega}\right) - a_0\left(\tau, \frac{2(u+v)}{\Omega}\right)$$

$$= \frac{\vartheta_1'\vartheta_2^3}{\vartheta_0\vartheta_3^3}\sin\operatorname{am}u\,\sin\operatorname{am}v\,\sin\operatorname{am}(u+v).$$

Nehmen wir w und dw statt u und v, so wird hieraus

$$a_0\left(\tau, \frac{2(w+dw)}{\Omega}\right) - a_0\left(\tau, \frac{2w}{\Omega}\right)$$

$$= a_0\left(\tau, \frac{2dw}{\Omega}\right) - \frac{\vartheta_1'\vartheta_2^3}{\vartheta_0\vartheta_3^3} \sin \operatorname{am} w \sin \operatorname{am}(w+dw) \sin \operatorname{am} dw.$$

Da nun

$$a_0\left(\tau, \frac{2dw}{\Omega}\right) = \frac{\vartheta_0'\left(\tau, \frac{2dw}{\Omega}\right)}{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2dw}{\Omega}\right)}$$

$$= \left[\frac{\vartheta_0'\left(\tau, \frac{2w}{\Omega}\right) + \frac{2}{\Omega}\vartheta_0''\left(\tau, \frac{2w}{\Omega}\right)dw}{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2w}{\Omega}\right) + \frac{2}{\Omega}\vartheta_0'\left(\tau, \frac{2w}{\Omega}\right)dw}\right]_{w=0}$$

$$= \frac{2}{\Omega}\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} dw = \frac{\vartheta_0''}{\pi\vartheta_0\vartheta_3^2} dw$$

und $\sin \operatorname{am}(w+dw)$ nur um eine unendlich kleine Grösse von $\sin \operatorname{am} w$ verschieden, $\sin \operatorname{am} dw$ dagegen bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung mit dw identisch ist, so folgt

$$(2.) \qquad \frac{da_0\left(\tau, \frac{2w}{\Omega}\right)}{dw} = \frac{\vartheta_0''}{\pi\vartheta_0\vartheta_3^2} - \frac{\vartheta_1'\vartheta_2^3}{\vartheta_0\vartheta_3^3} \sin^2 \operatorname{am} w.$$

Auch unmittelbar ist es ersichtlich, *dass der Differentialquotient einer Function, $F(x)$, welche den Gleichungen*

$$F(x+m) = F(x),$$
$$F(x+n) = a + F(x)$$

genügt, doppelt periodisch von der ersten Gattung ist, da bei der Differentiation der zweiten Gleichung die Constante a wegfällt.

3. Aus § 91, (3.) wird, wenn wir $a = e^{\frac{2\pi i b}{\Omega}}$ setzen,

$$(3.) \qquad \frac{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2(u+b)}{\Omega}\right)\vartheta_0\left(\tau, \frac{2(v+b)}{\Omega}\right)\vartheta_0\left(\tau, \frac{2(u+v)}{\Omega}\right)}{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2u}{\Omega}\right)\vartheta_0\left(\tau, \frac{2v}{\Omega}\right)\vartheta_0\left(\tau, \frac{2(u+v+b)}{\Omega}\right)}$$

$$= \frac{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right)}{\vartheta_0} + \frac{\vartheta_2^3\vartheta_1\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right)}{\vartheta_0\vartheta_3^3} \sin \operatorname{am} u \sin \operatorname{am} v \sin \operatorname{am}(u+v+b).$$

Nehmen wir beiderseits den Logarithmus, setzen $u = w$, $v = dw$ und dividiren durch dw, so erhalten wir nach einfacher Umstellung

$$\frac{d \log \left[\frac{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2(w+b)}{\Omega}\right)}{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2w}{\Omega}\right)} \right]}{dw} = \frac{1}{dw} \log \left[\frac{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2(dw+b)}{\Omega}\right)}{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2dw}{\Omega}\right)} \right]$$

$$- \frac{1}{dw} \log \Bigg[\frac{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right)}{\vartheta_0} + \frac{\vartheta_2{}^3 \vartheta_1\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right)}{\vartheta_0 \vartheta_3{}^3}$$

$$\cdot \sin \operatorname{am} w \sin \operatorname{am} dw \sin \operatorname{am} (w + dw + b) \Bigg].$$

Nun ist aber, wenn wir die nicht in Betracht kommenden unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung sogleich vernachlässigen und beachten, dass $\vartheta_0' = 0$ ist,

$$\log \left[\frac{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2(dw+b)}{\Omega}\right)}{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2dw}{\Omega}\right)} \right] = \log \left[\frac{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right) + \frac{2}{\Omega} \vartheta_0'\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right)}{\vartheta_0} dw \right]$$

$$= \log \left[\frac{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right)}{\vartheta_0} \right] + \log \left[1 + \frac{2}{\Omega} \frac{\vartheta_0'\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right)}{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right)} dw \right]$$

$$= \log \left[\frac{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right)}{\vartheta_0} \right] + \frac{2}{\Omega} \frac{\vartheta_0'\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right)}{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right)} dw,$$

wie die Potenzentwicklung für den zweiten Logarithmus zeigt, und andrerseits in gleicher Weise

$$\log \left[\frac{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right)}{\vartheta_0} + \frac{\vartheta_2{}^3 \vartheta_1\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right)}{\vartheta_0 \vartheta_3{}^3} \sin \operatorname{am} w \sin (w + b)\, dw \right]$$

$$= \log \left[\frac{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right)}{\vartheta_0} \right]$$

$$+ \log \left[1 + \frac{\vartheta_2{}^3 \vartheta_1\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right)}{\vartheta_3{}^3 \vartheta_0\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right)} \sin \operatorname{am} w \sin \operatorname{am} (w + b)\, dw \right]$$

$$= \log\left[\frac{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right)}{\vartheta_0}\right] + \frac{\vartheta_2{}^3\vartheta_1\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right)}{\vartheta_3{}^3\vartheta_0\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right)} \sin \operatorname{am} w \sin \operatorname{am}(w+b)\, dw.$$

Hiernach erhalten wir

$$(4.)\quad \frac{d\log\left[\dfrac{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2(w+b)}{\Omega}\right)}{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2w}{\Omega}\right)}\right]}{dw}$$

$$= \frac{2}{\Omega}\,\frac{\vartheta_0'\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right)}{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right)} - \frac{\vartheta_2{}^3\vartheta_1\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right)}{\vartheta_3{}^3\vartheta_0\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right)} \sin \operatorname{am} w \sin \operatorname{am}(w+b)$$

$$= \frac{1}{\pi\vartheta_3{}^2}\,\frac{\vartheta_0'\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right)}{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right)} - \frac{\vartheta_2{}^4}{\vartheta_3{}^4} \sin \operatorname{am} b \sin \operatorname{am} w \sin \operatorname{am}(w+b)$$

$$= \frac{2}{\Omega}\,\frac{\vartheta_0'\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right)}{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2b}{\Omega}\right)} - \varkappa^2 \sin \operatorname{am} b \sin \operatorname{am} w \sin \operatorname{am}(w+b).$$

Dass das logarithmische Differential einer j e d e n *doppelt periodischen Function zweiter Gattung vom Typus* 1 *doppelt periodisch erster Gattung ist, lässt sich unmittelbar erkennen.*

Neunter Abschnitt.

Die periodischen Functionen dritter Gattung.

§ 93.

Einführung.

1. Der Begriff der Periodicität lässt noch mannichfache Erweiterungen zu; am Nächsten liegt es, diejenigen eindeutigen Functionen zu betrachten, die einer Functionalgleichung

$$F\left[\varepsilon_1(x)\right] = \zeta\left[x, F(x)\right] \tag{1.}$$

genügen, worin wir uns, um nur den einfachsten Fall hervorzuheben, $\varepsilon_1(x)$ als *lineare*, ζ als *rationale* Function (seiner beiden Argumente) denken wollen. Functionen dieser Art nennen wir *periodische Functionen dritter Gattung.*

In der Folge wollen wir nicht diese ganze Functionengruppe allgemein behandeln, sondern lediglich die beiden einfachsten Fälle

$$F\left[\varepsilon_1(x)\right] = \xi_1(x) + F(x) \tag{2.}$$

und

$$F\left[\varepsilon_1(x)\right] = \xi_1(x) F(x), \tag{3.}$$

worin $\xi_1(x)$ eine beliebige *rationale* Function bezeichnet.

2. Auch hier können wir $\varepsilon_1(x)$ den bekannten Transformationen unterwerfen, ohne dass hierdurch der Charakter von (2.) und (3.) sonst wesentlich modificirt wird. Da der Fall $\varepsilon_1(x) = px$, p eine Einheitswurzel, nur auf *rationale* Functionen führt*), so haben wir lediglich die Hauptfälle

---

*) Andere p, für die $|p| = 1$ ist, sind wieder als unzulässig nachzuweisen.

(a.) $$F(x+1) = \xi_1(x) + F(x),$$
(b.) $$F(x+1) = \xi_1(x)F(x),$$
(c.) $$F(px) = \xi_1(x) + F(x),$$
(d.) $$F(px) = \xi_1(x)F(x),$$

$|p| < 1$, ins Auge zu fassen. Aber auch diese sind bedeutenden Reductionen zugänglich.

3. Im Falle (a.) zerlegen wir die rationale Function $\xi_1(x)$ in Partialbrüche und eine ganze Function:

$$\xi_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \,.$$

$$+ \frac{b_1}{x-\beta} + \frac{b_2}{(x-\beta)^2} + \cdots + \frac{b^m}{(x-\beta)^m} + \frac{c_1}{x-\gamma} + \cdots.$$

Es genügt nun, Functionen f_0, f_1, f_2, u. s. w. aufzustellen, welche die Gleichungen

$$f_0(x+1) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + f_0(x),$$

$$f_1(x+1) = \frac{b_1}{x-\beta} + f_1(x),$$

$$f_2(x+1) = \frac{b_2}{(x-\beta)^2} + f_2(x)$$

u. s. w.

befriedigen; denn eine Summe solcher Ausdrücke befriedigt die Gleichung

$$F(x+1) = \xi_1(x) + F(x).$$

Ferner können wir uns darauf beschränken, immer nur je *eine* Function der fraglichen Art zu construiren, da die Differenz je zweier derselben Art eine additiv periodische Function ist, so dass sich dieselben leicht durch einander ausdrücken lassen.

Die Gleichung

(4.) $$f_0(x+1) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + f_0(x)$$

ist immer durch eine ganze Function $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades zu befriedigen; denn supponiren wir

$$f_0(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{n+1} x^{n+1},$$

so stellt $f_0(x+1) - f_0(x)$ eine ganze Function n^{ten} Grades dar; mit Hülfe von $(n+1)$ linearen Gleichungen lassen sich dann die noch willkürlichen Coefficienten b_1, b_2, $\cdots$ b_{n+1}

so bestimmen (b_0 bleibt beliebig), dass diese Differenz zu $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ wird.

Diesen Fall können wir also von jetzt ab ganz beiseite lassen und nur den andern

$$f_k(x+1) = \frac{a}{(x-\alpha)^k} + f_k(x)$$

ins Auge fassen. Setzen wir

$$F_k(x) = \frac{1}{a} f_k(x+\alpha),$$

so genügt $F_k(x)$ der Gleichung

$$F_k(x+1) = \frac{1}{x^k} + F_k(x), \tag{5.}$$

und diese führt uns in der That auf neue transcendente Functionen, die weiter unten behandelt werden sollen.

4. Im zweiten Falle zerlegen wir Zähler und Nenner von $\xi_1(x)$ in lineare Factoren und erkennen sofort, dass sich die gesuchte Function als Quotient zweier Producte von Functionen (falls solche überhaupt existiren) darstellen lassen, die, abgesehen von einer periodischen Function zweiter Gattung, Gleichungen von der Form

$$f(x+1) = (x-a) f(x)$$

befriedigen. Setzen wir

$$F(x) = f(x+a),$$

so erhalten wir die Normalform

$$F(x+1) = x F(x), \tag{6.}$$

mit der wir uns weiter unten zu beschäftigen haben. Aus *einer* solchen Function lassen sich *alle* übrigen gleichartigen durch Multiplication mit einer additiv periodischen erster Gattung herleiten.

5. Im dritten Falle nehmen wir dieselbe Zerlegung mit $\xi_1(x)$ vor wie im ersten und gelangen auch hier zu einer Zerfällung in einfachere Functionen, welche den Gleichungen

$$f(px) = a_0 + f(x),$$

$$f_0(px) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + f_0(x)$$

und

$$f_k(px) = \frac{a}{(x+\alpha)^k} + f_k(x)$$

genügen. Die erste Gleichung führt auf eine periodische Function zweiter Gattung; die zweite ist durch eine ganze Function n^{ten} Grades zu befriedigen, deren Coefficienten mit Leichtigkeit zu bestimmen sind. Zur Reduction der dritten Gleichung setzen wir

$$F_k(x) = \frac{\alpha^k}{a} f_k(\alpha x)$$

und haben dann die Functionalgleichung

$$(7.) \qquad F_k(px) = \frac{1}{(x+1)^k} F_k(x),$$

durch die wir zu neuen Transcendenten gelangen. Nur im Falle

$$(8.) \qquad f_k(px) = \frac{a}{x^k} + f(x)$$

ist diese Reduction nicht durchführbar; dann aber wird das Problem einfach durch die rationale Function

$$(9.) \qquad f_k(x) = \frac{ap^k}{1-p^k} \frac{1}{x^k}$$

gelöst.

Dass sich aus *einer* der gefundenen Functionen wieder *alle* gleichartigen durch Addition einer multiplicatorisch periodischen erster Gattung herleiten lassen, liegt auf der Hand.

6. Im vierten Falle zerlegen wir $\xi_1(x)$ wie im zweiten und erkennen, dass wir uns auf die Construction von Functionen mit der Functionalgleichung

$$f(px) = (x+a)f(x)$$

beschränken dürfen. Substituiren wir

$$F(x) = f(ax)\varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ der Gleichung

$$\varphi(px) = \frac{1}{a}\varphi(x)$$

genügt, so haben wir

$$(10.) \qquad F(px) = (x+1)F(x);$$

für $a = 0$ ist indessen diese Substitution nicht durchführbar, und wir haben

$$(11.) \qquad F(px) = xF(x)$$

besonders zu betrachten.

Im weiteren Verlaufe haben wir also Functionen mit den folgenden Functionalgleichungen zu behandeln:

$$\text{(a.)} \qquad F(x+1) = \frac{1}{x^k} + F(x),$$

$$\text{(b.)} \qquad F(x+1) = xF(x),$$

$$\text{(c.)} \qquad F(px) = \frac{1}{(x+1)^k} + F(x),$$

$$\text{(d.)} \qquad F(px) = (x+1)F(x),$$

$$\text{(e.)} \qquad F(px) = xF(x),$$

$$|p| < 1.$$

§ 94.

Die Transcendenten (a).

1. Um eine Function zu construiren, welcher die Functionalgleichung

$$\text{(1.)} \qquad F(x+1) = \frac{1}{x^k} + F(x)$$

zukommt, setzen wir für $k > 1$

$$\text{(2.)} \qquad s_k(x) = \frac{1}{x^k} + \frac{1}{(x+1)^k} + \frac{1}{(x+2)^k} + \cdots = \sum_0^\infty{}_n \frac{1}{(x+n)^k}.$$

Diese Reihe convergirt für alle x unbedingt*), ausser für $x = -1, -2, -3, \cdots$, und $-s_k(x)$ genügt der Gleichung (1), wie unmittelbar zu sehen. $s_k(x)$ wird unendlich vom k^{ten} Grade für $x = -1, -2, -3, \cdots$ und *wesentlich* unstetig für $x = \infty$, da sich um diesen Punkt unendlich viele Unstetigkeitspunkte zusammendrängen.

2. Für $k = 1$ muss die Reihe (2.) convergent gemacht werden durch Zufügung einer Constanten zu jedem Gliede; wir setzen

$$\text{(3.)} \qquad s_1(x) = \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x+1} - 1\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}\right) + \cdots$$

$$= \frac{1}{x} + \sum_1^\infty{}_n \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x+1} - \frac{x}{2(x+2)} - \frac{x}{3(x+3)} - \cdots$$

$$= \frac{1}{x} - \sum_1^\infty{}_n \frac{x}{n(x+n)},$$

---

*) Wie das Kriterium von § 5, 5 zeigt.

und diese Reihe convergirt (nach demselben Kriterium) unbedingt ausser für $x = -1, -2, -3, \cdots$ Dass ihr negativer Werth wirklich der gestellten Bedingung genügt, erkennen wir, wenn wir zunächst die Reihe bei einem endlichen Gliede abbrechen; sei

$$s_1'(x) = \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x+1} - 1\right) + \cdots + \left(\frac{1}{x+\omega} - \frac{1}{\omega}\right),$$

so ist

$$s_1'(x+1) = \frac{1}{x+1} + \left(\frac{1}{x+2} - 1\right) + \cdots + \left(\frac{1}{x+\omega+1} - \frac{1}{\omega}\right)$$

$$= s_1'(x) - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+\omega+1};$$

wird $\omega = \infty$, so fällt das letzte Glied weg, und wir haben

$$s_1(x+1) = s_1(x) - \frac{1}{x}.$$

3. Sehr leicht ist es, für $|x| < 1$ die vorliegenden Reihen (mit Ausnahme des ersten Gliedes) nach steigenden Potenzen von x zu entwickeln. Da

$$\frac{1}{(x+n)^k} = \frac{1}{n^k} \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^k}$$

$$= \frac{1}{n^k}\left[1 + (-k)_1 \frac{x}{n} + (-k)_2 \frac{x^2}{n^2} + \cdots\right]$$

ist und die vorkommenden Reihen alle unbedingt convergiren, so erhält man für $k > 1$:

$$(4.) \qquad s_k(x) = \frac{1}{x^k} + \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n^k} + (-k)_1 \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n^{k+1}} \cdot x + (-k)_2 \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n^{k+2}} \cdot x^2 + \cdots,$$

worin sich die Coefficienten theilweise durch die in § 44 gefundenen Ausdrücke ersetzen lassen. Da weiter

$$\frac{x}{n(x+n)} = \frac{x}{n^2\left(1 + \frac{x}{n}\right)} = \frac{x}{n^2} - \frac{x^2}{n^3} + \frac{x^3}{n^4} - \cdots$$

ist, so finden wir ebenfalls für $|x| < 1$:

$$(5.) \qquad s_1(x) = \frac{1}{x} - \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n^2} \cdot x + \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n^3} \cdot x^2 - \cdots$$

Wir überlassen es dem Leser, auch für andere Punkte wie $x = 0$ die Potenzentwicklungen vorzunehmen und hierdurch den analytischen Charakter von $s_k(x)$ (ausser in den Punkten $x = -1, 2, 3, \cdots$) darzuthun.

4. Die Transcendente $s_k(x)$ ist mit den additiv periodischen Functionen erster Gattung in der Art verwandt, dass

$$s_k(x) + (-1)^k s_k(-x+1) \tag{6.}$$

die additive Periode 1 besitzt. Ins Besondere ist

$$\begin{aligned} &s_1(x) - s_1(-x+1) \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} + \cdots = \pi \operatorname{cotg} \pi x. \end{aligned} \tag{7.}$$

Hieraus lässt sich auch ein Additionstheorem für $s_k(x)$ herleiten.

5. Bemerkt möge noch werden, dass man durch Differentiation von $s_k(x)$ zu $-ks_{k+1}(x)$ gelangt.

§ 95.

Die Facultät.

1. Um eine Transcendente mit der Functionalgleichung

$$F(x+1) = xF(x) \tag{1.}$$

zu erhalten, fassen wir das Product

$$x(x+1)(x+2)(x+3)\cdots$$

ins Auge, das für sich allein natürlich nicht convergirt, jedoch durch Zufügung geeigneter Factoren convergent gemacht werden kann. Mit Herrn Weierstrass setzen wir

$$\begin{aligned} \Psi(\omega, x) &= (1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{\omega}\right)\omega^{-x} \\ &= (1+x)e^{-x}\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\left(1+\frac{x}{3}\right)e^{-\frac{x}{3}}\cdots\left(1+\frac{x}{\omega}\right)^{-\frac{x}{\omega}} \\ &\quad \cdot e^{x\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\omega}-\log\omega\right)} \end{aligned} \tag{2.}$$

und bezeichnen mit $\frac{1}{\operatorname{fac} x}$ den Grenzwerth dieses Productes für $\omega = \infty$. Bedeutet M die Mascheroni'sche Constante, so ist

$$\frac{1}{\operatorname{fac} x} = e^{Mx}(1+x)e^{-x}\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\left(1+\frac{x}{3}\right)e^{-\frac{x}{3}}\cdots. \tag{3.}$$

Die absolute Convergenz und der analytische Charakter dieses Products ergiebt sich in gleicher Weise wie bei § 48, (4.).

Um das wirkliche Bestehen einer (1.) ähnlichen Functionalgleichung für $\operatorname{fac} x$ darzuthun, setzen wir $x+1$ statt x und finden

$$\begin{aligned}\Psi(\omega, x+1) &= (1+1+x)\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{x}{2}\right)\left(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{x}{3}\right)\cdots \\ &\cdot\left(1+\tfrac{1}{\omega}+\tfrac{x}{\omega}\right)\omega^{-1}\omega^{-x} = 2\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{4}{3}\cdots\tfrac{\omega+1}{\omega} \\ &\cdot\left(1+\tfrac{x}{2}\right)\left(1+\tfrac{x}{3}\right)\left(1+\tfrac{x}{4}\right)\cdots\left(1+\tfrac{x}{\omega+1}\right)\omega^{-1}\omega^{-x} \\ &= \tfrac{\omega+1}{\omega}\left(1+\tfrac{x}{2}\right)\left(1+\tfrac{x}{3}\right)\cdots\left(1+\tfrac{x}{\omega+1}\right)\omega^{-x},\end{aligned}$$

und wenn wir zur Grenze übergehen,

$$\frac{1}{\operatorname{fac}(x+1)} = \frac{1}{1+x}\,\frac{1}{\operatorname{fac} x},$$

also

$$\operatorname{fac}(x+1) = (x+1)\operatorname{fac} x, \tag{4.}$$

so dass $\operatorname{fac}(x-1)$ die Gleichung (1.) befriedigt.

2. Die Bezeichnung $\operatorname{fac} x$ (spr.: *Facultät* x) wurde von Herrn Weierstrass deshalb gewählt, weil der Ausdruck

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots n = n!,$$

der gewöhnlich mit diesem Namen belegt wird, als Function der *ganzen* Zahl n der Gleichung

$$(n+1)! = (n+1)n! \tag{5.}$$

genügt und es nahe liegt, den Begriff dieser Function so zu erweitern, dass sie für *beliebige* n einen Sinn behält. Freilich ist diese Erweiterung auf unendlich viele Arten möglich, da man dem fraglichen Ausdrucke eine beliebige Function mit der additiven Periode 1, die für $x=k$ der Einheit gleich wird, als Factor zufügen darf, ohne die Functionalgleichung zu beeinflussen. Dass wirklich $\operatorname{fac} x$ für ganzzahlige x in $x!$ übergeht, erkennt man daraus, dass $\operatorname{fac} x$ für $x=0$ der Einheit gleich wird, woraus durch Anwendung von (4.) das Weitere folgt. Die Function $\operatorname{fac} x$ ist übrigens mit der in der Theorie der bestimmten Integrale auftretenden *Gammafunction* nahe verwandt, da

(6.) $$\Gamma(x) = \text{fac}\,(x-1)$$

ist; wir haben daher

(7.) $$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

3. fac x wird unendlich für jedes ganzzahlige, negative x; $x=\infty$ ist der einzige wesentliche Discontinuitätspunkt.

4. Für $\frac{1}{\text{fac}\,(x-1)\,\text{fac}\,(-x)}$ finden wir, da sich die transcendenten Theile der einzelnen Factoren bei der Anordnung, die wir wählen, herausheben:

(8.) $$\frac{1}{\text{fac}\,(x-1)\,\text{fac}\,(-x)} = \frac{x}{\text{fac}\,x\,\text{fac}\,(-x)}$$
$$= x\left(1-\frac{x^2}{1}\right)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\cdots = \frac{\sin\pi x}{\pi},$$

so dass wir sagen können, *dass* $\frac{1}{\text{fac}\,x}$ (von den transcendenten Factoren abgesehen) *die Hälfte der Factoren von* $\frac{\sin\pi x}{\pi}$ *enthält.* — Ein Functionaltheorem für fac x ergiebt sich aus (8.) unmittelbar. — Weitere Eigenschaften dieser interessanten Function glauben wir hier übergehen zu sollen.

§ 96.

Die Transcendenten (d) und (e).

1. Die Herstellung einer Function mit der Functionalgleichung

(1.) $$F(px) = xF(x)$$

ist schon durch frühere Betrachtungen erledigt; denn wir brauchen nur

(2.) $$F(x) = \frac{1}{\eta\left(p^{\frac{1}{2}}, \frac{x}{p^{\frac{1}{2}}}\right)}$$

zu setzen, so dass wir die Transcendente, die wir zur Bildung der multiplicatorisch periodischen Functionen erster Gattung benutzten, hier wieder antreffen. Auf das früher aufgestellte Multiplicationstheorem und die übrigen Relationen für diese Transcendenten brauchen wir hier nicht zurückzukommen.

2. Eine Function mit der Functionalgleichung

$$(3.)\qquad F(px) = (1 + x)F(x)$$

lernen wir in dem reciproken Werthe von

$$(4.)\qquad o(p, x) = (1 + x)(1 + px)(1 + p^2x)\cdots$$

kennen, der zur η-Function in demselben Verhältnisse steht wie $\frac{1}{\text{fac}\, x}$ zu $\frac{\sin \pi x}{\pi}$. Eine Reihenentwicklung finden wir mit Hülfe von (3.); denn supponiren wir

$$o(p, x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots,$$

so haben wir

$$1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = (1 + x)(1 + a_1px + a_2p^2x^2 + \cdots)$$

oder

$$1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$
$$= 1 + (1 + a_1p)x + p(a_1 + a_2p)x^2 + p^2(a_2 + a_3p)x^3 + \cdots$$

und hieraus

$$a_1 = 1 + a_1p, \quad a_2 = a_1p + a_2p^2 \quad \text{u. s. w.,}$$

also

$$a_1 = \frac{1}{1-p},$$

$$a_2 = \frac{p}{(1-p)(1-p^2)},$$

$$\vdots$$

$$a_k = \frac{p^{\frac{k(k+1)}{2}}}{(1-p)(1-p^2)(1-p^3)\cdots(1-p^k)},$$

somit

$$(5.)\quad o(p,x) = 1 + \frac{x}{1-p} + \frac{px^2}{(1-p)(1-p^2)} + \frac{p^3x^3}{(1-p)(1-p^2)(1-p^3)} + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{p^{\frac{n(n-1)}{2}}x^n}{(1-p)(1-p^2)\cdots(1-p^n)}.$$

(4.) und (5.) convergiren für beliebige endliche x; der *einzige* wesentliche Unstetigkeitspunkt von $o(p, x)$ ist $x = \infty$, während (2.) deren *zwei* besitzt.

3. Sehr leicht ersichtlich ist es, dass $o(p, x)$ ganz ähnlichen Transformationsgesetzen unterworfen ist wie $\eta(p, x)$.

Durch unmittelbare Zerlegung folgt (n ist eine ungerade Zahl, α eine primitive n^{te} Einheitswurzel)

$$(6.)\quad o(p^2, x^2) = o(p, ix)o(p, -ix),$$

$$(7.)\quad o(p^n, x^n) = o(p, x)o(p, \alpha x)o(p, \alpha^2 x)\cdots o(p, \alpha^{n-1}x),$$

$$(8.)\quad o(p^{\frac{1}{2}}, x) = o(p, x)\,o(p, p^{\frac{1}{2}}x),$$

$$(9.)\quad o\left(p^{\frac{1}{n}}, x\right) = o(p, x)\,o\left(p, p^{\frac{1}{n}}x\right)o\left(p, p^{\frac{2}{n}}x\right)\cdots o\left(p, p^{\frac{n-1}{n}}x\right)$$

und durch successive Anwendung inverser Transformationen

$$\begin{aligned}(10.)\quad o(p, x^2) &= o(p^2, x^2)o(p^2, px^2)\\ &= o(p, ix)\,o(p, -ix)\,o(p, ip^{\frac{1}{2}}x)\,o(p, -ip^{\frac{1}{2}}x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(11.)\quad o(p, x^n) &= o(p^n, x^n)\,o(p^n, px^n)\cdots o(p^n, p^{n-1}x^n)\\ &= o(p, x)o(p, \alpha x)o(p, \alpha^2 x)\cdots o(p, \alpha^{n-1}x)\\ &\cdot o\left(p, p^{\frac{1}{n}}x\right)o\left(p, \alpha p^{\frac{1}{n}}x\right)o\left(p, \alpha^2 p^{\frac{1}{n}}x\right)\cdots o\left(p, \alpha^{n-1}p^{\frac{1}{n}}x\right)\\ &\cdot o\left(p, p^{\frac{2}{n}}x\right)o\left(p, \alpha p^{\frac{2}{n}}x\right)o\left(p, \alpha^2 p^{\frac{2}{n}}x\right)\cdots o\left(p, \alpha^{n-1}p^{\frac{2}{n}}x\right)\\ &\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ o&\left(p, p^{\frac{n-1}{n}}x\right)o\left(p, \alpha p^{\frac{n-1}{n}}x\right)o\left(p, \alpha^2 p^{\frac{n-1}{n}}x\right)\cdots o\left(p, \alpha^{n-1}p^{\frac{n-1}{n}}x\right).\end{aligned}$$

4. Setzt man $p = e^{\pi i \tau}$, $x = e^{\pi i w}$, so erhält man eine Transcendente, die der *„Heine'schen Function"* nahe steht, die aber strenge genommen nicht zu den periodischen Functionen dritter Gattung zu rechnen ist, da der bei Vermehrung des Arguments abgesonderte Factor eine *Exponentialfunction* enthält. Die gleiche Umformung ist bei der folgenden Transcendenten möglich.

Eine bemerkenswerthe Erweiterung der hier behandelten Transcendenten wurde von Herrn Appell (Mathematische Annalen, Bd. XIX, pag. 84 ff.), gegeben.

§ 97.

Die Transcendenten (c).

1. Die Darstellung einer Function $F(x)$ mit der Relation

$$F(px) = \frac{1}{x+1} + F(x) \tag{1.}$$

führt unmittelbar auf die Reihe

$$\begin{aligned} \Psi(p, x) &= \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+px}\right) \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{1+p^2x}\right) + \cdots = \sum_0^\infty {}_n \left(1 - \frac{1}{1+p^n x}\right) \\ &= \frac{x}{1+x} + \frac{px}{1+px} + \frac{p^2x}{1+p^2x} + \cdots \\ &= \sum_0^\infty {}_n \frac{p^n x}{1+p^n x}. \end{aligned} \tag{2.}$$

Dieselbe genügt allerdings der Gleichung

$$\Psi(p, px) = -\frac{x}{1+x} + \Psi(p, x) = -1 + \frac{1}{x+1} + \Psi(p, x), \tag{3.}$$

doch lässt sich mit Hülfe einer periodischen Function zweiter Gattung eine andere Transcendente daraus ableiten, welche (1.) befriedigt.

Der Zusammenhang dieser Function mit den multiplicatorisch periodischen ist wieder sofort ersichtlich.

2. Für $|px| < 1$ erhalten wir die Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} \Psi(p, x) &= \frac{x}{1+x} + px - p^2x^2 + p^3x^3 - \cdots \\ &\qquad\qquad + p^2x - p^4x^2 + p^6x^3 - \cdots \\ &\qquad\qquad + p^3x - p^6x^2 + p^9x^3 - \cdots \\ &\qquad\qquad + \cdots \\ &= \frac{x}{1+x} + \frac{px}{1-p} - \frac{p^2x^2}{1-p^2} + \frac{p^3x^3}{1-p^3} - \cdots \\ &= \frac{x}{1+x} + \sum_1^\infty {}_n (-1)^{n+1} \frac{p^n x^n}{1-p^n}. \end{aligned} \tag{4.}$$

Auch für andere Punkte wie $x = 0$ ist die Potenzentwicklung leicht zu bewerkstelligen.

Als Unendlichkeitspunkte zeigen sich nur $x = -\frac{1}{p^k}$, k ganzzahlig, positiv, während $p = \infty$ ein wesentlicher Discontinuitätspunkt ist.

3. Mit Hülfe der aus (3.) und (4.) folgenden Entwicklung für $|px| < 1$:

$$(5.)\qquad \Psi(p, px) = \frac{px}{1-p} - \frac{p^2x^2}{1-p^2} + \frac{p^3x^3}{1-p^3} - \cdots$$
$$= \sum_1^\infty{}_n (-1)^{n+1} \frac{p^n x^n}{1-p^n}$$

erhalten wir für beliebige n, wenn α wieder eine primitive n^{te} Einheitswurzel bezeichnet,

$$(6.)\qquad \Psi(p^n, -p^n x^n) = -\frac{p^n x^n}{1-p^n} - \frac{p^{2n} x^{2n}}{1-p^{2n}} - \cdots$$
$$= \Psi(p, -px) + \Psi(p, -\alpha px) + \Psi(p, -\alpha^2 px) + \cdots$$
$$+ \Psi(p, -\alpha^{n-1} px).$$

4. Auch als Quotient zweier transcendenten ganzen Functionen lässt sich $\Psi(p, x)$ darstellen. Wir setzen

$$\Psi(p, x) = \frac{a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots}{(1+x)(1+px)(1+p^2x)\cdots}$$

und erhalten mit Hülfe von (3.) die Gleichung

$$\frac{x}{1+x} + \frac{a_1 px + a_2 p^2 x^2 + a^3 p^3 x^3 + \cdots}{(1+px)(1+p^2x)(1+p^3x)\cdots}$$
$$= \frac{a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots}{(1+x)(1+px)(1+p^2x)\cdots}$$

oder mit Benutzung von § 96, (5.)

$$x\left(1 + \frac{px}{1-p} + \frac{p^3x^2}{(1-p)(1-p^2)} + \frac{p^6x^3}{(1-p)(1-p^2)(1-p^3)} + \cdots\right)$$
$$+ (a_1 px + a_2 p^2 x^2 + a_3 p^3 x^3 + \cdots)(1+x)$$
$$= a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

also

$$1 + a_1 p = a_1,$$
$$\frac{p}{1-p} + a_1 p + a_2 p^2 = a_2,$$
$$\vdots$$

$$\frac{p^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-p)(1-p^2)\cdots(1-p^{n-1})} + a_{n-1}p^{n-1} + a_n p^n = a_n$$

und hieraus

$$a_1 = \frac{1}{1-p},$$

$$a_2 = \frac{2p}{(1-p)(1-p^2)},$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{np^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-p)(1-p^2)\cdots(1-p^n)},$$

so dass

$$(7.)\quad \Psi(p,x) = \frac{\frac{x}{1-p} + \frac{2px^2}{(1-p)(1-p^2)} + \frac{3p^3x^3}{(1-p)(1-p^2)(1-p^3)} + \cdots}{o(p,x)}$$

$$= \frac{\sum_1^\infty {}_n \frac{np^{\frac{n(n-1)}{2}}x^n}{(1-p)(1-p^2)\cdots(1-p^n)}}{o(p,x)}$$

oder

$$(8.)\qquad \Psi(p,x) = \frac{x\,o'(p,x)}{o(p,x)}$$

wird.

5. Functionen, die der Bedingung

$$(9.)\qquad F(px) = \frac{1}{(x+1)^n} + F(x)$$

genügen, können aus der eben aufgestellten durch $(n-1)$fache Differentiation oder auch auf folgendem Wege hergeleitet werden. Die Reihe

$$(10.)\quad f_n(p,x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^n + \left(\frac{px}{1+px}\right)^n + \left(\frac{p^2x}{1+p^2x}\right)^n + \cdots$$

$$= \sum_0^\infty {}_k \left(\frac{p^k x}{1+p^k x}\right)^n$$

genügt der Gleichung

$$(11.)\quad f_n(p,px) = -\left(\frac{x}{1+x}\right)^n + f_n(p,x)$$

$$= -\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^n + f_n(p,x)$$

$$= -\left[1 - \frac{n_1}{1+x} + \frac{n_2}{(1+x)^2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(1+x)^n}\right] + f_n(p, x).$$

Man ersieht hieraus, dass sich eine die Gleichung (9.) befriedigende Function bilden lässt, wenn sich ebensolche für alle kleineren n construiren lassen. Da wir aber für $n = 1$ die fragliche Function besitzen, so können wir successive diejenigen für $n = 2, 3, 4, \ldots$ aufstellen.

Zehnter Abschnitt.

Zur Theorie der Integrale algebraischer Functionen.

§ 98.

Einleitung; Integrale rationaler Functionen.

1. Ist

$$y = f(x), \frac{dy}{dx} = f'(x),$$

so nennt man $f(x)$ das *Integral* von $f'(x)\,dx$ und schreibt

$$f(x) = \int f'(x)\,dx;$$

das Integral ist insofern nicht vollständig bestimmt, als auch $f(x) + c$, worin c eine beliebige Constante bezeichnet, denselben Differentialquotienten $f'(x)$ wie $f(x)$ selbst besitzt; wir nehmen also in der Folge stillschweigend an, dass jedem Integrale eine beliebige Constante willkürlich hinzugefügt werden kann. Die Operation des Integrirens ist derjenigen des Differentiirens gerade entgegengesetzt.

Die Aufgabe, die sich die Integralrechnung naturgemäss zuerst stellen muss, wird die folgende sein:

Zu allen algebraischen Differentialen das Integral zu finden, also

$$\int F(x)\,dx$$

aufzusuchen, wenn $F(x)$ eine *algebraische* Function ist. Indessen bieten die algebraischen Functionen selbst sowie die Transcendenten, die wir bis jetzt kennen lernten, nur in beschränktem Masse die Mittel, jene Aufgabe zu lösen; ihre vollständige Lösung gelingt nur mit Hülfe von Functionen *mehrerer* Variabeln, deren Untersuchung wir hier ausschliessen.

2. Es ist

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx \tag{1.}$$

und

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)] dx \tag{2.}$$
$$= \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \cdots + \int f_n(x) dx,$$

da beide Seiten dieser Gleichungen differentiirt das Gleiche geben $\left(\text{es ist nämlich } \frac{d \int f(x) dx}{dx} = f(x)\right)$.

3. Der einfachste Fall der algebraischen Integrale ist der, dass in

$$\int F(x) dx$$

die Function $F(x)$ *rational* ist; wir zerlegen dieselbe alsdann in bekannter Weise in eine ganze Function und eine Summe von Partialbrüchen, und da wir nach (2.) gliedweise integriren könnnen, so wird unsere Aufgabe gelöst sein, wenn wir die Integrale

$$\int dx, \int x^n dx, \int \frac{dx}{x-a}, \int \frac{dx}{(x-a)^n},$$

(n positiv und ganzzahlig) auszuführen im Stande sind. Es ist aber, von additiven Constanten abgesehen,

$$\int dx = x, \tag{3.}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \tag{4.}$$

$$\int \frac{dx}{x-a} = \log (x-a), \tag{5.}$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}, \tag{6.}$$

wie durch Differentiation der rechtsstehenden Ausdrücke unmittelbar zu verificiren ist.

Wir haben somit das wichtige Resultat:

Das Integral einer rationalen Function von x setzt sich im Allgemeinen zusammen aus einer ebenfalls rationalen Function und einer Summe von Logarithmen von linearen, ganzen Functionen von x, die nur mit Zahlencoefficienten behaftet sind.

In der elementaren Integralrechnung (und damit überhaupt bei praktischen Anwendungen) ersetzt man die Loga-

rithmen theilweise durch arctg x, um imaginäre Ausdrücke zu vermeiden; für unsere rein theoretischen Untersuchungen ist dies indessen vollkommen irrelevant, da sich arctg x durch Logarithmen darstellen lässt.

§ 99.

Logarithmisch-algebraische Integrale irrationaler Functionen.

1. Der nächst dem vorhergehenden einfachste Fall ist derjenige, dass in

$$\int F(x)dx$$

die Function $y = F(x)$ eine *zweideutige* irrationale Function ist, welche wir uns immer durch eine Gleichung

$$y^2 + f_1(x)y + f_2(x) = 0 \tag{1.}$$

definirt denken können, in der $f_1(x)$ und $f_2(x)$ rationale Functionen bezeichnen. Die Lösung einer solchen Gleichung hat die Form

$$y = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)\sqrt{\psi(x)}, \tag{2.}$$

worin $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ *rational* sind, während wir $\psi(x)$ sogar als *ganze* Function betrachten können. Denn ist

$$\psi(x) = \frac{\psi_1(x)}{\psi_2(x)},$$

so dürfen wir hierfür

$$\psi(x) = \frac{\psi_1(x)\psi_2(x)}{\psi_2^{\,2}(x)}$$

schreiben und haben

$$\sqrt{\psi(x)} = \frac{\sqrt{\psi_1(x)\psi_2(x)}}{\psi_2(x)}$$

worauf wir den Nenner in $\varphi_2(x)$ eingehen lassen.

Der Grad der ganzen Function $\psi(x)$ ist für den Charakter des Integrals von wesentlicher Bedeutung; wir behaupten zunächst, *dass sich das Integral durch algebraische Functionen und Logarithmen darstellen lässt, wenn $\psi(x)$ den zweiten Grad nicht überschreitet.* Hiermit ist jedoch nicht ausgeschlossen, dass nicht auch in anderen, mehr speciellen Fällen die Integration mit Hülfe der gleichen Functionen ausgeführt werden kann.

2. Sei

$$\int F(x, \sqrt{ax+b})\, dx$$

auszuführen, worin F eine rationale Function seiner beiden Argumente bezeichnet; es ist dies scheinbar ein allgemeinerer Fall wie der betreffende von (2.), doch lässt er sich in einer Weise auf jenen zurückführen, die wir später bei den elliptischen Integralen ausführlicher auseinandersetzen. Wir brauchen hier nur

$$\sqrt{ax+b} = u,$$

also

$$ax + b = u^2,\ x = \frac{u^2 - b}{a},$$

$$adx = 2udu,\ dx = \frac{2udu}{a}$$

zu setzen und erkennen sofort, dass

$$\int F(x, \sqrt{ax+b})\, dx = \int \frac{2}{a} F\left(\frac{u^2-b}{a}, u\right) udu$$

auf das Integral einer *rationalen* Function von u zurückgeführt ist, das sich durch rationale Functionen von $x = \frac{u^2 - b}{a}$ und Logarithmen linearer Functionen dieser Grösse ausdrückt.

3. Bemerkt zu werden verdient, dass auch in dem allgemeineren Falle

$$\int F(x, \sqrt[n]{ax+b})\, dx$$

dasselbe Verfahren zum Ziele führt; wir nehmen nämlich

$$\sqrt[n]{ax+b} = u,$$

$$ax + b = u^n,\ x = \frac{u^n - b}{a}$$

$$dx = \frac{nu^{n-1}}{a} du$$

und gelangen wieder zu dem Integrale einer rationalen Function.

4. Haben wir

$$\int F(x, \sqrt{a_0 x^2 + a_1 x + a_2})\, dx,$$

so wollen wir zunächst $a_0 x^2 + a_1 x + a_2$ nach Absonderung von a_0, aus dem wir uns die Wurzel ausgezogen denken können, in seine beiden linearen Factoren zerlegen; wir haben demnach zu betrachten

$$\int F(x, \sqrt{(x-a)(x-b)})\, dx.$$

Eine Substitution, die hier zum Ziele führt, ist

$$u = \sqrt{\frac{x-a}{x-b}},\ u^2 = \frac{x-a}{x-b},$$

$$x = \frac{bu^2 - a}{u^2 - 1},$$

$$dx = -\frac{2(a-b)u\,du}{(u^2-1)^2},$$

$$\sqrt{(x-a)(x-b)} = u(x-b) = u\frac{b-a}{u^2-1};$$

wir finden

$$\int F(x, \sqrt{(x-a)(x-b)})dx$$

$$= -\int F\left(\frac{bu^2-a}{u^2-1}, u\frac{b-a}{u^2-1}\right)\frac{2(a-b)u\,du}{(u^2-1)^2},$$

also das Integral einer *rationalen* Function. Auch hier pflegt man in der Praxis häufig die bei der Integration auftretenden Logarithmen theilweise durch *cyklometrische* Functionen, besonders arc sin x zu ersetzen; ist doch

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin}\, x.$$

5. Wir fügen noch

$$\int F(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})dx$$

bei. Die Substitution

$$u = \sqrt{ax+b},\ u^2 = ax+b,$$

$$x = \frac{u^2-b}{a},$$

$$dx = \frac{2u\,du}{a}$$

führt dieses Integral auf den vorigen Fall zurück, da keine Irrationalität ausser

$$\sqrt{cx+d} = \sqrt{\frac{c(u^2-b)}{a} + d}$$

übrig bleibt.

§ 100.

Die elliptischen Integrale.

1. Ist in

$$\int F(x, \sqrt{\psi(x)})\,dx$$

die ganze Function $\psi(x)$ vom *dritten oder vierten* Grade, so heisst das Integral ein *elliptisches*, da die Ausführung desselben mit Hülfe von algebraischen, logarithmischen und elliptischen Functionen erster und zweiter Gattung (resp. deren Umkehrung) möglich ist. Übersteigt $\psi(x)$ den vierten Grad, so heisst das Integral *hyperelliptisch*, und seine Ausführung lässt sich im Allgemeinen nur mit Hülfe *höherer* Transcendenten bewerkstelligen.

2. Unsere erste Aufgabe ist es, den Radicanden $\psi(x)$ in die Form

$$R(u) = (1 - u^2)(1 - \varkappa^2 u^2) \tag{1.}$$

zu bringen, die den directen Übergang zu den elliptischen Functionen ermöglicht.

Sei zunächst $\psi(x)$ vom vierten Grade, so dass wir nach Vornahme der Factorenzerlegung und Ausscheidung eines constanten Factors setzen können

$$\psi(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$$

oder auch

$$\psi(x) = (1 - a_1 x)(1 - a_2 x)(1 - a_3 x)(1 - a_4 x);$$

alsdann machen wir die Substitution

$$x = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta},$$

$$dx = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma u + \delta)^2}\,du.$$

Der neue Radicand lautet alsdann nach Ausscheidung des Nenners, aus dem die Wurzel gezogen werden kann,

$$\psi_1(u) = [\gamma u + \delta - a_1(\alpha u + \beta)][\gamma u + \delta - a_2(\alpha u + \beta)]$$
$$[\gamma u + \delta - a_3(\alpha u + \beta)][\gamma u + \delta - a_4(\alpha u + \beta)],$$

und wir haben, um die Form (1.) zu erhalten, α, β, γ, δ und $\varkappa$ so zu bestimmen, dass

$$\frac{\gamma - a_1\alpha}{\delta - a_1\beta} = 1, \tag{2.}$$

$$(3.)\qquad \frac{\gamma - a_2\alpha}{\delta - a_2\beta} = -1,$$

$$(4.)\qquad \frac{\gamma - a_3\alpha}{\delta - a_3\beta} = \varkappa,$$

$$(5.)\qquad \frac{\gamma - a_4\alpha}{\delta - a_4\beta} = -\varkappa$$

oder

$$(6.)\qquad a_1\alpha - a_1\beta - \gamma + \delta = 0,$$

$$(7.)\qquad a_2\alpha + a_2\beta - \gamma - \delta = 0,$$

$$(8.)\qquad a_3\alpha - a_3\varkappa\beta - \gamma + \varkappa\delta = 0,$$

$$(9.)\qquad a_4\alpha + a_4\varkappa\beta - \gamma - \varkappa\delta = 0$$

wird. Durch Addition von (6.) und (7.), (8.) und (9.) folgt

$$(10.)\qquad (a_1 + a_2)\alpha - (a_1 - a_2)\beta - 2\gamma = 0,$$

$$(11.)\qquad (a_3 + a_4)\alpha - (a_3 - a_4)\varkappa\beta - 2\gamma = 0,$$

und durch Elimination von δ aus (6.) und (9.), (7.) und (8.)

$$(12.)\qquad (a_1\varkappa + a_4)\alpha - (a_1 - a_4)\varkappa\beta - (1 + \varkappa)\gamma = 0,$$

$$(13.)\qquad (a_2\varkappa + a_3)\alpha + (a_2 - a_3)\varkappa\beta - (1 + \varkappa)\gamma = 0;$$

ferner durch Elimination von γ aus (10.) und (11.), (12.) und (13.)

$$(14.)\ (a_1 + a_2 - (a_3 + a_4))\alpha - (a_1 - a_2 - (a_3 - a_4)\varkappa)\beta = 0,$$

$$(15.)\ ((a_1 - a_2)\varkappa - (a_3 - a_4))\alpha - (a_1 + a_2 - (a_3 + a_4))\varkappa\beta = 0,$$

aus denen sich für $\varkappa$ die quadratische Gleichung

$$[a_1 + a_2 - (a_3 + a_4)]^2\varkappa - [a_1 - a_2 - (a_3 - a_4)\varkappa] \cdot [(a_1 - a_2)\varkappa - (a_3 - a_4)] = 0$$

ergiebt, die nach einer einfachen Umrechnung die Gestalt

$$(16.)\quad \varkappa^2 + 2\,\frac{(a_1 - a_4)(a_2 - a_3) + (a_1 - a_3)(a_2 - a_4)}{(a_1 - a_2)(a_3 - a_4)}\,\varkappa + 1 = 0$$

annimmt; die Lösungen derselben sind $\varkappa$ und $\frac{1}{\varkappa}$, so dass es in unserem Belieben steht, $|\varkappa| \leqq 1$ zu nehmen, was für manche Entwicklungen vortheilhaft ist.

Durch (14.) oder (15.) ist nach Berechnung von $\varkappa$ das Verhältniss $\frac{\beta}{\alpha}$, durch (10.) u. s. w. auch $\frac{\gamma}{\alpha}$ und schliesslich

durch (6.) u. s. w. $\frac{\delta}{\alpha}$ eindeutig bestimmt. Die Substitution wird niemals unmöglich; denn $\varkappa$ hat nach (16.) immer einen endlichen Werth, wenn nicht $a_1 = a_2$ oder $a_3 = a_4$ ist, wodurch das Integral in ein einfacheres übergeht. Falls einzelne der Grössen α, β, γ, δ Null werden, tritt auch keine Schwierigkeit ein.

Ist $\psi(x)$ vom dritten Grade, also

$$\psi(x) = (1 - a_1 x)(1 - a_2 x)(1 - a_3 x),$$

so führt die Substitution

$$u^2 = 1 - a_1 x,\ x = \frac{1 - u^2}{a_1}$$

$\sqrt{\psi(x)}$ in

$$\sqrt{u^2\left(1 - \frac{a_2}{a_1}(1 - u^2)\right)\left(1 - \frac{a_3}{a_1}(1 - u^2)\right)}$$

$$= u\sqrt{\left(1 - \frac{a_2}{a_1}(1 - u^2)\right)\left(1 - \frac{a_3}{a_1}(1 - u^2)\right)}$$

über, so dass dieser Fall auf den vorhergehenden reducirt werden kann.

3. Wir schreiten nun zur Reduction des Ausdrucks

$$\int F(x, \sqrt{R(x)})\,dx,$$

worin F eine rationale Function und

$$(17.)\quad R(x) = (1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2) = 1 - (1 + \varkappa^2)x^2 + \varkappa^2 x^4$$

ist. Da alle geraden Potenzen von $\sqrt{R(x)}$ rationale Functionen von x, alle ungeraden ebensolche, multiplicirt mit $\sqrt{R(x)}$, sind, so wird

$$F(x, \sqrt{R(x)}) = \frac{f_0(x) + f_1(x)\sqrt{R(x)}}{f_2(x) + f_3(x)\sqrt{R(x)}}$$

gesetzt werden können, worin f_0, f_1, f_2, f_3 ganze Functionen sind. Multiplicirt man Zähler und Nenner dieses Bruchs mit

$$f_2(x) - f_3(x)\sqrt{R(x)},$$

so fällt die Irrationalität im Nenner weg und wir erhalten

$$F(x, \sqrt{R(x)}) = f_4(x) + f_5(x)\sqrt{R(x)} = f_4(x) + \frac{f(x)}{\sqrt{R(x)}},$$

worin $f_4(x)$, $f_5(x)$ und $f(x) = f_5(x)R(x)$ *rationale* Functionen bezeichnen. Da nun

$$\int f_4(x)dx$$

schon nach Früherem integrirbar ist, so dürfen wir die weitere Untersuchung auf das Integral

$$\int \frac{f(x)\,d(x)}{\sqrt{R(x)}}$$

beschränken.

Sondern wir in der rationalen Function $f(x)$ in Zähler und Nenner die Glieder mit geraden und ungeraden Potenzen von x, so können wir

$$f(x) = \frac{\varphi_0(x^2) + \varphi_1(x^2)x}{\varphi_2(x^2) + \varphi_3(x^2)x}$$

setzen. Multipliciren wir Zähler und Nenner mit

$$\varphi_2(x^2) - \varphi_3(x^2)x,$$

so enthält der neue Nenner nur noch *gerade* Potenzen von x und wir können, wenn ψ_1 und ψ_2 rationale Functionen sind, schreiben

$$f(x) = \psi(x^2) + \psi_1(x^2)x$$

und hierdurch das Integral in zwei Theile zerlegen.

In

$$\int \frac{\psi_1(x^2)x}{\sqrt{R(x)}}dx$$

substituiren wir

$$x^2 = u,\ 2xdx = du,$$

so dass

$$\int \frac{\psi_1(x^2)x}{\sqrt{R(x)}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\psi_1(u)}{\sqrt{(1-u)(1-\varkappa^2 u)}}du$$

wird. Da jetzt der Radicand nur noch vom *zweiten* Grade ist, so ist dieses Integral auf einen bereits erledigten Fall zurückgeführt, und es bleibt uns nur die Behandlung von

$$\int \frac{\psi(x^2)dx}{\sqrt{R(x)}}$$

übrig.

4. Nehmen wir mit $\psi(x)$ wieder in bekannter Weise die Partialbruchzerlegung vor und setzen dann x^2 an Stelle von x, so zerfällt das Integral in eine Reihe von (mit Coefficienten behafteten) Integralen der folgenden Formen:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad \int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n\sqrt{R(x)}},$$

wenn wir im Nenner sogleich die quadratische Bezeichnung a^2 einführen. Diese Integrale lassen sich aber noch sehr wesentlich vereinfachen.

Setzen wir ($k \geqq 1$)

$$y = \frac{x\sqrt{R(x)}}{(x^2-a^2)^k},$$

so ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2kx^2\sqrt{R(x)}}{(x^2-a^2)^{k+1}} + \frac{xR'(x)}{2(x^2-a^2)^k\sqrt{R(x)}} + \frac{\sqrt{R(x)}}{(x^2-a^2)^k}$$

$$= \frac{-2kx^2R(x) + \left[1-2(1+\varkappa^2)x^2+3\varkappa^2x^4\right](x^2-a^2)}{(x^2-a^2)^{k+1}\sqrt{R(x)}},$$

ein Ausdruck, der nicht gehoben werden kann, wenn nicht

$$a = 0, \; a = \pm 1 \quad \text{oder} \quad a = \pm\frac{1}{k}$$

ist. Diese Ausnahmefälle können wir indessen übergehen, da nach dem Heben die Entwicklung doch einen ganz analogen Verlauf nimmt.

Indem wir rechts eine Partialbruchzerlegung vornehmen erhalten wir*)

$$\frac{dy}{dx} = \left[a_0 + a_2x^2 + \frac{b_1}{x^2-a^2} + \frac{b_2}{(x^2-a^2)^2} + \cdots + \frac{b_{k+1}}{(x^2-a^2)^{k+1}}\right]\frac{1}{\sqrt{R(x)}},$$

und wenn wir umstellen und integriren,

$$(18.) \qquad b_{k+1}\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{k+1}\sqrt{R(x)}}$$

$$= \frac{x\sqrt{R(x)}}{(x^2-a^2)^k} - a_0\int\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} - a_2\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R(x)}}$$

$$- b_1\int\frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{R(x)}} - b_2\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^2\sqrt{R(x)}} - \cdots$$

$$- b_k\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^k\sqrt{R(x)}}.$$

*) Dass die bei der Zerlegung eventuell auftretende ganze Function *höchstens* bis zum *zweiten* Grade ansteigen kann (nämlich für $k = 1$), ist unmittelbar ersichtlich.

Mit Hülfe dieser Formel können wir

$$\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^n \sqrt{R(x)}}$$

auf eine Reihe von Integralen derselben Form, in denen jedoch n kleiner ist, auf eine algebraische Function und eventuell die Integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} \quad \text{und} \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R(x)}}$$

zurückführen. Durch Wiederholung dieses Verfahrens reduciren wir schliesslich

$$\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^n \sqrt{R(x)}}$$

auf

$$\int \frac{dx}{(x^2 - a^2) \sqrt{R(x)}}$$

und die andern eben genannten Bestandtheile.

Um auch

$$\int \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{R(x)}}$$

zu reduciren, setzen wir

$$y = x^{2k+1} \sqrt{R(x)},$$

also

$$\frac{dy}{dx} = (2k+1) x^{2k} \sqrt{R(x)} + \frac{x^{2k+1} R'(x)}{2\sqrt{R(x)}}$$

$$= \frac{(2k+1) x^{2k} R(x) + \frac{1}{2} x^{2k+1} R'(x)}{\sqrt{R(x)}}$$

$$= \frac{(2k+1) x^{2k} - (2k+2)(1+\varkappa^2) x^{2k+2} + (2k+3)\varkappa^2 x^{2k+4}}{\sqrt{R(x)}},$$

und haben somit

$$(19.) \qquad (2k+3)\varkappa^2 \int \frac{x^{2k+4} dx}{\sqrt{R(x)}} = x^{2k+1} \sqrt{R(x)}$$

$$- (2k+1) \int \frac{x^{2k} dx}{\sqrt{R(x)}} + (2k+2)(1+\varkappa^2) \int \frac{x^{2k+2} dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

Nach dieser Formel lässt sich in

$$\int \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{R(x)}}$$

der Grad $2n$ nach und nach erniedrigen, bis wir schliesslich auf die Integrale

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R(x)}} \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

kommen.

Mit Hülfe der behandelten Reductionsmethoden sind wir also in den Stand gesetzt, sämmtliche elliptische Integrale auf die drei sog. *Legendre'schen Normalintegrale* zurückzuführen, die man als elliptische Integrale erster, zweiter und dritter Gattung zu bezeichnen pflegt:

a. $$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}},$$

b. $$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}},$$

c. $$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}}.$$

5. Setzen wir (indem wir τ dem $\varkappa$ des Integrals entsprechend nehmen)

$$y = \text{arc sin am } x,$$

so ist nach § 71, (3.)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}},$$

so dass wir haben

$$(20.) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}} = \text{arg sin am } x,$$

ein Resultat, das mit

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin } x$$

die grösste Analogie zeigt. Besonders muss hervorgehoben werden, dass das elliptische Integral erster Gattung auf die *Umkehrung* einer doppelt periodischen Function führt, gerade so wie das einfachste logarithmische Integral die *Umkehrung* von e^x lieferte.

6. Bei

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}}$$

machen wir die Substitution

$x = \sin \operatorname{am} w,\ \ w = \arg \sin \operatorname{am} x,$

$dx = \cos \operatorname{am} w \Delta \operatorname{am} w\, dw = \sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}\, dw,$

wodurch wir erhalten

$$(21.)\qquad \int^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}} = \int \sin^2 \operatorname{am} w\, dw.$$

Nach § 92, (2.) ist aber

$$\sin^2 \operatorname{am} w = \frac{\vartheta_0'' \vartheta_3}{\pi \vartheta_1' \vartheta_2^2} - \frac{\vartheta_0 \vartheta_3^3}{\vartheta_1' \vartheta_2^3} \frac{d a_0\left(\tau, \frac{2w}{\Omega}\right)}{dw},$$

so dass wir schliesslich das Resultat

$$(22.)\quad \int^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}} = \frac{\vartheta_0'' \vartheta_3}{\pi \vartheta_1' \vartheta_2^3} w - \frac{\vartheta_0 \vartheta_3^3}{\vartheta_1' \vartheta_2^3} a_0\left(\tau, \frac{2w}{\Omega}\right)$$
$$= \frac{\vartheta_0''}{\pi^2 \vartheta_0 \vartheta_2^4} w - \frac{\vartheta_3^2}{\pi \vartheta_2^4} a_0\left(\tau, \frac{2w}{\Omega}\right)$$

finden.

Das elliptische Integral zweiter Gattung drückt sich also aus durch eine ganze Function und eine elliptische Function zweiter Gattung vom Typus 2, deren Argument arg sin am x ist.

7. Die Formel § 92, (4.) gestalten wir dadurch um, dass wir $w-\alpha$ statt w, 2α statt b einsetzen und die Formeln

$$\sin \operatorname{am}(w+\alpha) \sin \operatorname{am}(w-\alpha) = \frac{\sin^2 \operatorname{am} w - \sin^2 \operatorname{am} \alpha}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha \sin^2 \operatorname{am} w}$$
$$= -\frac{1}{\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha} + \frac{1}{\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha} \cdot \frac{1 - \varkappa^2 \sin^4 \operatorname{am} \alpha}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha \sin^2 \operatorname{am} w}$$

und

$$\sin \operatorname{am} 2\alpha = \frac{2 \sin \operatorname{am} \alpha \cos \operatorname{am} \alpha \Delta \operatorname{am} \alpha}{1 - \varkappa^2 \sin^4 \operatorname{am} \alpha}$$

zur Anwendung bringen; es findet sich

$$(23.)\qquad \frac{d \log \left[\dfrac{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2(w+\alpha)}{\Omega}\right)}{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2(w-\alpha)}{\Omega}\right)}\right]}{dw} = \frac{2}{\Omega} \frac{\vartheta_0'\left(\tau, \frac{4\alpha}{\Omega}\right)}{\vartheta_0\left(\tau, \frac{4\alpha}{\Omega}\right)}$$
$$-\left\{-\frac{2 \cos \operatorname{am} \alpha \Delta \operatorname{am} \alpha}{\sin \operatorname{am} \alpha (1 - \varkappa^2 \sin^4 \operatorname{am} \alpha)} + \frac{2 \cos \operatorname{am} \alpha \Delta \operatorname{am} \alpha}{\sin \operatorname{am} \alpha (1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha \sin^2 \operatorname{am} w)}\right\}.$$

Multipliciren wir mit dw, integriren und formen um, so erhalten wir

$$(24.)\quad \int \frac{dw}{1-\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha \sin^2 \operatorname{am} w}$$

$$= \left[\frac{1}{1-\varkappa^2 \sin^4 \operatorname{am} \alpha} + \frac{\sin \operatorname{am} \alpha}{\Omega \cos \operatorname{am} \alpha \, \Delta \operatorname{am} \alpha} \frac{\vartheta_0'\left(\tau, \frac{4\alpha}{\Omega}\right)}{\vartheta_0\left(\tau, \frac{4\alpha}{\Omega}\right)} \right] w$$

$$- \frac{\sin \operatorname{am} \alpha}{2 \cos \operatorname{am} \alpha \, \Delta \operatorname{am} \alpha} \log \left[\frac{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2(w+\alpha)}{\Omega}\right)}{\vartheta_0\left(\tau, \frac{2(w-\alpha)}{\Omega}\right)} \right].$$

Setzen wir nun wieder

$$\sin \operatorname{am} w = x,$$

so finden wir

$$(25.)\quad \int \frac{dw}{1-\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha \sin^2 \operatorname{am} w}$$

$$= \int \frac{dx}{(1-\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha \cdot x^2) \sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}},$$

wodurch das Integral dritter Gattung ausgeführt ist, da sich dasselbe leicht in die rechtsstehende Grösse umwandeln lässt.

Das elliptische Integral dritter Gattung führt somit auf eine ganze Function und den Logarithmus einer elliptischen Function zweiter Gattung vom Typus 1, deren Argument arg sin am x ist.

Berichtigungen und Zusätze.

Pag. 25, Z. 12 l.: $\frac{u_{\omega+1}}{u_\omega} < 1$ oder $\frac{u_{\omega+1}}{u_\omega} > 1$ ist.

„ 40: In der Anmerkung ist einzuschieben: Der Differentialquotient einer Constanten ist Null; es ist $\frac{d(af(x))}{dx} = a\frac{df(x)}{dx}$.

„ 51: Die in 2. angestellte Untersuchung kann insofern noch weiter fortgeführt werden, als sich die im Lehrsatze auftretenden n Gleichungen m^{ten} Grades auf eine einzige reduciren lassen.

„ 55, Z. 17 v. u. l.: rationalen statt irrationalen.

„ 64 ist zu § 17 zuzufügen: Ins Besondere folgt aus $y = x^{\frac{m}{n}}$ oder $y^n - x^m = 0$: $\frac{dy}{dx} = \frac{m x^{m-1}}{n y^{n-1}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$.

„ 69 ist in Figur 6 die Grenze zwischen punktirten und ausgezogenen Linien an den Schnitt OA zu verlegen.

„ 100, Z. 2 v. u. l.: Ferner folgt, wenn $\frac{d\varrho_\alpha}{dr_\alpha}$ von Null verschieden ist.

„ 101, Z. 13 v. u. l.: In den singulären und denjenigen Punkten, in denen der Differentialquotient verschwindet, kann u. s. w.

„ 121, Z. 4 l.: $|a_k|$ statt $|a|_k$.

„ 135, Z. 8 v. u. ist die letzte Klammer zu entfernen.

„ 294, Z. 1 l.: $\chi_r\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$ statt $X_r\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$.

„ 298, Z. 7 l.: sein statt hin.

„ 310, Z. 13 v. u.: unendlich statt unendliche.

„ 312, Z. 8 v. u. l.:

$$2\sum_1^\infty{}_n (-1)^n p^{n^2} \cos 2n\pi w \text{ statt } 2\sum_1^\infty{}_n(-1)^n p^{n^2} \cos 2n\pi w).$$

„ 321, Z. 14. l.: Bezeichnung statt Beziehung.

„ 327, Z. 1 v. u. l.: $\frac{d^k \vartheta_\alpha(\tau, w)}{dw^k}$ statt $\frac{d^k \vartheta_2(\tau, w)}{dw^k}$.

„ 328, Z. 6 l.: Ω und Ω' statt Ω und Ω.

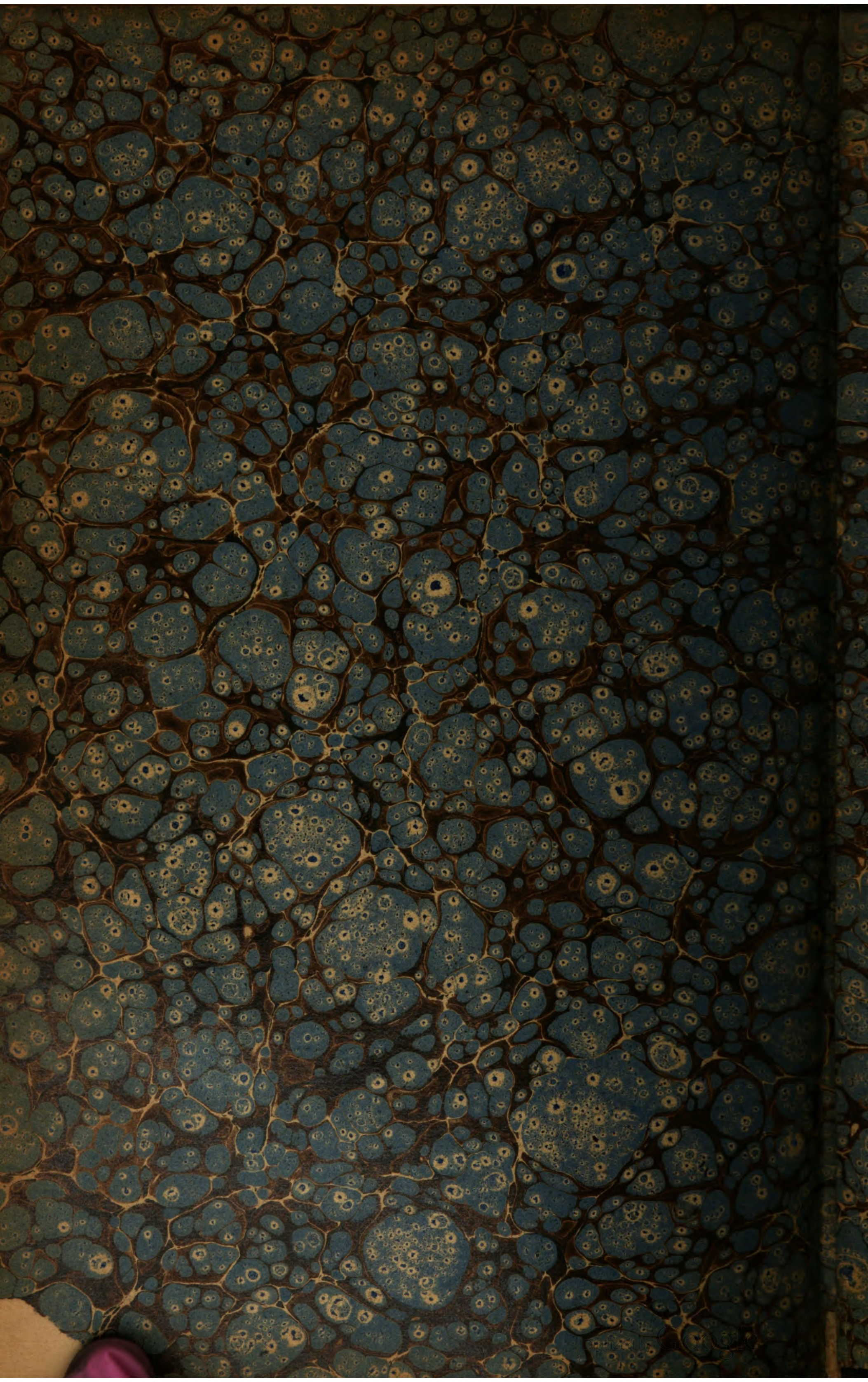
„ 346, Z. 8 l.: $S\left(e^{\pi i \tau}, e^{\frac{2\pi i w}{\Omega}}\right)$ statt $S\left(e^{\pi i}, e^{\frac{2\pi i w}{\Omega}}\right)$.

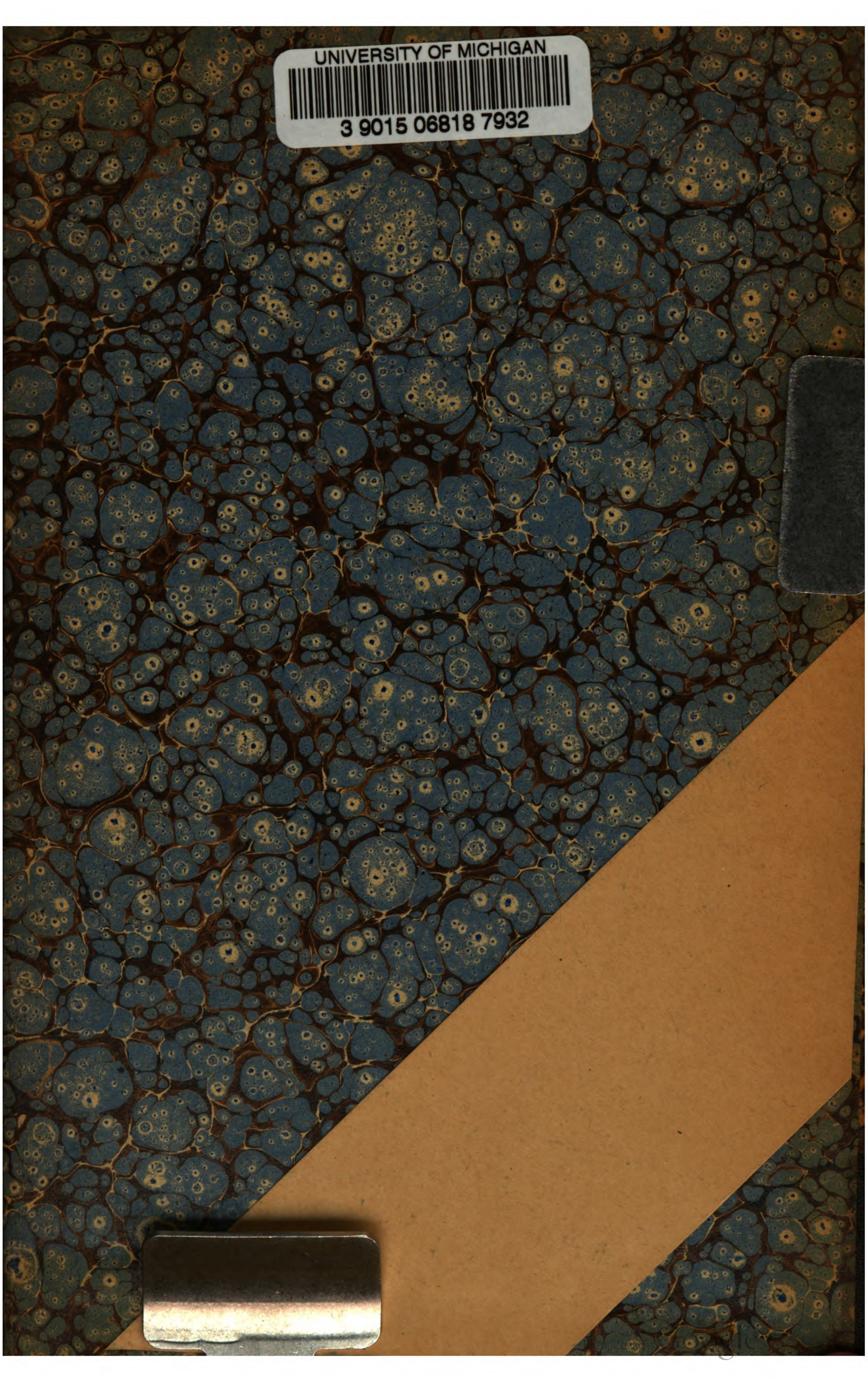
Pag. 355, Z. 5, muss die Formel lauten: $p' = e^{\pi i \tau'} = e^{\pi i} e^{\pi i \tau} = - p.$

„ 359, Z. 4 und 5 l.: $\left(1 - q^{4n-2}\right)$ statt $\left(1 - q^{4n-1}\right)$ und $(1 + p^{n})^2$ statt $(1 + q^{n})^2$.

„ 379, Z. 3 v. u. l.: $\Omega' + 8k\Omega$ statt $\Omega' + 16k\Omega$.

„ 438, Z. 9 und 10 ist $\left(\text{also } p^{2n} \text{ und } p^{2n+1}\right)$ zu entfernen.





UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06818 7932

